ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 519.2.681.3:004.056.5
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-6-654-660

Поступило в редакцию 13.10.2021
Received 13.10.2021

Член-корреспондент Ю. С. Харин

Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Республика Беларусь

НЕЙРОСЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ БИНОМИАЛЬНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА ДАННЫХ

Аннотация. В данном сообщении рассматриваются задачи построения нейросетевых моделей дискретных временных рядов и использования их для компьютерного анализа данных. Представлено новое семейство нейросетевых моделей дискретных временных рядов, позволяющих аппроксимировать любой тип стохастической зависимости состояний временного ряда от его предыстории. Установлены условия эргодичности и отношение эквивалентности для этих моделей. Построены состоятельные статистические оценки параметров моделей и алгоритмы компьютерного анализа данных с использованием нейросетевых моделей: алгоритмы оценивания параметров, прогнозирования и распознавания образов.

Ключевые слова: дискретный временной ряд, цепь Маркова, нейросетевая модель, оценки параметров, анализ данных

Для цитирования. Харин, Ю. С. Нейросетевые модели биномиальных временных рядов в задачах анализа данных / Ю. С. Харин // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2021. – Т. 65, № 6. – С. 654–660. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-6-654-660

Corresponding Member Yuriy S. Kharin

Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

NEURAL NETWORK-BASED MODELS OF BINOMIAL TIME SERIES IN DATA ANALYSIS PROBLEMS

Abstract. This article is devoted to constructing neural network-based models for discrete-valued time series and their use in computer data analysis. A new family of binomial time series based on neural networks is presented, which makes it possible to approximate the arbitrary-type stochastic dependence in time series. Ergodicity conditions and an equivalence relation for these models are determined. Consistent statistical estimators for model parameters and algorithms for computer data analysis (including forecasting and pattern recognition) are developed.

Keywords: discrete-valued time series, Markov chain, neural networks-based model, estimators, data analysis

For citation. Kharin Yu. S. Neural network-based models of binomial time series in data analysis problems. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2021, vol. 65, no. 6, pp. 654–660 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-6-654-660

Введение. Анализ данных – это область математики и информатики, занимающаяся построением и исследованием математических методов и компьютерных алгоритмов извлечения знаний из экспериментальных (в широком смысле) данных. Это научное направление, на котором базируются информационные технологии, в последние годы интенсивно развивается в мире и за рубежом называется Data Science [1; 2]. На практике одним из важных классов данных являются временные ряды – упорядоченные по времени t последовательности наблюдений $\{x_t : t = 1, 2, \ldots\}$ за некоторым явлением или процессом. Анализ временных рядов глубоко исследован для «непрерывных» данных $x_t \in R^K$. В настоящее время в связи с цифровизацией экономики и всей человеческой деятельности регистрируются дискретные временные ряды (ДВР) $x_t \in A$, где пространство наблюдений A есть некоторое дискретное множество мощности $N = |A|$. Области практического применения ДВР: защита информации ($N = 2$, двоичные временные ряды); генетика ($N = 4$, генетические символьные последовательности); экономика (финансовые временные ряды); персонализированная медицина (пульсометрические данные) и др. Обзор современного состояния анализа ДВР представлен в [3]. В настоящем сообщении предложено принципиально новое семейство нейросетевых моделей ДВР, установлены его свойства, разработаны алгоритмы статистического анализа (оценивания параметров, прогнозирования и распознавания образов) для таких моделей.

Семейство нейросетевых моделей ДВР. Примем обозначения: Z – множество целых чисел; штрих у матрицы – символ транспонирования; $J_m^n = (j_n, j_{n-1}, \ldots, j_m)' \in A^{n-m+1}$ – вектор-столбец $n-m+1$ элементов последовательности $\ldots, j_{-1}, j_0, j_1, \ldots$ $(n \geq m)$.

Определим на вероятностном пространстве (Ω, F, P) ДВР $x_t \in A$, $t \in Z$, с конечным пространством N состояний:

$$A = \{0, 1, \ldots, N-1\}, \; 2 \leq N < +\infty,$$

порождаемый условными биномиальными распределениями вероятностей:

$$\mathrm{P}\left\{x_t = j_t \,\middle|\, X_{-\infty}^{t-1} = J_{-\infty}^{t-1}\right\} \equiv \mathrm{P}\left\{x_t = j_t \,\middle|\, X_{t-s}^{t-1} = J_{t-s}^{t-1}\right\} = \\ = C_{N-1}^{j_t} p_t^{j_t} (1-p_t)^{N-1-j_t}, \; j_k \in A, \; k \in Z; \tag{1}$$

$$p_t = p(J_{t-s}^{t-1}) = F_0(J_{t-s}^{t-1}), \; t \in Z, \tag{2}$$

где $X_{t-s}^{t-1} = (x_{t-1}, \ldots, x_{t-s})' \in A^s$ – вектор-столбец s-предыстории процесса к моменту времени t; s – глубина предыстории, $1 \leq s < +\infty$; $p_t \in [0,1]$ – параметр биномиального распределения вероятностей; $F_0(\cdot): A^s \to [0,1]$ – некоторая неизвестная «функция обратной связи», задающая зависимость от s-предыстории. В [4] рассмотрен случай базисного представления $F_0(\cdot)$:

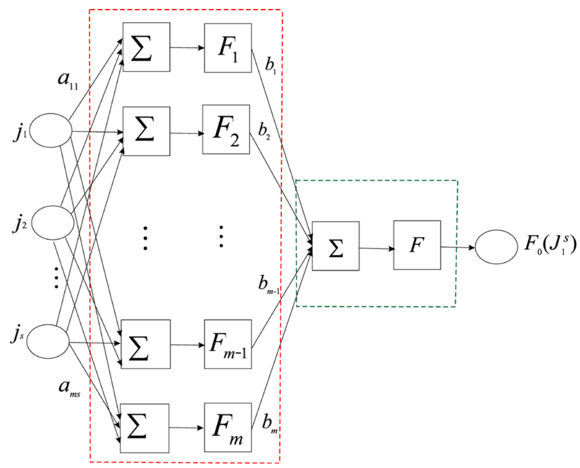
$$F_0(J_{t-s}^{t-1}) ::= F\left(\sum_{i=1}^{m} a_i \psi_i (J_{t-s}^{t-1})\right), \; J_{t-s}^{t-1} \in A^s,$$

где $F(\cdot): R^1 \to [0,1]$ – некоторая абсолютно непрерывная функция распределения; $\{\psi_i(\cdot)\}$ – заданный набор m линейно независимых на A^s базисных функций, $m \leq N^s$; $\{a_i\}$ – неизвестные параметры (коэффициенты) модели. Существенный недостаток этой модели – отсутствие рекомендаций по выбору базиса $\{\psi_i\}$.

Для преодоления указанного недостатка в данном сообщении предлагается аппроксимировать функцию $F_0(\cdot)$ в (2) с помощью двухслойной искусственной нейронной сети (ИНС):

$$F_0(J_1^s) = F\left(\sum_{i=1}^{m} b_i F_i \left(\sum_{k=1}^{s} a_{ik} j_k\right)\right), \; J_1^s \in A^s, \tag{3}$$

где $F(\cdot), F_1(\cdot), \ldots, F_m(\cdot): R^1 \to [0,1]$ – некоторые заданные абсолютно непрерывные функции распределения; параметры модели: $2 \leq m < +\infty$, $B = (b_1, \ldots, b_m)' \in R^m$, $A_i = (a_{i1}, \ldots, a_{is})' \in R^s$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, –



Двухслойная ИНС, реализующая преобразование $F_0(\cdot)$

Two-layers neural network realizing the transformation $F_0(\cdot)$

неизвестные вектор-столбцы коэффициентов. Нелинейная зависимость (3) реализуется двухслойной ИНС (рисунок) с s входами, одним выходом, m нейронами на первом слое и одним нейроном на втором слое.

Общее число параметров нейросетевой модели ДВР (1)–(3) равно $m(s + 1)$ и линейно зависит от глубины памяти s. Заметим, что максимальное число параметров, полностью задающее любую дискретную функцию на A^s, равно N^s, поэтому

$$2 \le m \le m_+ = N^s / (s+1).$$

Отметим еще, что согласно [5; 6] нейросетевая модель (3) обладает свойством универсальности: при увеличении параметра сложности m она позволяет достичь заданной точности аппроксимации любой «функции обратной связи» $F_0(J_1^s)$.

Вероятностные свойства нейросетевой модели.

Т е о р е м а 1. *Если параметры нейросетевой модели (1)–(3) B, A_1, A_2,..., A_m не зависят от t и функция $F(z)$ не обращается в* 0 *или* 1 *при любом конечном $z \in R^1$, то ДВР x_t является эргодической цепью Маркова s-го порядка с* $(s + 1)$*-мерной матрицей вероятностей одношаговых переходов* $\mathrm{P} = (p_{J_1^s, j_{s+1}})$:

$$p_{J_1^s, j_{s+1}} = C_{N-1}^{j_{s+1}} p^{j_{s+1}} (1-p)^{N-1-j_{s+1}}, \ p = F_0(J_1^s), \ J_1^{s+1} \in A^{s+1}.$$

Доказательство основывается на проверке обобщенного марковского свойства и критерия эргодичности цепей Маркова.

Обозначим: $\theta = (B', A_1', \ldots, A_m')' \in R^{m(s+1)}$ – составной вектор-столбец параметров модели;

$$\Theta_\theta = \left\{ \tilde{\theta} = (\tilde{B}', \tilde{A}_1', \ldots, \tilde{A}_m')' : \tilde{B} = (b_{\pi_1}, \ldots, b_{\pi_m})', \ \tilde{A}_1 = A_{\pi_1}, \ldots, \tilde{A}_m = A_{\pi_m}, \right. \tag{4}$$

$\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_m) \in S_m$ – произвольная подстановка на $\{1, 2, \ldots, m\}\}$.

Т е о р е м а 2. *В условиях теоремы 1 нейросетевые модели (1)–(3) с любыми параметрами $\tilde{\theta} \in \Theta_\theta$ эквивалентны этой модели с параметрами* θ.

Доказательство состоит в проверке условия

$$F_0(J_1^s; \tilde{\theta}) \equiv F_0(J_1^s; \theta), \ J_1^s \in A^s.$$

Заметим, что $|\Theta_\theta| = |S_m| = m!$.

Статистическое оценивание параметров нейросетевой модели. Для оценивания параметров B, A_1, A_2, ..., A_m по наблюдаемой реализации $X_1^T = (x_T, \ldots, x_1) \in R^T$ длины T временного ряда, порожденного некоторой неизвестной нейросетевой моделью из семейства (1)–(3), применим разработанный нами ранее FBE-метод (Frequencies Based Estimation) – метод, основанный на многомерных частотах [4].

Обозначим: $F^{-1}(\cdot)$ – квантильная функция для функции распределения $F(\cdot)$; $J = (j_1, \ldots, j_s) \in A^s$; $\mathbf{1}(C)$ – индикаторная функция события C; m – вектор-столбец

$$G = (g_k) = G(A_1, \ldots, A_m; J) = (F_1(A_1'J), \ldots, F_m(A_m'J))' \in R^m.$$

Согласно (2), (3) имеем соотношение

$$F^{-1}(p(J)) = B'G. \tag{5}$$

Используя свойство математического ожидания для биномиального распределения вероятностей (1):

$$\mathrm{E}\{x_t \,|\, X_{t-s}^{t-1} = J\} = (N-1)p(J),$$

построим по наблюдаемой реализации X_1^T частотную оценку для $p(J)$:

$$\hat{p}(J) = \frac{1}{N-1}\sum_{t=s+1}^{T} x_t \mathbf{1}\{X_{t-s}^{t-1} = J\} \Big/ \sum_{t=s+1}^{T} \mathbf{1}\{X_{t-s}^{t-1} = J\}, \quad (6)$$

$$J \in J^{(T)} ::= \left\{ \mathrm{I} \in A^s : \sum_{t=s+1}^{T} \mathbf{1}\{X_{t-s}^{t-1} = \mathrm{I}\} > 0 \right\}. \quad (7)$$

Заметим, что в силу теоремы 1 при $T \to +\infty$ имеет место сходимость почти наверное ($\mathrm{P} = 1$):

$$J^{(T)} \xrightarrow{\text{п.н.}} A^s.$$

Подставляя (6), (7) в (5) вместо $p(J)$ получим систему $\left|J^{(T)}\right|$ уравнений относительно неизвестных B, $\{A_i\}$ со случайной правой частью:

$$B'G(\{A_i\}; J) = u(J), \; J \in J^{(T)}, \quad (8)$$

где случайная величина

$$u(J) = F^{-1}(\hat{p}(J)). \quad (9)$$

Согласно FBE-методу [4] определим квадратичную функцию потерь как уклонение между левыми и правыми частями уравнений системы (8):

$$w = w(B, \{A_i\}) ::= \sum_{J \in J^{(T)}} (B'G - u(J))^2 \geq 0,$$

и построим статистические оценки $\hat{B}$, $\{\hat{A}_i\}$, минимизирующие эту функцию потерь:

$$w(B, \{A_i\}) \to \min_{B, \{A_i\}}. \quad (10)$$

Примем обозначения: δ_{kl} – символ Кронеккера; $O_m \in R^m$ – нулевой вектор; $f_i(z) = F_i'(z) \geq 0$; $D = (d_{kl}) = \sum_{J \in J^{(T)}} GG' \in R^{m \times m}$; $D^{-1} = (\bar{d}_{kl}) \in R^{m \times m}$ – симметричные неотрицательно определенные $(m \times m)$-матрицы; $E = (e_k) = \sum_{J \in J^{(T)}} u(J)G(\{A_i\}; J) \in R^m$ – случайный m-вектор-столбец.

Л е м м а 1. *Если определитель $|D| \neq 0$, то при фиксированных $\{A_i\}$ минимум функции потерь по B в (10) достигается в единственной точке*

$$\hat{B} = (\hat{b}_i) = D^{-1}E \quad (11)$$

и равен

$$w_1(\{A_i\}) ::= w(\hat{B}, \{A_i\}) = \sum_{J \in J^{(T)}} u^2(J) - E'D^{-1}E. \quad (12)$$

Т е о р е м а 3. *Если истинные значения $\{A_i^0\}$ известны и ДВР x_t, определяемый (1)–(3), эргодичен, то при увеличении длительности наблюдения $T \to +\infty$ оценка $\hat{B}$ из леммы 1 сходится к истинному значению B^0 по вероятности:*

$$\hat{B} \xrightarrow{\mathrm{P}} B^0.$$

Для построения оценок $\{\hat{A}_i\}$ с учетом (10), (12) приходим к задаче максимизации:

$$w_2(\{A_i\}) ::= E'D^{-1}E \to \max_{\{A_i\}}. \quad (13)$$

Исследуем дифференциальные свойства этой целевой функции (13).

Л е м м а 2. *В принятых обозначениях справедливы следующие соотношения* ($i, k, l, q, r \in \{1, \ldots, m\}$, $v \in \{1, \ldots, s\}$):

$$\frac{\partial e_k}{\partial a_{i\nu}} = \delta_{ik} \sum_{J=(j_1,\ldots,j_s)\in J^{(T)}} u(J) f_i(A_i'J) j_\nu;$$

$$\frac{\partial d_{qr}}{\partial a_{i\nu}} = \sum_{J\in J^{(T)}} f_i(A_i'J)(\delta_{iq}F_r(A_r'J) + \delta_{ir}F_q(A_q'J)) j_\nu;$$

$$\frac{\partial \bar{d}_{kl}}{\partial d_{qr}} = -\bar{d}_{kq}\bar{d}_{rl}.$$

Л е м м а 3. *В принятых обозначениях частные производные первого порядка целевой функции (13) вычисляются по формулам* ($i \in \{1,\ldots,m\}$, $\nu \in \{1,\ldots,s\}$):

$$\frac{\partial w_2(\{A_k\})}{\partial a_{i\nu}} = 2\hat{b}_i \sum_{J\in J^{(T)}} j_\nu f_i(A_i'J)(u(J) - \hat{B}'G(\{A_k\};J)),$$

где $\hat{B}$ *определена формулой (11).*

Лемма 3 дает явный вид всех частных производных первого порядка по элементам матриц $\{A_i\}$, поэтому для максимизации целевой функции (13) можно применить градиентный метод наискорейшего подъема ($\tau = 1, 2, \ldots$):

$$\hat{A}_i^{(\tau)} = \hat{A}_i^{(\tau-1)} + \lambda V_i^{(\tau)},\ i = 1,\ldots,m,$$

$$V_i^{(\tau)} = (v_{i\nu}^{(\tau)}),\ v_{i\nu}^{(\tau)} = 2\hat{b}_i^{(\tau-1)} \sum_{J\in J^{(T)}} j_\nu f_i(\hat{A}_i^{(\tau-1)'}J)(u(J) - \hat{B}^{(\tau-1)'}G(\{\hat{A}_k^{(\tau-1)}\};J)),\ \nu = 1,\ldots,s, \quad (14)$$

где $\hat{A}_i^{(\tau)} = (\hat{a}_{i\nu}^{(\tau)})$ – оценка вектора A_i на τ-й итерации: $\{A_i^{(0)}\}$ – задаваемые начальные значения; $\lambda > 0$ – задаваемая величина шага. Для нахождения глобального максимума в (13) целесообразно задавать случайным образом несколько начальных значений $\{A_i^{(0)}\}$.

Т е о р е м а 4. *В условиях теоремы 1, если* $|D| \neq 0$, *то составной вектор-столбец построенных согласно (11), (14) оценок* $\hat{\theta} = (\hat{B}', \hat{A}_1', \ldots, \hat{A}_m')' \in R^{m(s+1)}$ *при* $T \to +\infty$ *сходится по вероятности:*

$$\hat{\theta} \xrightarrow{P} \theta^*,$$

где θ^* *– некоторая точка из множества* Θ_{θ^0}, *определенного формулой (4).*

Эта теорема показывает, что в силу специального свойства нейросетевой модели, указанного в теореме 2, построенная оценка $\hat{\theta}$ совпадает с истинным значением $\theta^0 = (B^{0'}, A_1^{0'}, \ldots, A_m^{0'})'$ с точностью до отношения эквивалентности.

Алгоритмы компьютерного анализа данных на основе нейросетевых моделей. Практическая значимость разработанных в данном сообщении семейства нейросетевых моделей и оценок их параметров состоит в том, что на основе теоретических результатов построены используемые на практике алгоритмы компьютерного анализа дискретных временных рядов: «подгонки» модели к реальным данным, прогнозирования будущих значений, распознавания образов.

1. *Алгоритм оценивания параметров.* Он определяется соотношениями (9), (11), (14) и позволяет построить адекватную нейросетевую модель вида (1)–(3) для любой наблюдаемой последовательности $x_1, \ldots, x_T \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Вычислительная сложность алгоритма $O(\max(m^2, T))$.

2. *Алгоритм прогнозирования.* Используя оценки $\hat{B}$, $\{\hat{A}_i\}$ из п. 1 и теорему об оптимальном прогнозировании марковских ДВР из [7], подстановочный алгоритм оптимального прогнозирования на один шаг с минимальной вероятностью ошибки определяется явным соотношением

$$\hat{x}_{T+1} = \arg\max_{k\in A}(C_{N-1}^k \hat{p}^k (1-\hat{p})^{N-1-k}), \quad (15)$$

где

$$\hat{p} = \hat{F}_0(X_{T-s+1}^T) = F\left(\sum_{i=1}^m \hat{b}_i F_i\left(\sum_{k=1}^s \hat{a}_{ik} x_{T-s+k}\right)\right). \quad (16)$$

Прогнозирование x_{T+2} осуществляется аналогично (15), только в (16) фрагмент $X_{T-s+1}^{T} = (x_T, \ldots, x_{T-s+2}, x_{T-s+1})'$, заменяется на $(\hat{x}_{T+1}, x_T, \ldots, x_{T-s+2})'$ и т. д.

3. *Алгоритм распознавания образов (классификации).* Если имеется $L \geq 2$ классов ДВР, то для каждого l-го класса ($l \in \{1, \ldots, L\}$) по обучающей выборке в соответствии с п. 1 строится адекватная модель с параметрами $\{\hat{B}^{(l)}, \hat{A}_1^{(l)}, \ldots, \hat{A}^{(l)}\}$. Наблюдаемая реализация ДВР x_1, ..., x_T с минимальной вероятностью ошибки [8] относится в класс номер $l^* \in \{1, \ldots, L\}$, где

$$l^* = \arg \max_{l \in \{1, \ldots, L\}} \ln \left(\pi_l \prod_{t=s+1}^{T} C_{N-1}^{x_t} (\hat{p}_t^{(l)})^{x_t} (1 - \hat{p}_t^{(l)})^{N-1-x_t} \right),$$

$$\hat{p}_t^{(l)} = F\left(\sum_{i=1}^{m} \hat{b}_i^{(l)} F_i \left(\sum_{k=1}^{s} \hat{a}_{ik}^{(l)} x_{t-s+k} \right) \right).$$

Выводы. В сообщении получены следующие основные результаты.

1. Представлено принципиально новое семейство нейросетевых моделей дискретных временных рядов, позволяющее при увеличении параметра m аппроксимировать любой тип зависимости состояний временного ряда от его предыстории.

2. Установлены вероятностные свойства построенного семейства нейросетевых моделей, в том числе условия эргодичности временного ряда и отношение эквивалентности моделей.

3. Построены состоятельные статистические оценки параметров нейросетевой модели и установлена их состоятельность в смысле сходимости по вероятности при увеличении длины наблюдаемого временного ряда.

4. Практическая значимость результатов сообщения состоит в построении алгоритмов компьютерного анализа реальных дискретных временных рядов на практике: «подгонки» модели к реальным данным, прогнозирования будущих значений, распознавания образов.

5. Полученные результаты допускают обобщение для компьютерного анализа дискретных пространственно-временных данных.

Список используемых источников

1. Kellenher, J. D. Data Science / J. D. Kellenher, B. Tiernay. – N. Y., 2021. – 280 p.

2. Statistical foundations of Data Science / J. Fan [et al.]. – N. Y., 2021. – 729 p. https://doi.org/10.1201/9780429096280

3. Statistical analysis of multivariate discrete-valued time series / Yu. S. Kharin [et al.] // Journal of Multivariate Analysis. – 2021. – Vol. 186. – Art. 104805. – 15 p. https://doi.org/10.1016/j.jmva.2021.104805

4. Kharin, Yu. Robust estimation for Binomial conditionally nonlinear autoregressive time series based on multivariate conditional frequencies / Yu. Kharin, V. Voloshko // Journal of Multivariate Analysis. – 2021. – Vol. 185. – Art. 104777. – P. 11–27. https://doi.org/10.1016/j.jmva.2021.104777

5. Колмогоров, А. Н. О представлении непрерывных функций многих переменных суперпозицией функций одной переменной и сложения / А. Н. Колмогоров // Докл. Акад. наук СССР. – 1957. – Т. 114. – С. 953–956.

6. Cybenko, G. Approximation by superpositions of sigmoidal functions / G. Cybenko // Mathematics of Control, Signals, and Systems. – 1989. – Vol. 2, N 4. – P. 303–314. https://doi.org/10.1007/bf02551274

7. Kharin, Yu. Robustness in Statistical Forecasting / Yu. Kharin. – Heidelberg; New York; Dordrecht; London, 2013. – 356 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-00840-0

8. Kharin, Yu. Robustness in Statistical Pattern Recognition / Yu. Kharin. – Dordrecht; Boston; London, 1996. – 302 p. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8630-6

References

1. Kellenher J. D., Tiernay B. *Data Science*. New York, 2021. 280 p.

2. Fan J., Li R., Zhang C. H., Zou H. *Statistical foundations of Data Science*. New York, 2021. 729 p. https://doi.org/10.1201/9780429096280

3. Fokianos K., Fried R., Kharin Yu., Voloshko V. Statistical analysis of multivariate discrete-valued time series. *Journal of Multivariate Analysis*, 2021, vol. 186, art. 104805. 15 p. https://doi.org/10.1016/j.jmva.2021.104805

4. Kharin Yu., Voloshko V. Robust estimation for Binomial conditionally nonlinear autoregressive time series based on multivariate conditional frequencies. *Journal of Multivariate Analysis*, 2021, vol. 185, art. 104777, pp. 11–27. https://doi.org/10.1016/j.jmva.2021.104777

5. Kolmogorov A. N. On representation of continuous functions od many variables by superposition of continuous functions of one variable and addition. *Doklady Akademii Nauk SSSR = Doklady of the Academy of Sciences of SSSR*, 1957, vol. 114, pp. 953–956 (in Russian).

6. Cybenko G. Approximation by superpositions of sigmoidal functions. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*, 1929, vol. 2, no. 4, pp. 303–314. https://doi.org/10.1007/bf02551274

7. Kharin Yu. *Robustness in Statistical Forecasting*. Heidelberg, New York, Dordrecht, London, 2013. 356 p. https://doi.org/10.1007/978-3-319-00840-0

8. Kharin Yu. *Robustness in Statistical Pattern Recognition*. Dordrecht, Boston, London, 1996. 302 p. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8630-6

Информация об авторе

Харин Юрий Семенович – член-корреспондент, д-р физ.-мат. наук, профессор, директор. Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kharin@bsu.by.

Information about the author

Kharin Yuriy S. – Correspondent Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Director. Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., Minsk, 220030, Republic of Belarus). E-mail: kharin@bsu.by.