ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

## *МАТЕМАТИКА*

***MATHEMATICS***

УДК 517.957
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-1-7-11

Поступило в редакцию 24.09.2021
Received 24.09.2021

**Академик В. И. Корзюк[1], Я. В. Рудько[2]**

[1]*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь*
[2]*Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь*

# КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ

**Аннотация.** В данном сообщении рассматривается первая смешанная задача для нелинейного гиперболического уравнения в четверти плоскости, где на нижнем основании задаются условия Коши, а на боковой границе задается условие Дирихле. Решение строится методом характеристик в неявном аналитическом виде как решение интегрального уравнения. Проводится исследование разрешимости интегральных уравнений, гладкости решений и их зависимости от начальных данных. Доказывается единственность и устанавливаются условия, при которых существует кусочно-гладкое и классическое решение смешанной задачи.

**Ключевые слова:** нелинейное уравнение, классическое решение, смешанная задача, метод характеристик

**Для цитирования.** Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для нелинейного уравнения / В. И. Корзюк, Я. В. Рудько // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2022. – Т. 66, № 1. – С. 7–11. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-1-7-11

**Academician Viktor I. Korzyuk[1], Jan V. Rudzko[2]**

[1]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*
[2]*Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus*

## CLASSICAL SOLUTION OF THE MIXED PROBLEM FOR A NONLINEAR EQUATION

**Abstract.** The first mixed problem for a nonlinear equation is considered in the quarter plane. The Cauchy conditions are set at the bottom of the boundary. The Dirichlet condition is set on the left part of the boundary. The solution is constructed using the method of characteristics in an implicit analytical form as a solution of the integral equation. The solvability of these integral equations, the smoothness of the solutions, and their dependence on the initial data are investigated. The uniqueness is proved and the conditions are established, under which there exists a piecewise smooth and classical solution of the first mixed problem.

**Keywords:** nonlinear equation, classical solution, mixed problem, method of characteristics

**For citation.** Korzyuk V. I., Rudzko J. V. Classical solution of the mixed problem for a nonlinear equation. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2022, vol. 66, no. 1, pp. 7–11 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-1-7-11

**Введение.** Строго говоря, все сплошные среды описываются нелинейными уравнениями. Выбор для описания среды линейных или нелинейных уравнений зависит от роли, которую играют нелинейные эффекты, и определяется конкретной физической ситуацией. Например, при описании распространения лазерных импульсов необходимо учитывать зависимость показателя преломления среды от интенсивности электромагнитного поля.

Линеаризация нелинейных уравнений математической физики не всегда ведет к содержательному результату. Может оказаться, что линеаризация имеет смысл, но линейные уравнения сохраняют применимость лишь конечное время. А даже если линеаризация нелинейных уравнений математической физики возможна, с точки зрения физики исключительно важны «существенно нелинейные» решения, качественно отличающиеся от решений линейных уравнений. Такими могут быть стационарные решения солитонного типа, локализованные в одном или нескольких измерениях, или решения типа волновых коллапсов, описывающие самопроизвольную концентрацию энергии в небольших областях пространства. Существенно нелинейными являются и стационарные решения уравнений гидродинамики. Весьма важен вопрос об устойчивости существенно нелинейных решений, в том числе гидродинамических течений и солитонов,

© Корзюк В. И., Рудько Я. В., 2022

который решается либо при помощи линеаризации нелинейных уравнений на фоне изучаемых решений, либо при помощи вариационных оценок [1].

В данном сообщении, используя метод характеристик в сочетании с методом последовательных приближений, который ранее был успешно использован для нахождения слабого решения смешанной задачи для нелинейного уравнения параболического типа [2], мы строим решение первой смешанной задачи для гиперболического нелинейного уравнения второго порядка, доказываем единственность и непрерывную зависимость решения от начальных данных, а также выводим условия, при которых решение смешанной задачи будет классическим.

**Постановка задачи.** В области $Q = (0, \infty) \times (0, \infty)$ двух независимых переменных $(t, x) \in \overline{Q} \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим одномерное нелинейное уравнение

$$\Box u(t, x) - \lambda(t, x) f(t, x, u(t, x)) = F(t, x), \tag{1}$$

где $\Box = \partial_t^2 - a^2 \partial_x^2$ (оператор Д'Аламбера); $a > 0$ (для определенности); $F$ и $\lambda$ – функции, заданные на множестве $\overline{Q}$; $f$ – функция, заданная на множестве $[0, \infty) \times [0, \infty) \times \mathbb{R}$ и удовлетворяющая условию Липшица с постоянной $L$ по третьей переменной, т. е. $\left| f(t, x, z_1) - f(t, x, z_2) \right| \le L \left| z_1 - z_2 \right|$. К уравнению (1) присоединяются начальные условия

$$u(0, x) = \varphi(x), \ \partial_t u(0, x) = \psi(x), \ x \in [0, \infty), \tag{2}$$

и граничное условие

$$Bu(t, 0) = \mu(t), \ t \in [0, \infty), \tag{3}$$

где $\varphi$, $\psi$, $\mu$ – функции, заданные на множестве $[0, \infty)$; $B$ – некоторый оператор (может иметь различный вид), в данной работе будем полагать, что $B = Id$ (тождественный оператор).

П р и м е р. Если в уравнении (1) положить $f(t, x, z) = \sin(z)$, $\lambda \equiv 1$, $F \equiv 0$ и $a = 1$, то получим уравнение синус-Гордона.

**Интегральное уравнение.** Область $Q$ характеристикой $x - at = 0$ разделим на две подобласти $Q^{(j)} = \{(t, x) \mid (-1)^j (at - x) > 0\}$, $j = 1, 2$. В замыкании $\overline{Q^{(j)}}$ каждой из подобластей $Q^{(j)}$ рассмотрим интегральные уравнения

$$u^{(j)}(t, x) = g^{(1,j)}(x - at) + g^{(2)}(x + at) -$$
$$- \frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{x-at} dy \int\limits_{(-1)^j (at-x)}^{x+at} \left[ F\left( \frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2} \right) + \lambda\left( \frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2} \right) \times f\left( \frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}, u^{(j)}\left( \frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2} \right) \right) \right] dz. \tag{4}$$

Определим функцию *u* решения интегральных уравнений (1) на всем замыкании $\overline{Q}$ области $Q$ формулой

$$u(t, x) = u^{(j)}(t, x), \quad (t, x) \in \overline{Q^{(j)}}, \quad j = 1, 2. \tag{5}$$

Т е о р е м а 1. *Функция u принадлежит классу* $C^2(\overline{Q^{(1)}})$, $C^2(\overline{Q^{(2)}})$ *и удовлетворяет уравнению (1) тог-да и только тогда, когда она представима в виде (4), (5) и функции* $g^{(1,1)}$, $g^{(1,2)}$ *и* $g^{(2)}$ *из классов* $C^2(\mathcal{D}(g^{(1,1)}))$, $C^2(\mathcal{D}(g^{(1,2)}))$ *и* $C^2(\mathcal{D}(g^{(2)}))$ *соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u \in C^2(\overline{Q^{(j)}})$, $j = 1, 2$, и удовлетворяет уравнению (4). Сделав невырожденную замену переменных независимых $\xi = x - at$ и $\eta = x + at$ получим новое дифференциальное уравнение $\partial_\xi \partial_\eta u(\xi, \eta) + \frac{1}{4a^2} \lambda\left( \frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2} \right) f\left( \frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2}, u(\xi, \eta) \right) = -\frac{1}{4a^2} F\left( \frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2} \right)$. Его интегрируем дважды. В результате получаем уравнения

$$u^{(j)}(\xi, \eta) = g^{(1,j)}(\xi) + g^{(2)}(\eta) -$$
$$- \frac{1}{4a^2} \int\limits_0^{\xi} dy \int\limits_{(-1)^{j+1}\xi}^{\eta} \left( F\left( \frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2} \right) + \lambda\left( \frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2} \right) f\left( \frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2} \right), u^{(j)}(y, z) \right) dz,$$

$$\left( \frac{\eta - \xi}{2a}, \frac{\eta + \xi}{2} \right) \in \overline{Q^{(j)}}, \ j = 1, 2.$$

Возвращаясь к переменным $t$ и $x$, получаем интегральное уравнение (4). Отсюда также следует принадлежность функций $g^{(1,1)}$, $g^{(1,2)}$ и $g^{(2)}$ классам $C^2(\mathcal{D}(g^{(1,1)}))$, $C^2(\mathcal{D}(g^{(1,2)}))$ и $C^2(\mathcal{D}(g^{(2)}))$ соответственно. Значит, любое решение уравнений (1) является решением уравнения (4). Теперь функцию $u$, определяемую формулами (4), (5), где функции $g^{(1,1)}$, $g^{(1,2)}$ и $g^{(2)}$ из классов $C^2(\mathcal{D}(g^{(1,1)}))$, $C^2(\mathcal{D}(g^{(1,2)}))$ и $C^2(\mathcal{D}(g^{(2)}))$ соответственно, подставляем в уравнение (1). В результате получаем верное равенство. Значит, любое решение уравнений (4) является решением уравнения (1).

Т е о р е м а 2. *Пусть заданы непрерывные функции $g^{(1,1)}$, $g^{(1,2)}$ и $g^{(2)}$. Тогда решения уравнений (4) существуют, единственны и непрерывно зависят от исходных данных.*

Т е о р е м а 3. *Уравнения (4) имеют решения $u^{(j)}$ ( $j=1,2$ ) из класса $C^2(\overline{Q^{(j)}})$, если $F\in C^1(\overline{Q})$, $\lambda\in C^1(\overline{Q})$, $f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $f$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица с постоянной $L$ по третьей переменной, т. е. $\left|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)\right|\le L\left|z_1-z_2\right|$, $g^{(1,j)}\in C^2(\mathcal{D}(g^{(1,j)}))$, $g^{(2)}\in C^2(\mathcal{D}(g^{(2)}))$.*

Для доказательства теорем 2, 3 необходимо воспользоваться методом последовательных приближений аналогично тому, как это было сделано в [3], и применить условие Липшица при вычислении оценок для последовательных приближений.

З а м е ч а н и е. *Условия теоремы 3 могут быть ослаблены: $g^{(1,j)}\in C^1(\mathcal{D}(g^{(1,j)}))$, $g^{(2)}\in C^1(\mathcal{D}(g^{(2)}))$, ( $j=1,2$ ). Но в таком случае функции $u^{(j)}$ будут из класса $C^1(\overline{Q^{(j)}})$.*

**Построение решения смешанной задачи.** Теперь продемонстрируем наш метод решения смешанных задач на примере задачи (1)–(3) при $B=Id$ (тождественный оператор), т. е. условие (3) имеет простой вид $u(t,0)=\mu(t)$ (условие Дирихле).

Функции $g^{(1,1)}$ и $g^{(2)}$ определяем из условий Коши (2). Подставляя соотношение (4) при $j=1$ в условия (2) получим систему относительно функций $g^{(1,1)}$ и $g^{(2)}$

$$u^{(1)}(0,x)=\varphi(x)=g^{(1,1)}(x)+g^{(2)}(x),\ x>0,$$

$$\partial_t u^{(1)}(0,x)=\psi(x)=-aDg^{(1,1)}(x)+aDg^{(2)}(x)-$$

$$-\frac{1}{2a}\int_0^x\left[\lambda\left(\frac{x-y}{2a},\frac{x+y}{2}\right)f\left(\frac{x-y}{2a},\frac{x+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{x-y}{2a},\frac{x+y}{2}\right)\right)+F\left(\frac{x-y}{2a},\frac{x+y}{2}\right)\right]dy,\ x>0.$$

Проинтегрировав второе уравнение от 0 до $x$, получим

$$g^{(1,1)}(x)+g^{(2)}(x)=\varphi(x),\ x>0,$$

$$-g^{(1,1)}(x)+g^{(2)}(x)=\frac{1}{a}\int_0^x\psi(z)dz+\frac{1}{2a^2}\times$$

$$\times\int_0^x dz\int_0^z\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+\lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy+2C,\ x>0.$$

Откуда

$$\begin{gathered}g^{(1,1)}(x)=\frac{\varphi(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(z)dz-C-\frac{1}{4a^2}\times\\ \times\int_0^x dz\int_0^z\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+\lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy,\ x>0,\end{gathered}\tag{6}$$

$$\begin{gathered}g^{(2)}(x)=\frac{\varphi(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_0^x\psi(z)dz+C+\frac{1}{4a^2}\times\\ \times\int_0^x dz\int_0^z\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+\lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy,\ x>0,\end{gathered}\tag{7}$$

где $C$ – произвольная константа из множества действительных чисел. Функцию $g^{(1,2)}$ определяем из граничного условия. Подставляя соотношение (4) при $j=2$ в условия (3) получим уравнение относительно функции $g^{(1,2)}$: $g^{(1,2)}(-at)+g^{(2)}(at)=\mu(t)$. Сделав замену $t=-z/a$, получим $g^{(1,2)}(z)=\mu(-z/a)-g^{(2)}(-z)$. Отсюда

$$g^{(1,2)}(x)=\mu\left(-\frac{x}{a}\right)-\frac{\varphi(-x)}{2}-\frac{1}{2a}\int_0^{-x}\psi(z)dz-C-\frac{1}{4a^2}\times$$
$$\times\int_0^{-x}dz\int_0^z\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+\lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy,\ x<0. \tag{8}$$

Подставив формулы (6)–(8) в исходные интегральные уравнения (4), получим

$$u^{(1)}(t,x)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(z)dz+\frac{1}{4a^2}\int_{x-at}^{x+at}dz\int_{x-at}^{z}\times$$
$$\times\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+\lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy,\ (t,x)\in\overline{Q^{(1)}},$$
$$u^{(2)}(t,x)=\mu\left(t-\frac{x}{a}\right)+\frac{\varphi(x+at)-\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(z)dz- \tag{9}$$
$$-\frac{1}{4a^2}\int_0^{x-at}dy\int_{at-x}^{x+at}\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+\lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(2)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dz+$$
$$+\frac{1}{4a^2}\int_{at-x}^{x+at}dz\int_0^z\left[F\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)+\lambda\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)f\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2},u^{(1)}\left(\frac{z-y}{2a},\frac{z+y}{2}\right)\right)\right]dy,\ (t,x)\in\overline{Q^{(2)}}.$$

Л е м м а. *Пусть выполняются условия* $\lambda\in C^1(\overline{Q})$, $f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F\in C^1(\overline{Q})$, $\varphi\in C^2([0,\infty))$, $\psi\in C^1([0,\infty))$, $\mu\in C^2([0,\infty))$ *и функция f удовлетворяет условию Липшица с постоянной L по третьей переменной, т. е.* $\left|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)\right|\le L\left|z_1-z_2\right|$. *Тогда решения* $u^{(j)}$ ($j=1,2$) *уравнений (9) существует, единственно в классе* $C^2(\overline{Q})$ *и непрерывно зависит от начальных функций* $\varphi$, $\psi$, $\mu$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение данной леммы следует из теоремы 3.

Таким образом, построено кусочно-гладкое решение задачи (1)–(3), которое определяется формулами (8) и (5).

**Анализ решения смешанной задачи.** Чтобы функция *u* принадлежала множеству $C^2(\overline{Q})$, кроме требований гладкости для функций *f*, *F*, $\lambda$, необходимо совпадение на характеристике $x-at$ значений $u^{(j)}(t,x)$ функций $u^{(j)}$ ($j=1,2$) и их производных первого и второго порядков, т. е.

$$\partial_t^k\partial_x^p u^{(1)}(t,x=at)=\partial_t^k\partial_x^p u^{(2)}(t,x=at),\ 0\le k+p\le 2. \tag{10}$$

При $p=k=0$ равенство (10) эквивалентно $\mu(0)=\varphi(0)$. Предельные значения производных первого порядка на характеристике $x-at=0$ совпадают, если выполняется условие

$$\mu'(0)-\psi(0)+\frac{1}{4a}\int_0^{2at}\lambda\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\left[f\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},u^{(2)}\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right)-f\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2},u^{(1)}\left(\frac{z}{2a},\frac{z}{2}\right)\right)\right]dz=0. \tag{11}$$

Теперь, в предположении выполнения равенства (10) при $p=k=0$ и непрерывности функции *f*, равенство (11) будет эквивалентно $\mu'(0)=\psi(0)$. Аналогично, если выполнены условия $\mu(0)=\varphi(0)$ и $\mu'(0)=\psi(0)$, и функция *f* будет непрерывно-дифференцируема, то условие (10) при $p+k=2$ будет эквивалентно выражению $\mu''(0)=\frac{1}{2}\lambda(0,0)(f(0,0,\mu(0))+f(0,0,\varphi(0)))+F(0,0)+a^2\varphi''(0)$. Результат сформулируем в виде теоремы.

Т е о р е м а 4. *Пусть выполняются условия* $\lambda\in C^1(\overline{Q})$, $f\in C^1(\overline{Q}\times\mathbb{R})$, $F\in C^1(\overline{Q})$, $\varphi\in C^2([0,\infty))$, $\psi\in C^1([0,\infty))$, $\mu\in C^2([0,\infty))$, *и функция f удовлетворяет условию Липшица с постоянной L по* *третьей переменной, т. е.* $\left|f(t,x,z_1)-f(t,x,z_2)\right|\le L\left|z_1-z_2\right|$. *Первая смешанная задача (1)–(3) имеет единственное решение и, определенное формулами (5) и (9), из класса* $C^2(\overline{Q})$ *тогда и только тогда, когда* $\mu''(0)=\lambda(0,0)f(0,0,\varphi(0))+F(0,0)+a^2\varphi''(0)$, $\mu'(0)=\psi(0)$ *и* $\mu(0)=\varphi(0)$.

Доказательство теоремы 4 следует из леммы и рассуждений выше.

**Заключение.** В сообщении были сформулированы необходимые и достаточные условия, при выполнении которых существует единственное классическое решение первой смешанной задачи в четверти плоскости для одномерного гиперболического нелинейного уравнения. Показана зависимость гладкости решения от гладкости начальных функций. Одним из важнейших результатов является то, что предложен метод для вывода необходимых и достаточных условий существования классических решений для смешанных задач для нелинейных уравнений. В дальнейшем планируется изучить другие смешанные задачи для нелинейных уравнений.

## Список использованных источников

1. Физическая энциклопедия: в 5 т. / редкол.: А. М. Прохоров (гл. ред.) [и др.]. – М., 1992. – Т. 3. – 642 с.

2. Evans, L. C. Partial differential equations / L. C. Evans. – Providence, R. I., 2010. – 749 p. https://doi.org/10.1090/gsm/019

3. Столярчук, И. И. Классические решения смешанных задач для уравнения Клейна–Гордона–Фока / И. И. Столярчук. – Гродно, 2020. – 124 л.

## References

1. Prokhorov A. M. [et al.], eds. *Physical Encyclopedia: in 5 vol*. Moscow, 1992, vol. 3. 642 p. (in Russian).

2. Evans L. C. *Partial differential equations*. Providence, R. I., 2010. 749 p. https://doi.org/10.1090/gsm/019

3. Staliarchuk I. I. *Classical solutions of the problems for Klein–Gordon–Fock equation.* Hrodna, 2020. 124 p. (in Russian).

## Информация об авторах

*Корзюк Виктор Иванович* – академик, д-р физ.-мат. наук, профессор. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by.

*Рудько Ян Вячеславович* – магистрант. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: janycz@yahoo.com. Orcid: 0000-0002-1482-9106.

## Information about the authors

*Korzyuk Viktor I.* – Academician, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by.

*Rudzko Jan V.* – Master's degree student. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: janycz@yahoo.com. Orcid: 0000-0002-1482-9106.