ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 511.35, 511.48, 511.75, 519.218.5
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-6-647-653

Поступило в редакцию 12.08.2021
Received 12.08.2021

Д. В. Коледа

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

О ПЛОТНОСТЯХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ТОЧЕК ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВЫСОТНЫХ ФУНКЦИЯХ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Аннотация. Рассматривается пространственное распределение точек с алгебраическими сопряженными координатами фиксированной степени, построенное с помощью высотной функции. Получена универсальная оценка сверху и снизу для плотности распределения таких точек при произвольной высотной функции. Показано, как по заданной совместной плотности распределения коэффициентов случайного многочлена степени n построить такую высотную функцию $\mathcal{H}$, что многочлены q степени n, равновероятно выбираемые с условием $\mathcal{H}[q] \leq 1$, имели бы такое же распределение корней, как у исходного случайного многочлена.

Ключевые слова: алгебраические числа, алгебраические точки, распределение алгебраических чисел, n-точечная корреляционная функция, диофантовы приближения

Для цитирования. Коледа, Д. В. О плотностях распределения алгебраических точек при различных высотных функциях / Д. В. Коледа // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2021. – Т. 65, № 6. – С. 647–653. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-6-647-653

Denis V. Koleda

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

ON DISTRIBUTION DENSITIES OF ALGEBRAIC POINTS UNDER DIFFERENT HEIGHT FUNCTIONS

(Communicated by Academician Nikolay A. Izobov)

Abstract. In the article we consider the spatial distribution of points, whose coordinates are conjugate algebraic numbers of fixed degree. The distribution is introduced using a height function. We have obtained universal upper and lower bounds of the distribution density of such points using an arbitrary height function. We have shown how from a given joint density function of coefficients of a random polynomial of degree n, one can construct such a height function $\mathcal{H}$ that the polynomials q of degree n uniformly chosen under $\mathcal{H}[q] \leq 1$ have the same distribution of zeros as the former random polynomial.

Keywords: algebraic numbers, algebraic points, distribution of algebraic numbers, n-point correlation function, Diophantine approximation

For citation. Koleda D. V. On distribution densities of algebraic points under different height functions. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2021, vol. 65, no. 6, pp. 647–653 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-6-647-653

Введение. Сообщение посвящено совместному распределению *алгебраических точек* – точек, координаты которых суть сопряженные алгебраические числа.

Ранее было показано [1; 2], что распределение таких точек можно описать в терминах плотности распределения, и выражение этой плотности совпадает с корреляционной функцией корней некоторого случайного многочлена. Ключевую роль в корректном построении упомянутого распределения играет понятие высотной функции – такой функции $\mathcal{H}$ коэффициентов многочлена, что количество целочисленных многочленов q фиксированной степени, удовлетворяющих условию $\mathcal{H}[q] \leq X$, конечно для любого вещественного X. Высота алгебраической точки определяется как значение высотной функции на векторе коэффициентов минимального многочлена координат этой точки.

Среди наиболее употребительных высотных функций – обычная высота (максимум модулей коэффициентов многочлена) и мера Малера. Например, в [3–5], посвященных асимптотике общего количества многочленов и алгебраических чисел фиксированной степени и ограниченной высоты, в качестве высотной функции выступает мера Малера и родственная ей высота Вейля, а в [6; 7], где подсчитываются алгебраические точки вблизи гладких кривых и поверхностей, используется обычная высота.

Плотность распределения алгебраических точек существенно зависит от используемой высотной функции. Поэтому возникает вопрос о том, как соотносятся между собой результаты подсчета алгебраических точек при разных высотных функциях.

Покажем, что при любых высотных функциях для плотностей распределения алгебраических точек выполняются универсальные верхние и нижние оценки. Кроме того, по заданной совместной плотности распределения коэффициентов случайного многочлена мы построим высоту, относительно которой вещественные многочлены будут иметь такое же распределение корней, как и у данного случайного многочлена.

Основные понятия и соглашения. Далее степень n алгебраических чисел и точек произвольна, но фиксирована. Также зафиксированы целые неотрицательные k, l, такие что $1 \le k + 2l \le n$. Асимптотические соотношения и пределы рассматриваются при $Q \to +\infty$. Комплексная плоскость $\mathbb{C}$ отождествляется с евклидовой плоскостью $\mathbb{R}^2$, в частности, пространство $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l$ мы будем отождествлять с $\mathbb{R}^{k+2l}$.

Формальная переменная у многочленов обозначена символом X. Например, запись $(X - z_1)(t_2X^2 + t_1X + t_0)$ обозначает сам многочлен, т. е. элемент кольца $\mathbb{R}[X]$, а $(x - z_1)(t_2x^2 + t_1x + t_0)$ – значение этого многочлена в некоторой точке x.

В сообщении под *высотой* многочлена $q(X) = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$ мы понимаем непрерывную функцию $\mathcal{H} : \mathbb{R}^{n+1} \to [0, +\infty)$, удовлетворяющую двум условиям: (а) $\mathcal{H}[q] = 0$ тогда и только тогда, когда q есть тождественный нуль; (б) $\mathcal{H}[\omega q] = |\omega| \mathcal{H}[q]$ для всех вещественных ω. Саму функцию $\mathcal{H}$, как функцию коэффициентов многочлена, мы будем называть *высотной функцией*. Для заданной высоты $\mathcal{H}$ определим $(n + 1)$-мерный «единичный шар» $\mathbb{B}_{\mathcal{H}}$ как

$$\mathbb{B}_{\mathcal{H}} := \left\{(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathcal{H}\left[\sum_{j=0}^{n} a_j X^j\right] \le 1\right\}.$$

Частным случаем высотной функции является *мера Малера*, которая для многочлена $q(X) = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 = a_n (X - z_1) \ldots (X - z_n)$ определяется как

$$M[q] := |a_n| \prod_{j=1}^{n} \max\left\{1, |z_j|\right\}.$$

Под *минимальным многочленом* алгебраического числа $\alpha \in \mathbb{C}$ будем понимать ненулевой целочисленный многочлен q_α наименьшей степени со взаимно простыми коэффициентами и положительным старшим коэффициентом, такой что $q_\alpha(\alpha) = 0$.

Алгебраической (k, l)*-точкой* будем называть упорядоченный набор из $(k + l)$ чисел

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_l) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}_+^l,$$

такой что его вещественные координаты $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ и комплексные координаты $\beta_1, \ldots, \beta_l$ суть различные сопряженные (по Галуа) алгебраические числа, т. е. числа α_i и β_j имеют общий минимальный многочлен $q_{\boldsymbol{\alpha}}$. *Степень* и *высоту* алгебраической точки определим как степень и высоту минимального многочлена координат точки $\deg(\boldsymbol{\alpha}) := \deg(q_{\boldsymbol{\alpha}})$, $\mathcal{H}[\boldsymbol{\alpha}] := \mathcal{H}[q_{\boldsymbol{\alpha}}]$.

Обозначим через $\mathbb{A}_n(k, l)$ множество всех алгебраических (k, l)-точек степени n (над $\mathbb{Q}$). Для $Q \ge 1$ и множества $S \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l$ определим считающую функцию

$$\Phi_{\mathcal{H};k,l}(Q, S) := \#\{\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{A}_n(k, l) \cap S : \mathcal{H}[\boldsymbol{\alpha}] \le Q\}.$$

В [1] и [2] показано, что для любой фиксированной области $B \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}_+^l$, граница которой имеет лебегову меру нуль, верна асимптотика

$$\frac{\Phi_{\mathcal{H};k,l}(Q,B)}{Q^{n+1}} \sim \frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})}{2\zeta(n+1)} \int\limits_B \rho_{\mathcal{H};k,l}(\mathbf{x},\mathbf{z})d\mathbf{x}d\mathbf{z}, \quad Q \to \infty, \tag{1}$$

где $\rho_{\mathcal{H};k,l}: \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l \to \mathbb{R}$ – непрерывная неотрицательная функция (явное выражение см. в [2]); $d\mathbf{x}d\mathbf{z}$ – элемент объема в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l$; $\zeta(\cdot)$ – дзета-функция Римана; $\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})$ – объем $(n+1)$-мерного «единичного шара».

Функции $\rho_{\mathcal{H};k,l}$ по своему происхождению являются смешанными (k,l)-корреляционными функциями нулей вещественного случайного многочлена, вектор коэффициентов которого равномерно распределен в «единичном шаре» $\mathbb{B}_{\mathcal{H}}$. При фиксированной степени n функции $\rho_{\mathcal{H};k,l}$ сводятся к одной функции $\rho_{\mathcal{H};k+2l}$ (формула (3) ниже). Строгое определение корреляционных функций можно найти в [8, раздел 1.3; 1, раздел 4].

Двухсторонние оценки корреляционных функций. Здесь мы докажем первую основную теорему сообщения. А именно, мы покажем, что при любой высотной функции соответствующая плотность распределения алгебраических точек может быть оценена сверху и снизу (с точностью до постоянных множителей) одной и той же функцией.

Из определения высотной функции несложно вывести, что всякая высота $\mathcal{H}$ сравнима с мерой Малера M, т. е. существуют положительные постоянные α и β (зависящие только от n и самой функции $\mathcal{H}$), такие что для любого многочлена q степени n выполняется

$$\alpha M[q] \le \mathcal{H}[q] \le \beta M[q]. \tag{2}$$

Т е о р е м а 1. *Пусть $\mathcal{H}$ – произвольная высотная функция. Тогда для всех $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_m)$ верно неравенство*

$$\frac{1}{\beta^{n+1}} \frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_M)}{\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})} \rho_{M;m}(\mathbf{z}) \le \rho_{\mathcal{H};m}(\mathbf{z}) \le \frac{1}{\alpha^{n+1}} \frac{\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_M)}{\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})} \rho_{M;m}(\mathbf{z}),$$

где M обозначает меру Малера, а положительные постоянные α и β те же, что и в (2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из (2) сразу получаем неравенство

$$\mathbf{1}\{\beta M[q] \le 1\} \le \mathbf{1}\{\mathcal{H}[q] \le 1\} \le \mathbf{1}\{\alpha M[q] \le 1\},$$

верное на произвольном множестве многочленов q. Подставив это неравенство в (4) (см. лемму 1 ниже) и преобразовав интегралы, получаем теорему 1.

Л е м м а 1. *Пусть коэффициенты ξ_j случайного вещественного многочлена $\sum_{j=0}^{n} \xi_j X^j$ распределены с совместной плотностью $f\left\{\sum_{j=0}^{n} a_j X^j\right\} = f(a_0, \ldots, a_n)$. Тогда смешанные (k,l)-корреляционные функции корней этого многочлена удовлетворяют тождеству*

$$\rho_{k,l}(x_1, \ldots, x_k, z_1, \ldots, z_l) = 2^l \rho_{k+2l}(x_1, \ldots, x_k, z_1, \ldots, z_l, z_1^*, \ldots, z_l^*), \tag{3}$$

где $\rho_m(z_1, \ldots, z_m)$ есть симметричная функция переменных $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_m)$, имеющая вид

$$\rho_m(\mathbf{z}) = \prod_{1 \le i < j \le m} \left|z_i - z_j\right| \times \int\limits_{\mathbb{R}^{n-m+1}} f\left\{\prod_{r=1}^{m}(X - z_r) \sum_{j=0}^{n-m} t_j X^j\right\} \prod_{r=1}^{m} \left|\sum_{j=0}^{n-m} t_j z_r^j\right| dt_0 \ldots dt_{n-m}. \tag{4}$$

При $m = n$ (4) превращается в

$$\rho_n(\mathbf{z}) = \prod_{1 \le i < j \le n} \left|z_i - z_j\right| \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left\{t_0 \prod_{r=1}^{n}(X - z_r)\right\} t_0^n \, dt_0. \tag{5}$$

Чтобы (4) и (5) имели смысл, необходимо, чтобы множество $\{z_1, \ldots, z_m\} \subset \mathbb{C}$ было симметрично относительно вещественной оси.

Лемма 1 соответствует теореме 5.1 из [1], которая была доказана для случая независимо распределенных коэффициентов, т. е. когда совместная плотность распределения коэффициентов имеет вид $f(a_0, \ldots, a_n) = \prod_{j=0}^{n} f_j(a_j)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению [8, раздел 1.3; 1, раздел 4] смешанные корреляционные функции удовлетворяют равенству

$$\mathbb{E}\mu_{k,l}\left(\sum_{j=0}^{n} \xi_j X^j; B\right) = \int_B \rho_{k,l}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{x} d\mathbf{z},$$

где $\mathbb{E}$ обозначает математическое ожидание; $B \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l$ – борелевское множество; $\mu_{k,l}(g; B)$ – количество точек в B, координаты которых суть сопряженные корни многочлена $g \in \mathbb{R}[X]$, т. е.

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \mu_{k,l}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j X^j; B\right) f\left\{\sum_{j=0}^{n} a_j X^j\right\} da_0 da_1 \ldots da_n = \int_B \rho_{k,l}(\mathbf{x}, \mathbf{z}) d\mathbf{x} d\mathbf{z}.$$

Заменяя в интеграле в левой части переменные по лемме из [2, с. 522], получаем лемму 1.

Заметим, что приведенные в [2] выражения для функции $\rho_{\mathcal{H};k,l}$ получаются, когда вектор коэффициентов равномерно распределен в $\mathbb{B}_{\mathcal{H}}$, т. е. с совместной плотностью

$$f_{\mathcal{H}}(a_0, \ldots, a_n) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})} \mathbf{1}\left\{\mathcal{H}\left[\sum_{j=0}^{n} a_j X^j\right] \leq 1\right\}. \tag{6}$$

Выбор меры Малера M в качестве «эталона» обусловлен относительной простотой выражения для функции $\rho_{M;m}(\mathbf{z})$, что показывает следующая лемма.

Л е м м а 2. *Для меры Малера M имеем*

$$\rho_{M;m}(\mathbf{z}) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_M)} \times \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq m} |z_i - z_j|}{\left[\prod_{i=1}^{m} \max\{1, |z_i|\}\right]^{n+1}} \times \int_{\widetilde{D}_{n-m}} \prod_{i=1}^{m} \left|\sum_{j=0}^{n-m} \tilde{t}_j z_i^j\right| d\tilde{t}_0 \ldots d\tilde{t}_{n-m}, \tag{7}$$

где область интегрирования

$$\widetilde{D}_r := \left\{(\tilde{t}_0, \ldots, \tilde{t}_r) \in \mathbb{R}^{r+1} : M\left[\sum_{j=0}^{r} \tilde{t}_j X^j\right] \leq 1\right\}, \quad r = n - m. \tag{8}$$

В частности, при $m = n$

$$\rho_{M;n}(\mathbf{z}) = \frac{2}{(n+1)\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_M)} \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|\right) \left(\prod_{i=1}^{n} \max\{1, |z_i|\}\right)^{-n-1}.$$

Замечательной особенностью формулы (7) является то, что область интегрирования (8) не зависит от переменных $z_1, \ldots, z_m$ в отличие от случая произвольной высоты $\mathcal{H}$. Тем самым значительно упрощается оценка асимптотики интеграла (7) при больших значениях $|z_i|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если в качестве высотной функции $\mathcal{H}$ взять меру Малера M, выражение (4) (с плотностью распределения (6) для $\mathcal{H} = M$) может быть преобразовано так, чтобы область интегрирования не зависела от $z_1, \ldots, z_m$. Обозначив

$$\mu := M\left[\prod_{k=1}^{m} (X - z_k)\right] = \prod_{k=1}^{m} \max\{1, |z_k|\},$$

по свойствам меры Малера получаем

$$M\left[\prod_{k=1}^{m}(X-z_k)\sum_{j=0}^{n-m}t_jX^j\right]=\mu M\left[\sum_{j=0}^{n-m}t_jX^j\right]=M\left[\sum_{j=0}^{n-m}\mu t_jX^j\right].$$

Заменив переменные $\tilde{t}_j:=\mu t_j$, после преобразований получаем лемму 2.

Построение высоты по совместному распределению коэффициентов. Эта часть посвящена доказательству второго основного результата сообщения.

Т е о р е м а 2. *Многочлен, вектор коэффициентов которого распределен с совместной плотностью* $f(a_0,\dots,a_n)$, *и многочлен, вектор коэффициентов которого равномерно распределен в «единичном шаре»* $\mathbb{B}_{\mathcal{H}}$, *будут иметь одинаковое распределение корней, если и только если высотная функция* $\mathcal{H}$ *и плотность* f *связаны равенством*

$$\mathcal{H}[\sigma]\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})^{\frac{1}{n+1}}=\left[\frac{n+1}{2}\int_0^\infty[f(r\sigma)+f(-r\sigma)]r^n dr\right]^{-\frac{1}{n+1}}$$

в любой точке $\sigma=(\sigma_0,\dots,\sigma_n)$ *на единичной сфере* S^n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дальнейшее рассуждение основано на простом факте: два случайных многочлена будут иметь одинаковые распределения корней, если и только если эти многочлены дают одинаковые распределения в проективном пространстве $\mathbb{R}P^n$, состоящем из точек $[a_0:\ldots:a_n]$, где однородными координатами служат коэфициенты многочлена.

В качестве модели проективного пространства $\mathbb{R}P^n$ нам будет удобна единичная сфера S^n, у которой противоположные точки σ и $-\sigma$ отождествлены. При этом любое множество $\Omega\subset S^n$, такое что $\Omega\cap(-\Omega)=\varnothing$, можно считать множеством в $\mathbb{R}P^n$. Таким образом, вероятность того, что случайный многочлен $\sum_{j=0}^{n}a_jX^j$ с совместной плотностью распределения коэффициентов $f(a_0,\dots,a_n)$ будет соответствовать проективной точке $\sigma=[a_0:\ldots:a_n]\in\Omega$, равна

$$\int_{\Omega}d\sigma\int_0^\infty f(r\sigma)r^n dr+\int_{-\Omega}d\sigma\int_0^\infty f(r\sigma)r^n dr=\int_{\Omega}d\sigma\int_0^\infty[f(r\sigma)+f(-r\sigma)]r^n dr.$$

Здесь $d\sigma$ – элемент площади на единичной сфере S^n, который также можно рассматривать как элемент объема в $\mathbb{R}P^n$. Для справки заметим, что при таком определении меры на $\mathbb{R}P^n$ мы имеем

$$\int_{\mathbb{R}P^n}d\sigma=\frac{1}{2}\int_{S^n}d\sigma=\frac{\pi^{\frac{n+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Таким образом, плотность распределения f_{pr} в пространстве $\mathbb{R}P^n$, заданном как S^n с отождествленными противоположными точками, получается равной

$$f_{\mathrm{pr}}(\sigma)=\int_0^\infty[f(r\sigma)+f(-r\sigma)]r^n dr. \tag{9}$$

Теперь свяжем это с высотой. Рассмотрим частный случай, когда вектор коэффициентов $(a_0,\dots,a_n)$ равномерно распределен в «единичном шаре» $\mathbb{B}_{\mathcal{H}}$, т. е. имеет плотность распределения (6). Переходя к сферическим координатам и учитывая свойства высотной функции $\mathcal{H}$, получаем

$$f_{\mathcal{H}}(r\sigma)=\frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})}\mathbf{1}\{r\mathcal{H}[\sigma]\le 1\}=\frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})}\mathbf{1}\left\{r\le\frac{1}{\mathcal{H}[\sigma]}\right\}.$$

В итоге, в проективном пространстве $\mathbb{R}P^n$ получаем плотность

$$f_{\mathcal{H};\mathrm{pr}}(\sigma) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})}\int_0^{\infty}\left[\mathbf{1}\left\{r \le \frac{1}{\mathcal{H}[\sigma]}\right\} + \mathbf{1}\left\{r \le \frac{1}{\mathcal{H}[-\sigma]}\right\}\right] r^n dr =$$
$$= \frac{1}{(n+1)\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})}\left[\frac{1}{\mathcal{H}[\sigma]^{n+1}} + \frac{1}{\mathcal{H}[-\sigma]^{n+1}}\right] = \frac{2}{n+1}\frac{1}{\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})\mathcal{H}[\sigma]^{n+1}}. \tag{10}$$

Приравнивая выражения (9) и (10) и выражая высотную функцию, получаем теорему 2.

Произведение $\mathcal{H}[\sigma]\mathrm{Vol}(\mathbb{B}_{\mathcal{H}})^{\frac{1}{n+1}}$ показывает, что высотная функция определена с точностью до постоянного ненулевого множителя. Отметим, что построенная таким образом функция $\mathcal{H}$ будет высотой в смысле приведенного выше определения, если и только если функция (9) непрерывна и положительна во всех точках $\sigma \in S^n$.

Заключение. Для совместной плотности распределения сопряженных алгебраических чисел фиксированной степени при произвольной высотной функции получены верхняя и нижняя оценки, отличающиеся на постоянный множитель и верные во всех точках пространства. Показано, как по произвольному совместному непрерывному распределению коэффициентов построить высотную функцию, относительно которой корни многочленов были бы распределены так же, как и у исходного случайного многочлена.

Список использованных источников

1. Götze, F. Joint distribution of conjugate algebraic numbers: a random polynomial approach / F. Götze, D. Koleda, D. Zaporozhets // Adv. Math. – 2020. – Vol. 359. – Art. 106849. https://doi.org/10.1016/j.aim.2019.106849

2. Коледа, Д. В. Об алгебраических точках фиксированной степени и ограниченной высоты / Д. В. Коледа // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2021. – Т. 65, № 5. – С. 519–525. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-5-519-525

3. Chern, S.-J. The distribution of values of Mahler's measure / S.-J. Chern, J. D. Vaaler // J. Reine Angew. Math. – 2001. – Vol. 2001, N 540. – P. 1–47. https://doi.org/10.1515/crll.2001.084

4. Masser, D. Counting algebraic numbers with large height. I / D. Masser, J. D. Vaaler // Diophantine approximation. – Vienna: Springer-Verlag Wien, 2008. – Vol. 16. – P. 237–243. https://doi.org/10.1007/978-3-211-74280-8_14

5. Grizzard, R. Slicing the stars: counting algebraic numbers, integers, and units by degree and height / R. Grizzard, J. Gunther // Algebra and Number Theory. – 2017. – Vol. 11, N 6. – P. 1385–1436. https://doi.org/10.2140/ant.2017.11.1385

6. Bernik, V. I. On the distribution of points with algebraically conjugate coordinates in a neighborhood of smooth curves / V. I. Bernik, F. Götze, A. G. Gusakova // Зап. научн. сем. ПОМИ. – СПб., 2016. – Т. 448. – С. 14–47.

7. Бударина, Н. В. Оценки снизу для количества векторов с алгебраическими координатами вблизи гладких поверхностей / Н. В. Бударина, Д. Диккинсон, В. И. Берник // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2020. – Т. 64, № 1. – С. 7–12. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-1-7-12

8. Tao, T. Local universality of zeroes of random polynomials / T. Tao, V. Vu // Int. Math. Res. Not. – 2015. – Vol. 2015, N 13. – P. 5053–5139. https://doi.org/10.1093/imrn/rnu084

References

1. Götze F., Koleda D., Zaporozhets D. Joint distribution of conjugate algebraic numbers: a random polynomial approach. *Advances in Mathematics*, 2020, vol. 359, art. 106849. https://doi.org/10.1016/j.aim.2019.106849

2. Koleda D. V. On algebraic points of fixed degree and bounded height. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2021, vol. 65, no. 5, pp. 519–525 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-5-519-525

3. Chern S.-J., Vaaler J. D. The distribution of values of Mahler's measure. *Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 2001, vol. 2001, no. 540, pp. 1–47. https://doi.org/10.1515/crll.2001.084

4. Masser D., Vaaler J. D. Counting algebraic numbers with large height. I. *Diophantine approximation*. Vienna, Springer-Verlag Wien, 2008, pp. 237–243. https://doi.org/10.1007/978-3-211-74280-8_14

5. Grizzard R., Gunther J. Slicing the stars: counting algebraic numbers, integers, and units by degree and height. *Algebra and Number Theory*, 2017, vol. 11, no. 6, pp. 1385–1436. https://doi.org/10.2140/ant.2017.11.1385

6. Bernik V., Götze F., Gusakova A. On the distribution of points with algebraically conjugate coordinates in a neighborhood of smooth curves. *Journal of Mathematical Sciences*, 2017, vol. 224, no. 2, pp. 176–198. https://doi.org/10.1007/s10958-017-3404-6

7. Budarina N. V., Dickinson D., Bernik V. I. Lower bounds for the number of vectors with algebraic coordinates near smooth surfaces. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2020, vol. 64, no. 1, pp. 7–12 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-1-7-12

8. Tao T., Vu V. Local universality of zeroes of random polynomials. *International Mathematics Research Notices*, 2015, vol. 2015, no. 13, pp. 5053–5139. https://doi.org/10.1093/imrn/rnu084

Информация об авторе

Коледа Денис Владимирович – канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: koledad@rambler.ru.

Information about the author

Koleda Denis V. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: koledad@rambler.ru.