ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 519.63
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-1-12-20

Поступило в редакцию 08.09.2021
Received 08.09.2021

Хоанг Тхи Киеу Ань[1, 2]

[1]Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь
[2]Университет природных ресурсов и окружающей среды, Хошимин, Вьетнам

КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА–ГОРДОНА

(Представлено членом-корреспондентом П. П. Матусом)

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются компактные разностные схемы порядка $O(|h|^4 + \tau^2)$ для уравнения Клейна–Гордона в многомерном случае. При изучении устойчивости этих разностных схем используется теория операторно-разностных схем А. А. Самарского и доказывается сильная устойчивость разностного решения по отношению к малому возмущению начальных условий, правой части и коэффициентов уравнений. Теоретические результаты подтверждаются тестовыми численными расчетами.

Ключевые слова: компактная разностная схема, многомерное уравнение Клейна–Гордона, априорные оценки, устойчивость, сходимость

Для цитирования. Хоанг Тхи Киеу Ань. Компактные разностные схемы для многомерного уравнения Клейна–Гордона / Хоанг Тхи Киеу Ань // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2022. – Т. 66, № 1. – С. 12–20. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-1-12-20

Hoang Thi Kieu Anh[1, 2]

[1]Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus
[2]Ho Chi Minh City University of Natural Resources and Environment, Vietnam

COMPACT DIFFERENCE SCHEMES FOR MULTIDIMENSIONAL KLEIN–GORDON EQUATIONS

(Communicated by Corresponding Member Petr P. Matus)

Abstract. In this article, we consider a compact difference approximation of the schemes of order $O(|h|^4 + \tau^2)$, $h = (h_1, h_2, ..., h_p)$ for the Klein–Gordon equations in the multidimensional case. In studying the stability of these difference schemes, the theory of operator-difference schemes by A. A. Samarskii is used, and the strong stability of difference schemes is proved with respect to a small perturbation of the initial conditions, the right-hand side and the coefficients of the equations. The theoretical results are confirmed by test numerical calculations.

Keywords: compact difference schemes, multidimentional Klein–Gordon equation, priori estimates, stability, convergence

For citation. Hoang Thi Kieu Anh. Compact difference schemes for multidimensional Klein–Gordon equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2022, vol. 66, no. 1, pp. 12–20 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-1-12-20

Введение. Перспективным направлением разработки высокоточных разностных схем для уравнений гиперболического типа является их поиск среди схем, обладающих минимальным пространственным шаблоном, т. е. среди так называемых компактных схем [1; 2]. Такие схемы строятся и изучаются, например, для двумерных уравнений гиперболического типа в [3] и [4]. Компактные схемы четвертого порядка аппроксимации для волнового уравнения рассматриваются в работах А. А. Злотника [5; 6]. Там доказывается условная устойчивость разностных схем.

В [7] рассматривались трехточечные компактные разностные схемы для уравнения Клейна–Гордона в одномерном случае. Это уравнение, в частности, используется при изучении солитонов и в физике конденсированного вещества [8]. В настоящей работе компактные разностные схемы обобщены на случай многомерного уравнения Клейна–Гордона. Доказана устойчивость по начальным данным, правой части и коэффициентам. Теоретические выводы подтверждаются результатами проведенных тестовых расчетов.

Постановка задачи и разностная схема. Пусть $\overline{G}=\{x=(x_1,...,x_p);\ 0\le x_\alpha\le l_\alpha;\ \alpha=1,...,p\}$ является p-мерным прямоугольным параллелепипедом, Γ – его граница, так что $\overline{G}=G\cup\Gamma$. В цилиндре $\overline{Q}_T=\overline{G}\times[0\le t\le T]$ рассмотрим начально-краевую задачу для многомерного уравнения Клейна–Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha u-mu+f(x,t),\quad m>0,\ (x,t)\in Q_T=G\times[0<t\le T],\tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{G},\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\overline{u}_0(x),\ x\in G,\tag{2}$$

$$u(x,t)=\mu(x,t),\quad x\in\Gamma,\ 0<t\le T,\tag{3}$$

где $L_\alpha u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2},\ \alpha=1,...,p.$

Уравнение Клейна–Гордона (1) является обобщением волнового уравнения и используется для описания быстро движущихся частиц, имеющих массу покоя [7]. Здесь и далее относительно решения дифференциальной задачи будем предполагать, что оно существует, единственно и обладает всеми непрерывными в $\overline{Q}_T$ производными, необходимыми по ходу изложения.

В $\overline{G}$ построим разностную сетку: $\overline{\omega}_h=\{x_i=(i_1h_1,...,i_ph_p);\quad i_\alpha=0,1,...,N_\alpha;\ h_\alpha=l_\alpha/N_\alpha;\ \alpha=1,...,p\}=\omega_h\cup\gamma_h$ и равномерную сетку $\overline{\omega}_\tau=\{t_n=n\tau;\ 0\le n\le N_0;\ \tau=T/N_0\}=\omega_\tau\cup T.$ Сетка $\overline{\omega}_h$ равномерна по каждой из пространственных переменных. Здесь $\gamma_h=\{x_i\in\Gamma\cap\overline{\omega}_h\}$ – множество узлов сетки $\overline{\omega}_h$, которые принадлежат границе Γ. На построенной сетке узлов $\overline{\omega}=\overline{\omega}_h\times\overline{\omega}_\tau$ напишем для исходной задачи (1)–(3) разностную схему

$$y_{\overline{t}t}=\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha y^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)}+\frac{1}{12}\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\ne\beta}}^{p}h_\alpha^2\Lambda_\alpha\Lambda_\beta y-my^*+\varphi,\quad (x,t)\in\omega_h\times\omega_\tau,\tag{4}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\overline{\omega}_h,\quad y_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\omega_h,\tag{5}$$

$$y(x,t)=\mu(x,t),\quad x\in\gamma_h,\quad t\in\omega_\tau,\tag{6}$$

где

$$\Lambda_\alpha y=y_{\overline{x}_\alpha x_\alpha},\quad \varphi=f^*,\quad v^*=v+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{p}h_\alpha^2\Lambda_\alpha v,$$

$$\sigma_\alpha=\sigma-\frac{h_\alpha^2}{12\tau^2},\quad |h|=\sqrt{h_1^2+...+h_p^2},\quad \alpha=1,...,p,$$

$$u_1(x)=\overline{u}_0(x)+\frac{\tau}{2}\left[\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha u(x,0)-mu(x,0)+f(x,0)\right],\quad x\in\omega_h.$$

В работе используются обозначения из [9; 10].

На основе результатов работы А. А. Самарского для многомерного уравнения теплопроводности [11], нетрудно показать, что разностная схема (4)–(6) имеет порядок погрешности аппроксимации $O(|h|^4+\tau^2).$ Для разностного уравнения (4) рассмотрим невязку

$$\psi=-u_{\overline{t}t}+\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha u+\sum_{\alpha=1}^{p}\left(\sigma\tau^2-\frac{h_\alpha^2}{12}\right)\Lambda_\alpha u_{\overline{t}t}+\frac{1}{12}\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha<\beta}}^{p}(h_\alpha^2+h_\beta^2)\Lambda_\alpha\Lambda_\beta u-mu^*+\varphi.$$

Так как $\sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha u=\sum_{\alpha=1}^{p}L_\alpha u+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{p}h_\alpha^2\Lambda_\alpha(u_{\bar{t}t}+mu-f)-\frac{1}{12}\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha<\beta}}^{p}(h_\alpha^2+h_\beta^2)\Lambda_\alpha\Lambda_\beta u+O(|h|^4+\tau^2)$, и, следовательно,

$$\|\psi\|\le M(|h|^4+\tau^2),\qquad M=\text{const}>0. \tag{7}$$

Для погрешности аппроксимации второго начального условия имеет место оценка

$$\left\|\overset{o}{\psi}\right\|=\|u_1-u_t^0\|\le M_1\tau^2,\qquad M_1=\text{const}>0. \tag{8}$$

Итак, разностная схема (4)–(6) аппроксимирует исходную дифференциальную задачу с порядком $O(|h|^4+\tau^2)$.

Устойчивость по начальным данным и правой части. Аналогично случаю $p=1$ [12, с. 527], в двумерном случае $p=2$ мы рассмотрим такую же задачу для возмущения $\bar{y}=\tilde{y}-y$, в которой $\tilde{y}$ – это возмущенное решение, полученное по разностной схеме (4)–(6) с возмущенной правой частью $\tilde{f}$ и возмущенными начальными условиями $\tilde{u}_0$, $\tilde{u}_1$. И тогда для изучения устойчивости по начальным данным и правой части этих схем можно использовать общую теорию операторно-разностных схем А. А. Самарского [12].

Пусть задано вещественное конечномерное гильбертово пространство $H=H_h$, состоящее из сеточных функций, заданных на $\bar{\omega}_h$ и равных нулю на γ_h, со скалярным произведением

$$(u,v)=\sum_{x\in\omega_h}h_1h_2u(x)v(x)=\sum_{i_1=1}^{N_1-1}\sum_{i_2=1}^{N_2-1}h_1h_2u(i_1h_1,i_2h_2)v(i_1h_1,i_2h_2)$$

и нормой $\|y\|=\sqrt{(y,y)}$. Оператор $(A\bar{y})_{i_1i_2}=-\bar{y}_{\bar{x}_1x_1,i_1i_2}-\bar{y}_{\bar{x}_2x_2,i_1i_2}=(A_1\bar{y})_{i_1i_2}+(A_2\bar{y})_{i_1i_2}$ самосопряжен и положителен в H. Норма в энергетическом пространстве H_A имеет вид

$$\|y\|_A=\|y_{\bar{x}_1}]|^2+\|y_{\bar{x}_2}]|^2,$$

где $\|y_{\bar{x}_\alpha}]|=(y_{\bar{x}_\alpha},y_{\bar{x}_\alpha}]^{1/2}=\left(\sum_{i_1=1}^{N_1}\sum_{i_2=1}^{N_2}h_1h_2y_{\bar{x}_\alpha,i_1i_2}\right)^{1/2}$, $\alpha=1,2$.

Задача для возмущения $\bar{y}=\tilde{y}-y$ может быть записана в операторном виде

$$D\bar{y}_{\bar{t}t}+A_0\bar{y}=\bar{\varphi}, \tag{9}$$

$$\bar{y}(0)=\bar{u}_0,\quad \bar{y}_t(0)=\bar{u}_1, \tag{10}$$

в котором

$$D=E+\tau^2(\sigma_1A_1+\sigma_2A_2), \tag{11}$$

$$A_0=A_1+A_2-\frac{h_1^2+h_2^2}{12}A_1A_2+mE-\frac{m}{12}(h_1^2A_1+h_2^2A_2), \tag{12}$$

$$\bar{u}_0=\tilde{u}_0-u_0,\quad \bar{u}_1=\tilde{u}_1-u_1,\quad \bar{\varphi}=\tilde{\varphi}-\varphi.$$

Пусть $\delta=\frac{1}{3}(4\bar{l}+m),\ \bar{l}=\min\left\{\frac{8}{l_1^2},\frac{8}{l_2^2}\right\}$. Так как операторы A_1, A_2 положительны и самосопряжены на H, то $\delta E<A_0^*=A_0$:

$$A_0 = \left(E - \frac{h_1^2}{12}A_1\right)A_2 + \left(E - \frac{h_2^2}{12}A_2\right)A_1 + mE - \frac{m}{12}(h_1^2 A_1 + h_2^2 A_2) \geq$$
$$\geq \frac{2}{3}(A_1 + A_2) + \frac{m}{3}E \geq \delta E.$$

Для получения априорных оценок разностного решения воспользуемся следующим утверждением.

Л е м м а 1 [9, с. 373]. *Пусть в канонической форме (9), (10) операторы* D, A_0 *являются постоянными, положительными и самосопряженными в H, выполнено неравенство*

$$D \geq \frac{1+\varepsilon}{4}\tau^2 A_0, \quad \varepsilon > 0 - \text{любое число.} \tag{13}$$

Тогда для решения схемы (9), (10) имеет место априорная оценка

$$\left\|\bar{y}^{n+1}\right\|_D \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\left\|\bar{y}(0)\right\|_D + \left\|D\bar{y}_t(0)\right\|_{A_0^{-1}} + \sum_{s=1}^{n}\tau\left\|\bar{\varphi}_s\right\|_{A_0^{-1}}\right). \tag{14}$$

В частности, для

$$D \geq E, \quad A_0^{-1} \leq \frac{1}{\delta}E,$$

оценка (14) примет вид

$$\left\|\bar{y}^{n+1}\right\| \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\left\|\bar{y}(0)\right\|_D + \frac{1}{\delta}\left\|D\bar{y}_t(0)\right\| + \frac{1}{\delta}\sum_{s=1}^{n}\tau\left\|\bar{\varphi}_s\right\|\right), \tag{15}$$

где $\|v\|_D^2 = (Dv, v), \ v \in H.$

Очевидно, что при условиях

$$\frac{1+\varepsilon}{4} + \frac{|h|^2}{12\tau^2} \leq \sigma \leq 1, \quad \tau \leq \tau_0, \quad \tau_0 = \frac{2}{\sqrt{(1+\varepsilon)m}} \tag{16}$$

$E < D^* = D$ и неравенство (13) выполнено. В самом деле, подставим в (13) выражения (11), (12):

$$D - \frac{1+\varepsilon}{4}\tau^2 A_0 = \left(1 - \frac{1+\varepsilon}{4}m\tau^2\right)E + \tau^2\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\sigma_\alpha - \frac{1+\varepsilon}{4}\right)A_\alpha + \frac{1+\varepsilon}{4}\tau^2\left(\frac{h_1^2 + h_2^2}{12}A_1A_2 + \frac{m}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}h_\alpha^2 A_\alpha\right).$$

В силу положительности операторов A_1, A_2 условие (13) выполнено, т. е. $D - \frac{1+\varepsilon}{4}\tau^2 A_0 \geq 0,$ если $1 - \frac{1+\varepsilon}{4}m\tau^2 \geq 0$ и $\sigma_\alpha - \frac{1+\varepsilon}{4} \geq 0, \quad \alpha = 1, 2.$ Это приводит к условиям (16). Тогда можно воспользоваться оценкой (15) для априорной оценки разностного решения задачи (9), (10).

Итак, имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены следующие условия*

$$\frac{1+\varepsilon}{4} + \frac{|h|^2}{12\tau^2} \leq \sigma \leq 1, \quad \tau \leq \tau_0, \quad \tau_0 = \frac{2}{\sqrt{(1+\varepsilon)m}}. \tag{17}$$

Тогда решение разностной схемы (9), (10) устойчиво по начальным данным, правой части и для его решения имеет место априорная оценка

$$\left\|\bar{y}^{n+1}\right\| \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\left\|\bar{u}_0\right\|_D + \frac{1}{\delta}\left\|D\bar{u}_1\right\| + \frac{1}{\delta}\sum_{s=1}^{n}\tau\left\|\bar{\varphi}_s\right\|\right), \ \forall n = 0, 1, ..., N_0 - 1. \tag{18}$$

З а м е ч а н и е 1. В трехмерном случае $p=3$ при выполнении условия (17) разностные схемы (9) и (10) устойчивы по начальным данным, правой части и справедлива оценка

$$\left\|\overline{y}^{n+1}\right\| \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\left\|\overline{u}_0\right\|_D + \frac{1}{\delta_1}\left\|D\overline{u}_1\right\| + \frac{1}{\delta_1}\sum_{s=1}^{n}\tau\left\|\overline{\varphi}_s\right\|\right), \;\; \forall n = 0, 1, ..., N_0 - 1,$$

где $\delta_1 = 8\overline{l}_1, \quad \overline{l}_1 = \min\left\{\frac{1}{l_1^2}, \frac{1}{l_2^2}, \frac{1}{l_3^2}\right\}.$

Сильная устойчивость. При исследовании корректности начально-краевых задач для нестационарных уравнений математической физики основное внимание уделяется устойчивости решения по начальным данным и правой части. В более общей ситуации необходимо требовать непрерывную зависимость и от возмущения операторов задачи, например, от коэффициентов уравнения. В этом случае говорят о сильной устойчивости. В этой работе исследуется сильная устойчивость разностных схем, когда имеет место возмущение коэффициента $\tilde{m}$:

$$\tilde{y}_{\overline{t}t} = \sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha \tilde{y}^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)} + \frac{1}{12}\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\neq\beta}}^{p} h_\alpha^2 \Lambda_\alpha\Lambda_\beta \tilde{y} - \tilde{m}\tilde{y}^* + \tilde{\varphi}, \quad (x,t)\in\omega_h\times\omega_\tau, \tag{19}$$

$$\tilde{y}(x,0) = \tilde{u}_0(x), \quad x\in\overline{\omega}_h, \quad \tilde{y}_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \quad x\in\omega_h, \tag{20}$$

$$\tilde{y}(x,t) = \mu(x,t), \quad x\in\gamma_h, \quad t\in\omega_\tau. \tag{21}$$

Вычитая из уравнений (19)–(21) соответствующие уравнения (4)–(6), получим задачу

$$D\overline{y}_{\overline{t}t} + \tilde{A}_0\overline{y} = \overline{\varphi} - (\tilde{A}_0 - A_0)y,$$

$$\overline{y}(0) = \overline{u}_0, \quad \overline{y}_t(0) = \overline{u}_1,$$

$$D = E + \tau^2(\sigma_1 A_1 + \sigma_2 A_2), \;\; \tilde{A}_0 = A_1 + A_2 - \frac{h_1^2 + h_2^2}{12}A_1A_2 + \tilde{m}E - \frac{\tilde{m}}{12}(h_1^2 A_1 + h_2^2 A_2).$$

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены следующие соотношения*

$$\frac{1+\varepsilon}{4} + \frac{|h|^2}{12\tau^2} \leq \sigma \leq 1, \quad \tau\leq\tau_0, \quad \tau_0 = \frac{2}{\sqrt{(1+\varepsilon)\overline{m}}}, \quad \overline{m} = \max\{m, \tilde{m}\}. \tag{22}$$

Тогда решение разностной схемы (4)–(6) сильно устойчиво и для ее возмущения $\overline{y} = \tilde{y} - y$ *имеет место априорная оценка*

$$\left\|\tilde{y}^{n+1} - y^{n+1}\right\| \leq \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\left\{\left\|\tilde{u}_0 - u_0\right\|_D + \frac{1}{\tilde{\delta}}\left\|D(\tilde{u}_1 - u_1)\right\| + \frac{1}{\tilde{\delta}}\sum_{s=1}^{n}\tau\left(\left\|\tilde{\varphi}_s - \varphi_s\right\| + \frac{1}{3}|\tilde{m} - m|k_s\right)\right\},$$

$$n = 0, 1, ..., N_0 - 1.$$

Здесь $k_s = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\left\|u_0\right\|_D + \frac{1}{\delta}\left\|Du_1\right\| + \frac{1}{\delta}\sum_{r=1}^{n}\tau\left\|\varphi_r\right\|\right), \quad \tilde{\delta} = \frac{1}{3}(4\overline{l} + \tilde{m}).$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно показать, что $\tilde{\delta}E = \frac{1}{3}(4\overline{l} + \tilde{m})E \leq \tilde{A}_0 = \tilde{A}_0^*$. Кроме этого, если выполнены условия (22), тогда $E < D = D^*$ и $D \geq \frac{1+\varepsilon}{4}\tau^2\tilde{A}_0$, $\varepsilon > 0$, – любое число. При этом для решения $\overline{y}$ получается оценка

$$\left\|\bar{y}^{n+1}\right\| \le \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\left\|\bar{u}_0\right\|_D + \frac{1}{\tilde{\delta}}\left\|D\bar{u}_1\right\| + \frac{1}{\tilde{\delta}}\sum_{s=1}^{n}\tau\left\{\left\|\bar{\varphi}_s\right\| + \left\|(\tilde{A}_0 - A_0)y_s\right\|\right\}\right).$$

Так как $\|A_1\| < 4/h_1^2$, $\|A_2\| < 4/h_2^2$ (см. [9, гл. IV, § 4]), то из оценки (18) находим

$$\left\|(\tilde{A}_0 - A_0)y_s\right\| = \left\|(\tilde{m}-m)\left(E - \frac{h_1^2}{12}A_1 - \frac{h_2^2}{12}A_2\right)y_s\right\| < \frac{1}{3}\left|\tilde{m}-m\right|\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\left\|u_0\right\|_D + \frac{1}{\delta}\left\|Du_1\right\| + \frac{1}{\delta}\sum_{r=1}^{n}\tau\left\|\varphi_r\right\|\right).$$

Теорема доказана.

Теорема о сходимости. Посмотрим теперь задачу для погрешности метода $z = y - u$:

$$z_{\bar{t}t} = \sum_{\alpha=1}^{p}\Lambda_\alpha z^{(\sigma_\alpha,\sigma_\alpha)} + \frac{1}{12}\sum_{\substack{\alpha,\beta=1\\ \alpha\ne\beta}}^{p} h_\alpha^2\Lambda_\alpha\Lambda_\beta z - mz^* + \psi, \quad (x,t)\in\omega_h\times\omega_\tau, \tag{23}$$

$$z(x,0)=0, \quad x\in\bar{\omega}_h, \quad z_t(x,0) = \overset{o}{\psi}, \quad x\in\omega_h, \tag{24}$$

$$z(x,t) = 0, \quad x\in\gamma_h,\ t\in\omega_\tau. \tag{25}$$

Для получения оценки погрешности z будем использовать результаты теоремы 1.

Т е о р е м а 3. *Пусть выполнены условия (17). Тогда решение разностной задачи (4)–(6) сходится к точному решению дифференциальной задачи (1)–(3) в сеточной норме $L_2(\omega_h)$ и для ее решения имеет место оценка точности вида*

$$\left\|y^n - u^n\right\| \le M_2(|h|^4 + \tau^2), \quad n = 0,1,\ldots,N_0, \quad M_2 = \text{const} > 0. \tag{26}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как задача для возмущения $\bar{y} = \tilde{y} - y$ и задача для погрешности (23)–(25) при $p = 2$ идентичны, тогда в силу теоремы 1 получаем для z неравенство

$$\left\|z^{n+1}\right\| \le \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\frac{1}{\delta}\left\|D\overset{o}{\psi}\right\| + \frac{1}{\delta}\sum_{s=1}^{n}\tau\left\|\psi_s\right\|\right) \le \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}\left(\frac{1}{\delta}\left\|D\overset{o}{\psi}\right\| + \frac{T}{\delta}\max_{t\in\omega_\tau}\left\|\psi(t)\right\|\right).$$

Отсюда и из оценок (7), (8) следует оценка (26). Случай $p = 3$ рассматривается аналогично.

Теорема доказана.

Тестовые расчеты. Далее приводятся результаты численных расчетов при решении начально-краевой задачи (1)–(3) в двумерном случае $p = 2$. Ее параметры выбираются следующим образом: $m = 2$, $T = 1$, $0 \le l_1 \le 1$, $0 \le l_2 \le \pi$. Начальные и краевые условия определяются из точного решения

$$u(x_1,x_2,t) = (\cos t + \sin t)(\cos 2x_2 + \sin 2x_2)e^{x_1}.$$

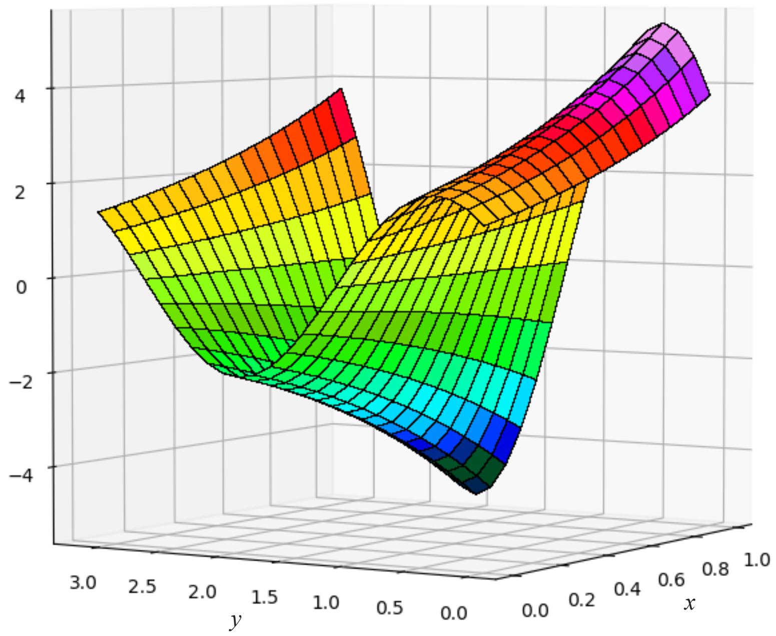
Погрешность метода в L_∞ (рисунок) определена по формуле

$$\left\|z^n\right\|_{L\infty} = \max_{\substack{0\le i_1\le N_1\\ 0\le i_2\le N_2}}\left|y_{i_1i_2}^n - u_{i_1i_2}^n\right|, \quad n = 0,1,\ldots,N_0.$$

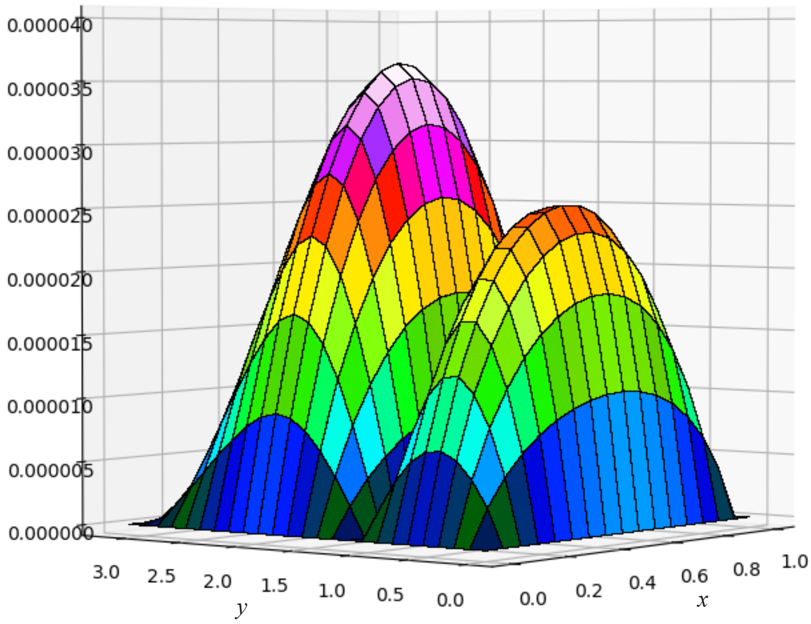
Для нахождения порядка сходимости по временной p^h и пространственной переменным p^τ в нормах L_2 и $L_\infty = C$ используются формулы

$$p_\infty^h = \log_2\frac{\left\|z(2h_1,2h_2,\tau)\right\|_{L\infty}}{\left\|z(h_1,h_2,\tau)\right\|_{L\infty}}, \quad p_\infty^\tau = \log_2\frac{\left\|z(h_1,h_2,2\tau)\right\|_{L\infty}}{\left\|z(h_1,h_2,\tau)\right\|_{L\infty}}.$$

Численные результаты, приведенные в табл. 1 и 2, показывают, что приближенное решение сходится к точному со скоростью четвертой по пространству и второй по времени.



a



b

Численное решение (*a*) и погрешность (*b*) при $t_n = T$ с шагами $h_1 = L_1 / 16$, $h_2 = L_2 / 24$, $\tau = 0{,}0001$

Numerical solution (*a*) and L_∞-error (*b*) at $t_n = T$ with steps $h_1 = L_1 / 16$, $h_2 = L_2 / 24$, $\tau = 0.0001$

Т а б л и ц а 1. **Скорость сходимости по пространственному направлению**

T a b l e 1. **Convergence rate in the spatial direction**

$h_1 = L_1 / 2$	$h_2 = L_2 / 3$	$\tau = 0{,}0001$	$\|z\|_{L\infty}$	$p^h_{L\infty}$	$\|z\|_{L2}$	p^h_{L2}
h_1	h_2	τ	1,66E-01	–	1,23E-01	–
$h_1 / 2$	$h_2 / 2$	τ	9,49E-03	4,12727	7,85E-03	3,96944
$h_1 / 2^2$	$h_2 / 2^2$	τ	5,70E-04	4,05728	4,80E-04	4,03123
$h_1 / 2^3$	$h_2 / 2^3$	τ	3,64E-05	3,96667	2,98E-05	4,0094
$h_1 / 2^4$	$h_2 / 2^4$	τ	2,30E-06	3,9877	1,88E-06	3,9883

Т а б л и ц а 2. **Скорость сходимости по временному направлению**

T a b l e 2. **Convergence rate in the time direction**

h_1	h_2	$\tau = 0{,}25$	$\|z\|_{L\infty}$	p_{∞}^{τ}	$\|z\|_{L2}$	p_{L2}^{τ}
0,01	0,01	τ	8,86E-02	–	7,38E-02	–
0,01	0,01	$\tau / 2$	2,28E-02	1,96088	1,78E-02	2,05225
0,01	0,01	$\tau / 2^2$	4,93E-03	2,20588	4,04E-03	2,13774
0,01	0,01	$\tau / 2^3$	1,19E-03	2,05376	9,68E-04	2,06277
0,01	0,01	$\tau / 2^4$	2,91E-04	2,0311	2,38E-04	2,02516

Благодарности. Автор выражает благодарность профессору П. П. Матусу за внимание к работе и полезные советы, полученные при подготовке настоящей работы.

Acknowledgments. The author expresses her sincere gratitude to Professor P. P. Matus for help, advice and recommendations received during the preparation of this work.

Список использованных источников

1. Рогов, Б. В. Высокоточная монотонная компактная схема бегущего счета для многомерных уравнений гиперболического типа / Б. В. Рогов // Журн. вычисл. математики и матем. физ. – 2013. – Т. 53, № 2. – С. 264–274. https://doi.org/10.7868/S0044466913020130

2. Толстых, А. И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики / А. И. Толстых. – М., 1990. – 230 с.

3. Li, Q. Compact difference scheme for two-dimensional fourth-order hyperbolic equation / Qing Li, Qing Jang // Adv. Differ. Equ. – 2019. – Vol. 2019. – Art. 328. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2094-4

4. Ding, H. A new fourth-order compact finite difference scheme for the two-dimensional second-order hyperbolic equation / Henfei Ding, Yuxin Zhang // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2009. – Vol. 230, N 2. – P. 626–632. https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.01.001

5. Zlotnik, A. On compact 4th order finite-difference schemes for the wave equation / Alexander Zlotnik, Olga Kireeva [Electronic resource]. – Mode of access: http://arxiv.org/abs/2011.14104v2. – Date of access: 08.09.2021.

6. Zlotnik, A. On higher-order compact ADI schemes for the variable coefficient wave equation / Alexander Zlotnik, Raimondas Ciegis // Applied Mathematics and Computation. – 2022. – Vol. 412. – Art. 126565. https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126565

7. Матус, П. П. Компактные разностные схемы для уравнения Клейна–Гордона / П. П. Матус, Хоанг Тхи Киеу Ань // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2020. – Т. 64, № 5. – С. 526–533. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-5-526-533

8. Caudrey, P. J. The Sine-Gordon equation as a model classical field theory / P. J. Caudrey, J. C. Eilbeck, J. D. Gibbon // Il Nuovo Cimento B Series 11. – 1975. – Vol. 25, N 2. – P. 497–512. https://doi.org/10.1007/bf02724733

9. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М., 1989. – 616 с.

10. Самарский, А. А. Разностные схемы с операторными множителями / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, П. П. Матус. – Минск, 1998. – 442 с.

11. Самарский, А. А. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности / А. А. Самарский // Журн. вычисл. математики и матем. физ. – 1963. – Т. 3, № 5. – С. 812–840.

12. Матус, П. П. Компактные разностные схемы на трехточечном шаблоне для гиперболических уравнений второго порядка / П. П. Матус, Хоанг Тхи Киеу Ань // Дифференциальные уравнения. – 2021. – Т. 57, № 7. – С. 963–975. https://doi.org/10.31857/s0374064121070098

References

1. Rogov B. V. High-order accurate monotone compact running scheme for multidimensional hyperbolic equations. *Computational Mathematics and Mathematics and Mathematical Physics*, 2013, vol. 53, no. 2, pp. 205–214. https://doi.org/10.1134/s0965542513020097

2. Tolstykh A. I. *Compact difference schemes and their application to problems of aerohydrodynamics*. Moscow, 1990. 230 p. (in Russian).

3. Qing Li, Qing Yang. Compact difference scheme for two-dimensional fourth-order hyperbolic equation. *Advances in Difference Equations*, 2019, vol. 2019, art. 328. https://doi.org/10.1186/s13662-019-2094-4

4. Henfei Ding, Yuxin Zhang. A new fourth-order compact finite difference scheme for the two-dimensional second-order hyperbolic equation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2009, vol. 230, no. 2, pp. 626–632. https://doi.org/10.1016/j.cam.2009.01.001

5. Zlotnik A., Kireeva O. On compact 4th order finite-difference schemes for the wave equation. Available at: http://arxiv.org/abs/2011.14104v2 (accessed 08 September 2021).

6. Zlotnik A., Ciegis R. On higher-order compact ADI schemes for the variable coefficient wave equation. *Applied Mathematics and Computation*, 2022, vol. 412, art. 126565. https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126565

7. Matus P. P., Hoang Thi Kieu Anh. Compact difference schemes for Klein–Gordon equation. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2020, vol. 64, no. 5, pp. 526–533 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2020-64-5-526-533

8. Caudrey P. J., Eilbeck J. C., Gibbon J. D. The sine-Gordon equation as a model classical field theory. *II Nuovo Cimento B Series 11*, 1975, vol. 25, no. 2, pp. 497–512. https://doi.org/10.1007/bf02724733

9. Samarskii A. A. *Theory of difference schemes.* New York: Marcel Dekker, Inc., 2001. 761 p. https://doi.org/10.1201/9780203908518

10. Samarskii A. A., Matus P. P., Vabishchevich P. N. *Difference schemes with operator factors*. Dordrecht, 2002. 384 p. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9874-3

11. Samarskii A. A. Schemes of high-order accuracy for the multi-dimensional heat conduction equation. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1963, vol. 3, no. 5, pp. 1107–1146. https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90104-6

12. Matus P. P., Hoang Thi Kieu Anh. Compact difference schemes with a three-point stencil for second-order hyperbolic equations. *Differential Equations*, 2021, vol. 57, no. 7, pp. 934–946. https://doi.org/10.1134/s0012266121070090

Информация об авторе

Хоанг Тхи Киеу Ань – аспирант. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kieuanhhoang86@gmail.com.

Information about the author

Hoang Thi Kieu Anh – Postgraduate student. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kieuanhhoang86@gmail.com.