ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 517.977
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-1-21-25

Поступило в редакцию 06.10.2021
Received 06.10.2021

А. И. Калинин, Л. И. Лавринович

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ К ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Аннотация. Рассматривается задача оптимизации переходного процесса в квазилинейной динамической системе с критерием качества, который представляет собой линейную комбинацию энергетических затрат и длительности процесса. Строятся асимптотические приближения заданного порядка к решению этой задачи.

Ключевые слова: малый параметр, квазилинейная система, оптимальное управление, асимптотические приближения

Для цитирования. Калинин, А. И. Применение метода возмущений к задаче оптимизации переходного процесса в квазилинейной динамической системе / А. И. Калинин, Л. И. Лавринович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2022. – Т. 66, № 1. – С. 21–25. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-1-21-25

Anatoliy I. Kalinin, Leonid I. Lavrinovich

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

APPLICATION OF THE PERTURBATION METHOD TO THE PROBLEM OF OPTIMIZING THE TRANSIENT PROCESS IN A QUASI-LINEAR DYNAMIC SYSTEM

(Communicated by Corresponding Member Valentin V. Gorokhovik)

Abstract. The problem of optimizing the transient process in a quasi-linear dynamic system with a performance index, being a linear combination of the energy costs and the process duration, is considered. Asymptotic approximations of a given order to the solution of this problem are constructed.

Keywords: small parameter, quasilinear system, optimal control, asymptotic approximations

For citation. Kalinin A. I., Lavrinovich L. I. Application of the perturbation method to the problem of optimizing the transient process in a quasi-linear dynamic system. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2022, vol. 66, no. 1, pp. 21–25 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-1-21-25

Введение. Динамические системы, содержащие малые параметры при нелинейностях, принято называть квазилинейными. В рамках математической теории оптимальных процессов [1] задачам оптимизации таких систем уделяется значительное внимание. Интерес к ним вызван эффективностью асимптотических методов их решения, при применении которых исходные по существу нелинейные задачи сводятся к сравнительно несложной коррекции решений задач оптимизации линейных систем.

Настоящее сообщение посвящено построению асимптотических приближений к решению задачи оптимизации переходного процесса в квазилинейной системе, в которой помимо энергетических затрат учитывается длительность процесса.

Постановка задачи. В классе r-мерных управляющих воздействий $u(t)$ рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x} = A(t)x + \mu f(x, t) + B(t)u, \ \ x(t_0) = x_0, \tag{1}$$

$$x(t_1)=0,\ J(u)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(1+x^{\mathrm T}Q(t)x+u^{\mathrm T}P(t)u)dt\to\min, \tag{2}$$

где μ – малый (по модулю) параметр; t_0 – заданный начальный момент времени; t_1 – нефиксированный конечный момент времени; x – n-вектор; $f(x,t)$, $x\in R^n$, $t\ge t_0$, – нелинейная вектор-функция; $Q(t)$ – неотрицательно-определенная симметрическая матрица, а $P(t)$ – положительно-определенная симметрическая матрица для всех $t\ge t_0$. Предполагается, что элементы матриц $A(t)$, $B(t)$, $Q(t)$, $P(t)$, $\partial f(x,t)/\partial x$, $x\in R^n$, $t\ge t_0$, принадлежат классу C^p, $p\ge 1$.

Критерий качества в этой задаче представляет собой линейную комбинацию энергетических затрат и длительности процесса. Заметим, что если учесть только энергетические затраты, то задача, как правило, не будет иметь решения, а на минимизирующей последовательности длительность процесса будет стремиться к бесконечности.

Уточним, что будем понимать под асимптотическими приближениями к решению рассматриваемой задачи.

О п р е д е л е н и е. *Управление* $u^{(N)}(t,\mu)$, $t\in[t_0,t_1^{(N)}(\mu)]$, *назовем асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка* $(N=0,1,2,\ldots)$ *в задаче (1), (2), если оно переводит систему (1) в состояние* $O(\mu^{N+1})$ *и отклоняется по критерию качества* $J(u)$ *от оптимального управления на величину того же порядка малости.*

Ниже предлагается алгоритм, с помощью которого для заданного числа N ($N<p$) можно построить асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в рассматриваемой задаче.

Базовая задача. Вычисления при построении асимптотических приближений начинаются с решения базовой задачи, которая формально получается из исходной при $\mu=0$, и в отличие от нее является задачей оптимизации линейной системы.

П р е д п о л о ж е н и е 1. *Динамическая система в базовой задаче является вполне управляемой [2].*

Заметим, что это предположение для стационарной динамической системы эквивалентно требованию $\operatorname{rank}(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)=n$.

При выполнении предположения 1 в базовой задаче существуют допустимые управления, а тогда эта задача имеет единственное решение, которое является нормальной экстремалью [3].

Последнее означает, что принцип максимума [1] в данном случае может быть сформулирован следующим образом: пусть $u^0(t)$, $x^0(t)$, $t\in T^0=[t_0,t_1^0]$, – оптимальные управление и траектория в базовой задаче, тогда существует такое решение $\psi\ (t)$, $t\in T^0$, сопряженной системы $\dot\psi=-A^{\mathrm T}(t)\psi+Q(t)x^0(t)$, что выполняются условия

$$\psi^{0\mathrm T}(t)B^{\mathrm T}(t)u^0(t)-\frac{1}{2}u^{0\mathrm T}(t)P(t)u^0(t)=\max_{u\in R^r}\left(\psi^{0\mathrm T}(t)B^{\mathrm T}(t)u-\frac{1}{2}u^{\mathrm T}P(t)u\right),\ t\in T^0, \tag{3}$$

$$2\psi^{0\mathrm T}(t_1^0)B(t_1^0)u^0(t_1^0)-u^{0\mathrm T}(t_1^0)P(t_1^0)u^0(t_1^0)=1. \tag{4}$$

Из условия (3) непосредственно следует

$$u^0(t)=P^{-1}(t)B^{\mathrm T}(t)\psi^0(t),\ t\in T^0. \tag{5}$$

Условие (4), с учетом (5), может быть записано в виде

$$\psi^{0\mathrm T}(t_1^0)B(t_1^0)P^{-1}(t_1^0)B^{\mathrm T}(t_1^0)\psi^0(t_1^0)=1.$$

Пусть $\nu_0=\psi^0(t_0)$, тогда $x^0(t)$, $\psi^0(t)$, $t\in T^0$, есть решение следующей начальной задачи:

$$\begin{gathered}\dot x=A(t)x+B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm T}(t)\psi(t),\ x(t_0)=x_0,\\ \dot\psi=Q(t)x(t)-A^{\mathrm T}(t)\psi,\ \psi(t_0)=\nu_0.\end{gathered} \tag{6}$$

Введем в рассмотрение фундаментальную матрицу $F(t)$, $t \in T^0$, системы (6) как решение начальной задачи $\dot{F} = \overline{A}(t)F$, $F(t_0) = E_{2n}$, в которой

$$\overline{A}(t) = \begin{pmatrix} A(t) & B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t) \\ Q(t) & -A^{\mathrm{T}}(t) \end{pmatrix}.$$

Разобьем матрицу F на блоки размеров $n \times n$:

$$F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix}.$$

После решения базовой задачи формируется матрица

$$I_0 = \begin{pmatrix} F_{12}(t_1^0) & \dot{x}^0(t_1^0) \\ 2(F_{22}(t_1^0)B(t_1^0)u^0(t_1^0))^{\mathrm{T}} & \dfrac{d}{dt_1}(u^{0\mathrm{T}}(t_1^0)P(t_1^0)u^0(t_1^0)) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

П р е д п о л о ж е н и е 2. *Выполнено условие* $\det I_0 \neq 0$.

Заметим, что из результатов, полученных в [4], следует $\det F_{12}(t_1^0) \neq 0$.

Построение асимптотических приближений. Рассмотрим начальную задачу

$$\begin{gathered} \dot{x} = A(t)x + \mu f(x,t) + B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi(t),\ x(t_0) = x_0, \\ \dot{\psi} = Q(t)x(t) - \left(A(t) + \mu\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right)^{\mathrm{T}}\psi,\ \psi(t_0) = \nu, \end{gathered} \tag{8}$$

в которой $t \in T^0$. В силу теоремы о дифференцируемости решений обыкновенных дифференциальных уравнений по начальным данным и параметрам существуют такие положительные числа ε_0, μ_0, что задача (8) имеет единственное решение $x(t,\nu,\mu)$, $\psi(t,\nu,\mu)$, принадлежащее классу C^p, продолжимое на любой конечный промежуток $[t_0, t_1]$, если только $\|\nu - \nu_0\| < \varepsilon_0$, $|\mu| < \mu_0$.

Сформулируем теорему, на которую опираются дальнейшие вычисления при построении асимптотически субоптимальных управлений.

Т е о р е м а. *При выполнении предположений 1, 2 в задаче (1), (2) с достаточно малым по модулю* μ *существует единственное оптимальное управление, которое представимо в виде*

$$u^0(t,\mu) = P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi(t,\nu(\mu),\mu),\ t \in [t_0, t_1(\mu)]. \tag{9}$$

Оптимальный конечный момент времени $t_1(\mu)$ *и начальное значение (в момент времени* t_0*) вектора сопряженных переменных* $\nu(\mu)$ *удовлетворяют системе уравнений*

$$\begin{cases} x(t_1,\nu,\mu) = 0, \\ \psi^{\mathrm{T}}(t_1,\nu,\mu)B(t_1)P^{-1}(t_1)B^{\mathrm{T}}(t_1)\psi(t_1,\nu,\mu) - \mu\psi^{\mathrm{T}}(t_1,\nu,\mu)f(0,t_1) - 1 = 0, \end{cases} \tag{10}$$

причем $t_1(\mu) = C^p$, $t_1(0) = t_1^0$, $\nu(\mu) \in C^p$, $\nu(0) = \nu_0$.

Доказываются сформулированные утверждения путем применения теоремы о неявной функции к системе уравнений (10). Невырожденность матрицы Якоби в данном случае гарантируется предположением 2.

Пусть задано натуральное число N, $N < p$. Поскольку $\nu(\mu)$, $t_1(\mu)$ принадлежат классу C^p, и $\nu(0) = \nu_0$, $t_1(0) = t_1^0$, то имеют место асимптотические равенства $\nu(\mu) = \nu^{(N)}(\mu) + O(\mu^{N+1})$, $t_1(\mu) = t_1^{(N)}(\mu) + O(\mu^{N+1})$, где

$$\nu^{(N)}(\mu) = \nu_0 + \sum_{k=1}^{N}\mu^k\nu_k,\ t_1^{(N)}(\mu) = t_1^0 + \sum_{k=1}^{N}\mu^k t_{1k}$$

есть полиномы Тейлора N-й степени. Асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче (1), (2) представимо в виде (сравни с (9))

$$u^{(N)}(t,\mu)=P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi(t,\nu^{(N)}(\mu),\mu),\ t\in[t_0,t_1^{(N)}(\mu)]. \quad (11)$$

Для его построения нужно найти коэффициенты ν_k, t_{1k}, k = 1, 2, …, N, полиномов (11), что можно сделать, применяя методику, предложенную в [5]. Следуя этой методике, нужно разложить левые части уравнений (10) по целым степеням μ до порядка N включительно, применяя формализм Пуанкаре к начальной задаче (8), и приравнять коэффициенты разложения к нулю. Вычисления при этом сводятся к интегрированию систем линейных дифференциальных уравнений, а также к нахождению корней невырожденных линейных алгебраических систем.

Вектор-функция $\psi(t,\nu^{(N)}(\mu),\mu)$, $t\in[t_0,t_1^{(N)}(\mu)]$, есть решение начальной задачи (8) с $\nu=\nu^{(N)}(\mu)$. Применяя классическую технику Пуанкаре к этой задаче, получаем асимптотическое представление $\psi(t,\nu^{(N)}(\mu),\mu)=\psi^{(N)}(t,\mu)+O(\mu^{N+1})$, $t\in[t_0,t_1^{(N)}(\mu)]$, где $\psi^{(N)}(t,\mu)=\sum_{k=0}^{N}\mu^k\psi_k(t)$, $t\in[t_0,t_1^{(N)}(\mu)]$, а вектор-функции $\psi_k(t)$, $t\in[t_0,t_1^{(N)}(\mu)]$, находятся в результате последовательного решения задач Коши для систем линейных дифференциальных уравнений. Управление

$$\overline{u}^{(N)}(t,\mu)=P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi^{(N)}(t,\mu),\ t\in[t_0,t_1^{(N)}(\mu)],$$

наряду с (11) является асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка в задаче (1), (2). Поскольку $\psi^{(0)}(t,\mu)=\psi^0(t)$, то $\overline{u}^{(0)}(t,\mu)=u^0(t)$, $t\in T^0$, т. е. решение базовой задачи является асимптотически субоптимальным управлением нулевого порядка в исходной задаче. Асимптотически субоптимальное управление первого порядка имеет вид

$$\overline{u}^{(1)}(t,\mu)=u^0(t)+\mu P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi_1(t),\ t\in[t_0,t_1^{(1)}(\mu)],$$

где $\psi_1(t)$, $t\in[t_0,t_1^{(1)}(\mu)]$, есть результат решения задачи Коши для системы

$$\dot{x}_1=A(t)x_1+B(t)P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi_1+f(x^0(t),t),$$
$$\dot{\psi}_1=Q(t)x_1-A^{\mathrm{T}}(t)\psi_1-\frac{\partial h}{\partial x}(x^0(t),\psi^0(t),t)$$

с начальными условиями $x_1(t_0)=0$, $\psi_1(t_0)=\nu_1$, в которой $h(x,\psi,t)=\psi^{\mathrm{T}}f(x,t)$.

Не исключено, что $t_1^0<t_1^{(1)}(\mu)$. В этом случае следует понимать под $x^0(t)$, $\psi^0(t)$ решение начальной задачи (7), которое продолжимо на любой конечный промежуток времени, а $u^0(t)=P^{-1}(t)B^{\mathrm{T}}(t)\psi^0(t)$.

Заключение. В сообщении предложены вычислительные процедуры построения асимптотических приближений к оптимальному управлению в рассмотренной задаче. При их использовании вычисления сводятся к решению задачи оптимизации переходного процесса в линейной системе, интегрированию систем линейных дифференциальных уравнений, а также к нахождению корней невырожденных линейных алгебраических систем.

Список использованных источников

1. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин [и др.]. – М., 1983. – 392 с.
2. Красовский, Н. Н. Теория управления движением / Н. Н. Красовский. – М., 1968. – 476 с.
3. Мордухович, Б. Ш. Существование оптимальных управлений / Б. Ш. Мордухович // Соврем. пробл. матем. (Итоги науки и техн.). – М., 1976. – Т. 6. – С. 207–271.
4. Калинин, А. И. О проблеме синтеза оптимальных систем управления / А. И. Калинин // Журн. вычисл. математики и матем. физ. – 2018. – Т. 58, № 3. – С. 397–402. https://doi.org/10.7868/S0044466918030079
5. Калинин, А. И. Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем / А. И. Калинин. – Минск, 2000. – 183 с.

References

1. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. Moscow, New York, 1986. 392 p.

2. Krasovskii N. N. *Theory of Control of Motion*. Moscow, 1968. 476 p. (in Russian).

3. Mordukhovich B. Sh. Existence of Optimal Controls. *Sovremennye Problemy Matematiki. Itogi Nauki i Tekhniki* [Modern problems of mathematics. The results of science and technology]. Moscow, 1976, vol. 6, pp. 207–271 (in Russian).

4. Kalinin A. I. To the synthesis of optimal control systems. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2018, vol. 58, no. 3, pp. 378–383. https://doi.org/10.1134/s0965542518030065

5. Kalinin A. I. *Asymptotic Methods for Optimization of Disturbed Dynamical Systems*. Minsk, 2000. 183 p. (in Russian).

Информация об авторах

Калинин Анатолий Иосифович – д-р физ.-мат. наук, профессор. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kalininai@bsu.by.

Лавринович Леонид Иванович – канд. физ.-мат. наук, доцент. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: lavrinovich@bsu.by.

Information about the authors

Kalinin Anatoliy I. – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kalininai@bsu.by.

Lavrinovich Leonid I. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: lavrinovich@bsu.by.