ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 511.42
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-5-526-532

Поступило в редакцию 29.04.2021
Received 29.04.2021

В. И. Берник[1], Н. В. Бударина[2], Е. В. Засимович[1]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Технологический институт Дандолка, Дандолк, Ирландия

ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ С ПОСТОЯННОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ НЕРАВЕНСТВ НА КОРОТКИХ ИНТЕРВАЛАХ. 1

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Аннотация. Задача о нахождении меры Лебега μ множества B_1 покрытий решений неравенства $|P(x)| < Q^{-w}$, $w > n$, $Q \in \mathbb{N}$ и $Q > 1$, в целочисленных полиномах $P(x)$ степени не более n и высоты $H(P) \le Q$ является одной из основных проблем метрической теории диофантовых приближений. Получена новая, наиболее сильная к настоящему времени, оценка $\mu B < c(n)Q^{-w+n}$, $n < w < n+1$. Даже неэффективная версия этой оценки позволила В. Г. Спринджуку решить известную проблему Малера.

Ключевые слова: диофантовы приближения, короткие интервалы, гипотеза Малера, теорема Дирихле

Для цитирования. Берник, В. И. Диофантовы приближения с постоянной правой частью неравенств на коротких интервалах. 1 / В. И. Берник, Н. В. Бударина, Е. В. Засимович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2021. – Т. 65, № 5. – С. 526–532. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-5-526-532

Vasili I. Bernik[1], Natalia V. Budarina[2], Elena V. Zasimovich[1]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]Institute of Technology of Dundalk, Dundalk, Ireland

DIOPHANTINE APPROXIMATIONS WITH A CONSTANT RIGHT-HAND SIDE OF INEQUALITIES ON SHORT INTERVALS. 1

(Communicated by Academician Nikolay A. Izobov)

Abstract. The problem of finding the Lebesgue measure μ of the set B_1 of the coverings of the solutions of the inequality $|P(x)| < Q^{-w}$, $w > n$, $Q \in \mathbb{N}$ and $Q > 1$, in integer polynomials $P(x)$ of degree, which doesn't exceed n and the height $H(P) \le Q$, is one of the main problems in the metric theory of the Diophantine approximation. We have obtained a new bound $\mu B_1 < c(n)Q^{-w+n}$, $n < w < n+1$, that is the most powerful to date. Even an ineffective version of this bound allowed V. G. Sprindzuk to solve Mahler's famous problem.

Keywords: Diophantine approximation, short intervals, Mahler's conjecture, Dirichlet's theorem

For citation. Bernik V. I., Budarina N. V., Zasimovich E. V. Diophantine approximations with a constant right-hand side of inequalities on short intervals. 1. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2021, vol. 65, no. 5, pp. 526–532 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-5-526-532

В середине XIX в. Дирихле доказал, что для любого действительного числа $x \in \mathbb{R}$ можно найти бесконечную последовательность натуральных чисел $q_1, q_2, \ldots$ таких, что выполняется неравенство

$$\left| x - \frac{p_j}{q_j} \right| < q_j^{-2}$$

при некоторых целых числах $p_1, p_2, \ldots$.

В 1924 г. Хинчин доказал очень общую метрическую теорему о приближении действительных чисел рациональными числами. Пусть $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ – некоторый интервал, μB – мера Лебега измеримого множества $B \subset \mathbb{R}$ $(\mu I = b - a)$, $\Psi(t)$ – монотонно убывающая функция аргумента $t \ge 0$. Обозначим через $\mathcal{L}_1(\Psi)$ множество $x \in I$, для которого неравенство

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{\Psi(q)}{q}$$

имеет бесконечное число решений в $(p,q)\in\mathbb{Z}^2$.

Т е о р е м а 1 (Хинчина). *Справедливы равенства*

$$\mu\mathcal{L}_1(\Psi)=\begin{cases}0, & \text{если } \sum\limits_{q=1}^{\infty}\Psi(q)<\infty,\\ \mu I=b-a, & \text{если } \sum\limits_{q=1}^{\infty}\Psi(q)=\infty.\end{cases}$$

Теорема Хинчина обобщалась с многочленов первой степени на многочлены более высоких степеней. Обозначим через $\mathcal{L}_n(\Psi)$ множество $x\in I$, для которого неравенство

$$|P(x)|=\left|a_nx^n+\ldots+a_1x+a_0\right|<H^{-n+1}\Psi(H)$$

имеет бесконечное число решений в полиномах $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$ степени $\deg P=n$, высоты $H=H(P)=$ $=\max\limits_{0\le i\le n}|a_i|$.

Г и п о т е з а М а л е р а [1]. *При любом* $\varepsilon>0$ *и* $\Psi_1(H)=H^{1+\varepsilon}$ *верно равенство* $\mu\mathcal{L}_n(\Psi_1)=0$.

Гипотезу Малера доказывали и достигали в решении этой задачи частичного прогресса многие крупные математики. Ее полное решение было получено Спринджуком [2]. Гипотеза Малера – это обобщение теоремы Хинчина в случае $\Psi_1(q)=q^{-1-\varepsilon}$. Полное обобщение теоремы Хинчина на многочлены произвольной степени было получено Берником [3] и Бересневичем [4].

В последние 20 лет в метрических теоремах не переходят к бесконечному числу решений, а при фиксированном $Q>0$ рассматривают множество $B_1\subset I$, для точек которого выполнено неравенство

$$|P(x)|<Q^{-w},\ w>n, \tag{1}$$

для всех полиномов $P(x)\in\mathbb{Z}[x]$, $\deg P=n$, $H(P)\le Q$. Если $w\le n$, то, используя принцип ящиков Дирихле [2; 5], нетрудно доказать, что $B_1=I$. В дальнейшем для сокращенной записи неравенств будем использовать символ Виноградова $\ll$ (см. [2]), где константами будем считать величины, зависящие от n и не зависящие от Q. Приведем теорему из [6].

Т е о р е м а 2. *При* $w>n$ *справедливо неравенство*

$$\mu B_1\ll Q^{-\frac{w-n}{n}},$$

где $\ll$ *– символ Виноградова.*

В настоящей работе в теореме 3 мы улучшаем при $n<w<n+1$ оценку теоремы 2, при этом длина интервала I будет равна $Q^{-\gamma}$, $0<\gamma<\frac{1}{2}$.

Воспользуемся стандартной конструкцией из [2]. Упорядочим корни $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ многочлена $P(x)$ следующим образом: $|\alpha_1-\alpha_2|\le|\alpha_1-\alpha_3|\le\ldots\le|\alpha_1-\alpha_n|$. Следуя [2], введем величины ρ_j, $l_j\in\mathbb{Z}$, p_j, $2\le l_j\le n$, $1\le j\le n-1$, такие что:

$$\begin{gathered}|\alpha_i-\alpha_j|=Q^{-\rho_j},\ \frac{l_j-1}{T}\le\rho_j\le\frac{l_j}{T},\ \overline{l}=(l_2,\ldots,l_n),\ \forall\varepsilon>0,\ T=[\varepsilon^{-1}]+1,\\ |P'(\alpha_1)|>Q^{1-p_1},\ p_j=\frac{l_j+\ldots+l_n}{T},\ \forall v\in\mathbb{R},\ |v-p_1|<n\varepsilon.\end{gathered}\tag{2}$$

Пусть $\mathcal{P}_n(Q)$ – множество полиномов $P(x)$, $\deg P\le n$, $H(P)\le Q$ и $\mathcal{P}_n(Q,\overline{l})$ – множество полиномов $P(x)$, $\deg P\le n$, $H(P)\le Q$, корни которых упорядочены как в (2) при фиксированном $\overline{l}$. Нетрудно доказать, что $\#\overline{l}<c_2(n,\varepsilon)$ [2].

Рассмотрим интервал $\mathcal{I}=(0,1)$. Пусть Q – натуральное число, $Q>Q_0(n,\varepsilon)$, $I\subset\mathcal{I}$ – интервал, длина которого $|I|=Q^{-\gamma}$, $\gamma>0$.

Т е о р е м а 3. *При* $0<\gamma<\dfrac{1}{2}$ *и* $n<w<n+1$ *справедливо неравенство*

$$\mu B_1 < c_1 Q^{-w+n+\varepsilon}\mu I. \tag{3}$$

В (3) и далее величины $c_1 = c_1(n), c_2, \ldots$ зависят только от n и не зависят от Q. В [2] доказано, что если $a_n > 0$ – старший коэффициент полинома $P(x)$, то неравенство $a_n > c_2 H(P)$, $0<c_2<1$, приводит к неравенствам $\alpha_j < c_3$.

Докажем несколько вспомогательных лемм.

Л е м м а 1. *Теорема 3 верна при дополнительном условии*

$$|P'(\alpha_1)| > \delta_0 Q, \tag{4}$$

где δ_0 *– произвольное фиксированное число, такое что* $0<\delta_0<1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся классической леммой 2 из [2] и (4). Тогда из неравенства $|P(x)|<Q^{-w}$ и (4) получаем

$$|x-\alpha_1| < \delta_0^{-1} 2^n Q^{-w-1}. \tag{5}$$

Просуммируем эту оценку по всем полиномам $P(x)\in\mathcal{P}_n(Q)$ с фиксированным вектором $\overline{b}=(a_n,\ldots,a_1)$, и по a_0, где a_i – коэффициенты полинома $P(x)$. Тогда для множества $x\in B_2\subset B_1$, удовлетворяющих (4), выполняется оценка

$$\sum_{\overline{b}}\mu B_2 < \delta_0 n c_4^n 2^{2n+1} Q^{-w+n},$$

что и доказывает лемму 1 при $c_1 = \delta_0 n c_4^n 2^{2n+1}$.

Л е м м а 2. *Теорема 3 верна при дополнительном условии*

$$Q^{1-p_1} < |P'(\alpha_1)| \le \delta_0 Q, \tag{6}$$

где δ_0 *– произвольные фиксированное число, такое что* $0<\delta_0<1$ *и* $0<p_1<\dfrac{1}{2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначения:

$$\sigma(P)=\left\{x\in I : |x-\alpha_1| < 2^n Q^{-w}|P'(\alpha_1)|^{-1}\right\}, \tag{7}$$

$$\sigma_1(P)=\left\{x\in I : |x-\alpha_1| < c_5 |P'(\alpha_1)|^{-1}\right\}. \tag{8}$$

Из (8) и (6) следует, что $\mu I \ge \mu\sigma_1(P)$.

В (7) и (8) алгебраические числа α_1 могут быть и комплексные, а интервал $\sigma(P)$ в этом случае – хорда круга $K(\alpha_1, r)$ с центром в α_1 и радиусом $r = 2^n Q^{-w}|P'(\alpha_1)|^{-1}$, образующаяся при пересечении круга и отрезка I. Если пересечение не пусто, то $\sigma_1(P)$ – хорда $\sigma_1(P)$, близкая к диаметру круга $\sigma_1(P)$. Пусть $x\in\sigma_1(P)$. Разложим полином $P(x)$ на $\sigma_1(P)\cap\mathbb{R}$ в ряд Тейлора в точке α_1:

$$P(x)=P(\alpha_1)+P'(\alpha_1)(x-\alpha_1)+\sum_{j=2}^{n}(j!)^{-1}P^{(j)}(\alpha_1)(x-\alpha_1)^j. \tag{9}$$

Для оценок слагаемых в (9) применим леммы об оценке $|x-\alpha_1|$ и $|P'(\alpha_1)|$ из [2; 7] и (7).

Поскольку из (5) и (6) следуют неравенства $|x-\alpha_1| < c_6 Q^{-w-1+p_1}$ и $|P'(\alpha_1)||x-\alpha_1| < c_6$, то имеем как в [2]:

$$\frac{1}{2}|P''(\alpha_1)||x-\alpha_1|^2 < c_6^2 n^3 Q^{1-2-1} \ll Q^{-2+\varepsilon}.$$

Остальные члены разложения в (9) будут иметь еще меньший порядок по Q, чем $\left|2^{-1}P''(\alpha_1)(x-\alpha_1)^2\right|$ и поэтому для всех $x\in\sigma_1(P)$ имеем

$$|P(x)| < 2c_7. \tag{10}$$

Введем вектор $\overline{b} = (a_n, \ldots, a_1)$, состоящий из коэффициентов полинома $P(x)$. Множество полиномов из $\mathcal{P}_n(Q)$ с одним и тем же вектором $\overline{b}$ обозначим через $V(\overline{b})$. Понятно, что из $-Q \le a_j \le Q$ имеем $\# V(\overline{b}) \le (2Q+1)^n \ll 2^{n+1} Q^n$ при $Q > Q_0$. Покажем, что пересечение

$$\Pi = \sigma_1(P_1) \bigcap \sigma_1(P_2) = \varnothing$$

при $P_1(x), P_2(x) \in V(\overline{b}) \bigcap \mathcal{P}_n(Q)$, если $c_7 < \frac{1}{4}$.

В самом деле, если $x \in \Pi$, a_{01} – свободный коэффициент полинома $P_1(x)$, а a_{02} – полинома $P_2(x)$, то рассмотрим разность $|P_2(x) - P_1(x)|$:

$$0 \ne |a_{02} - a_{01}| = |P_2(x) - P_1(x)| < 4c_8. \tag{11}$$

Поскольку $1 \le |a_{02} - a_{01}|$, то неравенство (11) противоречиво.

Из определений (7) и (8) следует, что

$$\mu\sigma(P) < c_9^{-1} 2^n Q^{-w} \mu\sigma_1(P),$$

а из (10) имеем

$$\sum_{P \in V(\overline{b})} \mu\sigma_1(P) \le \mu I.$$

Поэтому

$$\sum_{\overline{b}} \sum_{P \in V(\overline{b})} \mu\sigma(P) \le c_9^{-1} 2^n \sum_{\overline{b}} Q^{-w} \mu I \le 2^{2n+2} Q^{-w+n} \mu I.$$

Л е м м а 3. *Теорема 3 верна при дополнительном условии*

$$Q^{-\frac{1}{2}} < |P'(\alpha_1)| < Q^{\frac{1}{2}}$$

или, что одно и то же, $\frac{1}{2} < p_1 < \frac{3}{2}$.

Лемма 3 следует из оценки теоремы работы [7].

Л е м м а 4. *Теорема 3 верна при дополнительном условии*

$$Q^{-n+1} < |P'(\alpha_1)| \le Q^{-\frac{1}{2}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим число $l_2 T^{-1} + p_1 - 1$ и потребуем, чтобы оно имело дробную часть $0 \le \theta = \{l_2 T^{-1} + p_1 - 1\} < \varepsilon$. Введем натуральное число

$$k = [l_2 T^{-1} + p_1 - 1] = l_2 T^{-1} + p_1 - 1 - \theta, \ 0 \le \theta < \varepsilon. \tag{12}$$

Зафиксируем вектор $\overline{b}_k = (a_n, \ldots, a_{k+1})$ и множество полиномов с одним и тем же вектором $\overline{b}_k$ обозначим через $V(\overline{b}_k)$. Для каждого полинома $P(x) \in V(\overline{b}_k) \bigcap \mathcal{P}_n(Q)$ введем интервалы $\sigma(P)$ и $\sigma_k(P)$:

$$\sigma(P) := \left\{ x \in I : |x - \alpha_1| < 2^n Q^{-w} |P'(\alpha_1)|^{-1} \right\}, \tag{13}$$

$$\sigma_k(P) := \left\{ x \in I : |x - \alpha_1| < c_{10} Q^{-u_k} |P'(\alpha_1)|^{-1} \right\}, \ u_k > 0. \tag{14}$$

Разложим многочлен $P(x)$ в корне α_1 по формуле Тейлора на интервале I_1, $|I_1| = Q^{-l_2 T^{-1}}$, причем $\sigma_k(P) \subset I_1$:

$$P(x) = P(\alpha_1) + P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \frac{1}{2} P''(\alpha_1)(x - \alpha_1)^2 + \sum_{j=3}^{n} (j!)^{-1} P^{(j)}(\alpha_1)(x - \alpha_1)^j.$$

Из леммы об оценке $|x - \alpha_1|$ следует, что интервал $\sigma(P)$ содержит все решения x неравенства (1), для которых α_1 – ближайший к x корень $P(x)$, а при

$$u_k \geq l_2 T^{-1} + p_1 - 1 \tag{15}$$

интервал $\sigma_k(P)$ не полностью покрывает I_1. Из оценок

$$\left|P'(\alpha_1)(x-\alpha_1)\right| \leq Q^{-u_k}, \quad \left|\frac{1}{2}P''(\alpha_1)(x-\alpha_1)^2\right| < n^3 Q^{-2u_k-2+2p_1}, \quad \left|(j!)^{-1}P^{(j)}(\alpha_1)(x-\alpha_1)^j\right| < \frac{1}{n}Q^{-u_k},$$

следует, что для всех $x \in \sigma_k(P)$ при $Q > Q_0$ в (14), верно неравенство

$$\left|P(x)\right| < 2Q^{-u_k}. \tag{16}$$

Интервалы $\sigma_k(P)$ разделим на два класса: существенные и несущественные. Если для $P_1(x) \in V(\overline{b}_k)$ найдется другой полином $P_2(x) \in V(\overline{b}_k)$ такой, что

$$\mu(\sigma_k(P_1) \cap \sigma_k(P_2)) \geq \frac{1}{2}\mu\sigma_k(P_1),$$

то интервал $\sigma_k(P_1)$ будем называть несущественным. Если же для любого $P_2(x) \in V(\overline{b})$ верно неравенство

$$\mu(\sigma_k(P_1) \cap \sigma_k(P_2)) < \frac{1}{2}\mu\sigma_k(P_1),$$

то интервал $\sigma_k(P_1)$ будем называть существенным. Каждая точка интервала $I \subset \mathcal{I}, \left|I\right| = Q^{-\gamma}$, $\gamma > 0$, покрывается не более двумя существенными интервалами $\sigma_k(P)$ и поэтому

$$\sum_{P\text{сущ}} \mu\sigma_k(P) < 2\left|I\right|. \tag{17}$$

Из (13) и (14) следует

$$\mu\sigma(P) < 2^n c_{11}^{-1} Q^{-w+u_k+n-k}\left|I\right|, \tag{18}$$

откуда имеем из неравенства $\#V(\overline{b}_k) \leq (2Q+1)^{n-k} \ll 2^n Q^{n-k}$, $Q > Q_0$,

$$\sum_{P \in V(\overline{b}_k)} \sum_{P\text{сущ}} \mu\sigma(P) \leq 2^n c_{11}^{-1} Q^{-w+u_k+n-k}\left|I\right|,$$

что при $u_k \leq k, Q > Q_0$ меньше $c_{12}^{-1} Q^{-w+n}\left|I\right|$.

Если интервал $\sigma_k(P)$ несущественный и неравенство (16) выполняется для множества B, $\mu B > \frac{1}{2}\mu\sigma_k(P)$, то по лемме об оценке $\left|P'(\alpha_1)\right|$ из [8] для всего интервала $\sigma_k(P)$ верно

$$\left|R_j(x)\right| = \left|P_j(x) - P_1(x)\right| \ll Q^{-u_k}, \quad j \geq 2, \ \deg R \leq k, \tag{19}$$

для некоторого полинома $R_j(x) = P_j(x) - P_1(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

Если количество полиномов $R_j(x)$ удовлетворяет условию $\ll Q^{\varepsilon}$, то подсчет мер осуществляется непосредственно. Если для количества полиномов $R_j(x)$ выполнено $\gg Q^{\varepsilon}$ и среди полиномов $R_j(x)$ окажутся полиномы без общих корней, то положим $u_k = k$ и применим к двум таким полиномам $R_j(x)$ лемму об ограниченности полиномов сверху из [9]. Здесь, как и в [9],

$$\begin{gathered} \tau + 1 = k = l_2 T^{-1} + p_1 - \theta, \qquad 2(\tau + 1 - \eta) = 2p_1 - 2\theta, \\ \tau + 1 + 2(\tau + 1 - \eta) = l_2 T^{-1} + 3p_1 - 3\theta > 2k + \delta = 2l_2 T^{-1} + 2p_1 - 2 + \delta, \end{gathered} \tag{20}$$

что противоречиво при $3\theta + \delta < 2$.

Если равенство (12) не выполняется, то разложение $P(x)$ в ряд надо проводить на интервалах I длины $\left|I\right| = Q^{-l_2 T^{-1} - \Delta}$, $\Delta > 0$. За счет выбора Δ величину $l_2 T^{-1} + \Delta + p_1 - 1$ можно сделать близкой к натуральному числу и повторить рассуждения (14)–(20).

Остается случай, когда полиномы $R_j(x)$ имеют общие корни. Тогда полиномы $R_j(x)$ приводимы и их можно представить в виде произведения

$$R_j(x) = t_1(x) t_2(x).$$

Обозначим $\deg t_1(x) = n_1 \le k-1$, $H(t_1) = Q^{\lambda}$. По лемме о степени и высоте произведения полиномов из [3] имеем $\deg t_2(x) \le k - n_1$, $H(t_2) \ll Q^{1-\lambda}$. Неравенство

$$\left|R_j(x)\right| \ll Q^{-k}$$

верно для всех точек $x \in \sigma_k(P)$. Обозначим через a такое действительное число, для которого неравенство

$$\left|t_1(x)\right| < Q^{-a}$$

верно для точек $x \in B_3 \subset \sigma_k(P)$, $\mu B_3 > \frac{1}{2}\mu\sigma_k(P)$, но уже неравенство

$$\left|t_1(x)\right| < Q^{-a-\varepsilon_1}$$

справедливо только на множестве $B_4 \subset \sigma_k(P)$, $\mu B_4 \le \frac{1}{2}\mu\sigma_k(P)$. Из введенных определений и леммы об оценке $\left|P'(\alpha_1)\right|$ следует, что на всем интервале $\sigma_k(P)$ справедливо неравенство

$$\left|t_1(x)\right| \ll Q^{-a},\ \left|t_1(x)\right| \ll Q_1^{-\frac{a}{\lambda}},\ Q_1 = Q^{\lambda}. \tag{21}$$

На множестве $B_5 \subset \sigma_k(P) \setminus B_4$, $\mu B_5 > \frac{1}{2}\mu\sigma_k(P)$ верно неравенство $\left|t_1(x)\right| \gg Q^{-a-\varepsilon}$, а поэтому $\left|t_2(x)\right| \ll Q^{-k+a+\varepsilon}$, и для всех $x \in \sigma_k(P)$ верно

$$\left|t_2(x)\right| \ll Q^{-k+a+\varepsilon} \ll Q_2^{-\frac{k-a-\varepsilon}{1-\lambda}},\ Q_2 = Q^{1-\lambda}. \tag{22}$$

Множество x, для которых верно неравенство (21), разрешимо в полиномах $t_1(x)$ степени n_1 и высоты Q^{λ}. Данное множество по индукции может быть покрыто интервалами с суммарной мерой $\ll Q_1^{-\frac{a}{\lambda}+n_1} \ll Q_1^{-\frac{a-\lambda n_1}{\lambda}}$, а множество x, для которых верно неравенство (22) – интервалами с суммарной мерой $\ll Q_2^{-\frac{k-a-\varepsilon}{1-\lambda}+(k-n_1)} \ll Q_2^{-\frac{k-a-\varepsilon-(1-\lambda)(k-n_1)}{1-\lambda}}$. Если справедливо хотя бы одно из неравенств

$$a - \lambda n_1 > (w-n)\lambda,\ k - a - \varepsilon > (1-\lambda)(k - n_1 + w - n),$$

то множество решений неравенства $\left|P(x)\right| < Q^{-w}$ покрывается интервалами с суммарной мерой $\ll Q^{-w+n}$, и теорема доказана. Покажем, что система неравенств с двумя противоположными неравенствами в (22) несовместна. Из системы неравенств

$$\begin{cases} a < \lambda n_1 + (w-n)\lambda = \lambda(w-n-n_1), & k = l_2T^{-1} + p_1 - 1 + \theta, \quad 0 \le \lambda \le 1, \\ k < a + \varepsilon + (1-\lambda)(k - n_1 + w - n), & 1 \le n_1 \le k-1, \qquad n < w < n+1, \end{cases} \tag{23}$$

имеем

$$0 < \lambda(-k + 2n_1 + w - n - n_1) = \lambda(-k + w - n + n_1). \tag{24}$$

В одном из сомножителей $t_j(x)$ степень не превосходит $\frac{k}{2}$. Поэтому можно считать $n_1 \le \frac{k}{2}$. Далее, по условию $w - n < 1$, $n_1 \ge 1$. Правая часть неравенства (24) всегда отрицательна и система неравенств (23) несовместна.

Предложенный метод работает до $k = n-1$. В этом случае $l_2T^{-1} + p_1 = n$.

Л е м м а 5. *Теорема 3 верна при дополнительном условии*

$$l_2T^{-1} + p_1 > n. \tag{25}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Случаи (25) называются у Спринджука [2] классами второго рода и их доказательство может быть проведено так же, как в [2].

Таким образом, леммы 1–5 охватывают все возможные случаи для величины $\left|P'(\alpha_1)\right|$, что дает полное доказательство теоремы 3.

Список использованных источников

1. Mahler, K. Über das Maß der Menge aller S-Zahlen / K. Mahler // Math. Ann. – 1932. – Vol. 106, N 1. – P. 131–139. https://doi.org/10.1007/bf01455882

2. Спринджук, В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск, 1967. – 181 с.

3. Bernik, V. I. The exact order of approximating zero by values of integral polynomials / V. I. Bernik // Acta Arith. – 1989. – Vol. 53, N 1. – P. 17–28.

4. Beresnevich, V. V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. V. Beresnevich // Acta Arith. – 1999. – Vol. 90, N 2. – P. 97–112. https://doi.org/10.4064/aa-90-2-97-112

5. Bernik, V. I. Metric Diophantine Approximation on Manifolds / V. I. Bernik, M. M. Dodson. – Cambridge, 1999. https://doi.org/10.1017/cbo9780511565991

6. Budarina, N. On the rate of convergence to zero of the measure of extremal sets in metric theory of transcendental numbers / N. Budarina // Math. Z. – 2019. – Vol. 293, N 1–2. – P. 809–824. https://doi.org/10.1007/s00209-018-2211-1

7. Bernik, V. I. Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals / V. I. Bernik, F. Götze // Izvestiya: Mathematics. – 2015. – Vol. 79, N 1. – P. 18–39. https://doi.org/10.1070/im2015v079n01abeh002732

8. Берник, В. И. О числе целочисленных многочленов заданной степени и ограниченной высоты с малой производной в корне многочлена / В. И. Берник, Д. В. Васильев, А. С. Кудин // Тр. Ин-та математики. – 2014. – Т. 22, № 2. – С. 3–8.

9. Берник, В. И. Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник // Acta Arith. – 1983. – Vol. 42, N 3. – P. 219–253.

References

1. Mahler K. Über das Maß der Menge aller S-Zahlen. *Mathematische Annalen*, 1932, vol. 106, no. 1, pp. 131–139 (in German). https://doi.org/10.1007/bf01455882

2. Sprindzhuk V. G. *Mahler's problem in metric number theory*. Minsk, 1967. 181 p. (in Russian).

3. Bernik V. I. The exact order of approximating zero by values of integral polynomials. *Acta Arithmetica*, 1989, vol. 53, no. 1, pp. 17–28.

4. Beresnevich V. V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers. *Acta Arithmetica*, 1999, vol. 90, no. 2, pp. 97–112. https://doi.org/10.4064/aa-90-2-97-112

5. Bernik V. I., Dodson M. M. *Metric Diophantine Approximation on Manifolds*. Cambridge, 1999. https://doi.org/10.1017/cbo9780511565991

6. Budarina N. On the rate of convergence to zero of the measure of extremal sets in metric theory of transcendental numbers. *Mathematische Zeitschrift*, 2019, vol. 293, no. 1–2, pp. 809–824. https://doi.org/10.1007/s00209-018-2211-1

7. Bernik V. I., Götze F. Distribution of real algebraic numbers of arbitrary degree in short intervals. *Izvestiya: Mathematics*, 2015, vol. 79, no. 1, pp. 18–39. https://doi.org/10.1070/im2015v079n01abeh002732

8. Bernik V. I., Vasiliev D. V., Kudin A. S. On the number of integral polynomials of given degree and bounded height with small value of derivative at root of polynomial. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2014. vol. 22, no. 2, pp. 3–8 (in Russian).

9. Bernik V. I. Application of the Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximations. *Acta Arithmetica*, 1983, vol. 42, no. 3, pp. 219–253 (in Russian).

Информация об авторах

Берник Василий Иванович – д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: bernik.vasili@mail.ru.

Бударина Наталья Викторовна – д-р физ.-мат. наук. Технологический институт Дандолка (A91 K584, Дублин Роуд, Дандолк, Ирландия). E-mail: natalia.budarina@dkit.ie.

Засимович Елена Васильевна – аспирант. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: elena.guseva.96@yandex.by.

Information about the author

Bernik Vasiliy I. – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: bernik.vasili@mail.ru.

Budarina Nataliya V. – D. Sc. (Physics and Mathematics). Dundalk Institute of Technology (A91 K584, Dublin Road, Dundalk, Ireland). E-mail: natalia.budarina@dkit.ie.

Zasimovich Elena V. – Postgraduate student. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: elena.guseva.96@yandex.by.