ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 513.88 Поступило в редакцию 17.02.2022
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-2-135-140 Received 17.02.2022

А. В. Лебедев, Г. С. Ромащенко, П. П. Забрейко

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ: УСИЛЕННАЯ ВЕРСИЯ И ОБЛАСТЬ ПОИСКА МАРТИНГАЛЬНЫХ МЕР

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Аннотация. Представлена усиленная геометрическая версия «основной теоремы финансовой математики» для одношаговой модели финансовых рынков. Вскрыта принципиальная роль тотальных и неаннулирующих конусов, в терминах которых описываются условия существования мартингальных мер. На этой базе доказана «основная теорема финансовой математики» для p-суммируемых рынков.

Ключевые слова: арбитраж, мартингальная мера, оштукатуриваемый конус, тотальный конус, неаннулирующий конус

Для цитирования. Лебедев, А. В. Основная теорема финансовой математики: усиленная версия и область поиска мартингальных мер / А. В. Лебедев, Г. С. Ромащенко, П. П. Забрейко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2022. – Т. 66, № 2. – С. 135–140. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-2-135-140

Andrei V. Lebedev, Galina S. Romashchenko, Petr P. Zabreiko

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

FUNDAMENTAL THEOREM OF ASSET PRICING: A STRENGTHENED VERSION AND A MARTINGALE MEASURE SEARCH AREA

(Communicated by Corresponding Member Valentin V. Gorokhovik)

Abstract. In the article a strengthened version of the ’Fundamental Theorem of Asset Pricing’ for a one-period market model is proven. The principal role in this result is played by total and nonanihilating cones.

Keywords: arbitrage, martingale measure, plastered cone, total cone, non-annulment cone

For citation. Lebedev A. V., Romashchenko G. S., Zabreiko P. P. Fundamental theorem of asset pricing: a strengthened version and a martingale measures search area. *Doklady Natsional’noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2022, vol. 66, no. 2, pp. 135–140 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-2-135-140

Важную роль в теории финансовой математики играет так называемая основная теорема финансовой математики (в действительности серия результатов под таким названием), связывающая безарбитражные рынки (т. е. рынки, на которых невозможно безрисково получить доход с положительной вероятностью; точное определение дано ниже) с существованием мартингалов, порожденных мерами, эквивалентными исходной мере. Подробное описание состояния данной темы см., например, в [1; 2].

В [3; 4] описана геометрия банаховых объектов, составляющих базу «основной теоремы финансовой математики» для одношаговой модели финансовых рынков. Один из главных результатов [4] выписан в теореме 4 настоящего сообщения.

Двумя принципиальными условиями в данной теореме являются следующие: первое – непустота внутренности конуса $\mathring{K}^* \neq \varnothing$, где K – конус «арбитражных возможностей» (конус доходов), и второе – рефлексивность подпространства $L = L^{**}$, где L – пространство «финансовых страте-

© Лебедев А. В., Ромащенко Г. С., Забрейко П. П., 2022

гий». Оба эти условия тривиально выполняются в стандартной ситуации, обычно рассматриваемой в «основной теореме финансовой математики», а именно, $K = L_{1+}$ – конус неотрицательных функций в $L_1(\Omega, P)$ и L – конечномерное подпространство (ср. теоремы 2 и 3 настоящего сообщения). В [4] показано, что при ослаблении условий на конус K (например, если $\mathring{K}^* = \varnothing$) мартингальность в общей ситуации исчезает из критерия безарбитражности рынка [4, теорема 5.5]. Одной из целей данной работы является анализ способов ослабления условий на конус K без потери мартингальной природы безарбитражных рынков. Мы показываем, что принципиальным условием, при котором мартингальность по прежнему присутствует в описании безарбитражных рынков, является существование тотальных и неаннулирующих конусов в K^*. Такие конусы дают возможность радикально уменьшить область поиска мартингальных мер. На конкретных примерах показано, что эта область может быть существенно меньше, чем $\mathring{K}^*$ и часто существует даже если $\mathring{K}^* = \varnothing$. Кроме того, в ряде ситуаций это позволяет усилить теоремы 2, 3 и 4. В частности, мы доказываем соответствующую «основную теорему финансовой математики» для p-суммируемых рынков, где $\mathring{K}^* = \varnothing$.

Стимулирующий пример – одношаговая модель. Геометрическая формулировка «основной теоремы финансовой математики». Одношаговая модель финансового рынка описывается следующим образом. Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство (пространство (возможных) сценариев). Через $S := (S^1, \ldots, S^d)$ обозначается семейство случайных величин на (Ω, F, P), рассматриваемых в качестве возможных дисконтированных цен в заданный момент будущего t_1. Предполагаем, что все рассматриваемые случайные величины суммируемы, т. е. $S_i \in L_1(\Omega, P)$. Начальный инвестиционный портфель – это вектор $\xi := (\xi^1, \ldots, \xi^d) \in \mathbb{R}^d$. Цена портфеля в момент t_1 – случайная величина $\xi S = \sum_{i=1}^d \xi^i S^i(\omega)$. Говорят, что на рынке отсутствует арбитраж, если неравенство $\xi S \geq_{\text{a.e.}} 0$ (относительно меры P) влечет равенство $\xi S \geq_{\text{a.e.}} 0$. Геометрически это означает, что

$$\text{на рынке отсутствует арбитраж} \Leftrightarrow L \cap L_{1+} = \{0\},$$

где $L := \{\xi S,\ \xi \in \mathbb{R}^d\}$ – подпространство, порожденное системой цен S^i, $i = 1, 2, \ldots, d$, и $L_{1+} := \{f \in L_1(\Omega, P),\ f \geq 0\}$ – конус неотрицательных функций.

Меры P и Q на (Ω, F) называются эквивалентными (обозначение $Q \approx P$), если $P(A) = 0 \Leftrightarrow Q(A) = 0$. Для рассматриваемой одношаговой модели известно следующее описание отсутствия арбитража.

Т е о р е м а 1 (Основная теорема финансовой математики [5, теорема 1.6]). *Для вышеописанных объектов следующие два условия эквивалентны:*

1) на рынке отсутствует арбитраж,

2) существует мера $P^* \approx P$ с ограниченной производной Радона–Никодима $\dfrac{dP^*}{dP}$, такая что

$$E_{P^*}(S^i) = \int_\Omega S_i \, dP^* = \int_\Omega S_i \left(\frac{dP^*}{dP}\right) dP = 0,\ i = 1, \ldots, d; \tag{1}$$

здесь $E_{P^*}(S^i)$ – математическое ожидание для S^i.

Если выполняется условие (1), то P^* называется мартингальной (или риск-нейтральной) мерой. Таким образом, теорема 1 может быть переписана следующим образом: *на рынке отсутствует арбитраж $\Leftrightarrow$ существует мартингальная мера $P^* \approx P$ с ограниченной $\dfrac{dP^*}{dP}$.*

В настоящем сообщении мы получим усиление этого результата (теорема 5). Для этого нам потребуется геометрическая переформулировка теоремы 1.

Рассмотрим банахово пространство $L_1(\Omega, P)$. Как известно, для сопряженного пространства $L_1(\Omega, P)^*$ мы имеем $L_1(\Omega, P)^* = L_\infty(\Omega, P)$. Здесь элемент $x^* \in L_\infty(\Omega, P)$ идентифицируется с функционалом (элементом из $L_1(\Omega, P)^*$) с помощью спаривания $< x^*, u > = \int_\Omega u x^* \, dP$, $u \in L_1(\Omega, P)$.

Рассмотрим конус L_{1+} неотрицательных функций в $L_1(\Omega, P)$. Через $L_{1+}^* \subset L_1(\Omega, P)^* = L_\infty(\Omega, P)$ мы обозначаем конус неотрицательных функционалов на L_{1+}, т. е.

$$L_{1+}^* := \{x^* \in L_\infty(\Omega, P) : < x^*, u > \geq 0 \text{ для каждого } u \in L_{1+}\}.$$

Очевидно, L_{1+}^* совпадает с конусом $L_{\infty+}$ неотрицательных функций из $L_\infty(\Omega, P)$, т. е.

$$L_{1+}^* = L_{\infty+} := \{x^* \in L_\infty(\Omega, P),\ x^* \geq 0\}. \tag{2}$$

Обозначим через $\tilde{L}_{\infty+}$ конус

$$\tilde{L}_{\infty+} := \{x^* \in L^\infty(\Omega, P),\ x^* >_{\text{a.e.}} 0\}. \tag{3}$$

Через $L^\perp \subset L_1(\Omega, P)^*$ мы обозначим подпространство функционалов равных нулю на L (L – подпространство, порожденное векторами S^i, $i = 1, \ldots, d$).

Как показано в [3] теорема 1 может быть переписана в следующем виде.

Т е о р е м а 2 (геометрическая формулировка теоремы 1 [3, теорема 2]). *Для вышеописанных объектов следующие два условия эквивалентны:*

1) $L \cap L_{1+} = \{0\}$ *(= арбитраж отсутствует);*

2) $L^\perp \cap \tilde{L}_{\infty+} \neq \varnothing$ *(= существует мартингальная мера).*

Кроме того, в [3] была, в частности, получена уточненная версия этого результата. А именно, рассмотрим конус

$$\overset{\circ}{L}_{\infty+} = \{x^* \in L_{\infty+} : x^* \text{ существенно отделен от нуля}\}.$$

Ясно, что $\overset{\circ}{L}_{\infty+} \subset \tilde{L}_{\infty+}$ и $\overset{\circ}{L}_{\infty+}$ – не что иное, как внутренность конуса $L_{\infty+}$ (2).

Т е о р е м а 3 (уточнение теоремы 2 [3, теорема 9]). *Для описанных выше объектов следующие условия эквивалентны:*

1) $L \cap L_{1+} = \{0\}$ *(= арбитраж отсутствует);*

2) $L^\perp \cap \overset{\circ}{L}_{\infty+} \neq \varnothing$ *(= существует мартингальная мера (уточненное условие)).*

Основной целью [4] был анализ геометрической природы феноменов типа отсутствия арбитража в банаховых пространствах. Напомним, что конус K со свойством $\overset{\circ}{K}{}^* \neq \varnothing$ называется *оштукатуриваемым*. Ряд критериев оштукатуриваемости конусов приведен в [4, теорема 3.5]. Главным результатом [4] является

Т е о р е м а 4 (геометрия моделей безарбитражных рынков: оштукатуриваемые конусы и рефлексивные подпространства [4, теорема 4.4]). *Пусть E – банахово пространство, $K \subset E$ – оштукатуриваемый конус, G – любая его база и $L \subset E$ – замкнутое подпространство, такое что его замкнутый единичный шар компактен в слабой топологии (т. е. L – рефлексивное подпространство). Для вышеупомянутых объектов следующие четыре условия эквивалентны:*

1) $L \cap K = \{0\}$ *(арбитраж отсутствует);*

2) $\rho(G, L) > 0$ *(любая база арбитражных возможностей удалена от пространства финансовых стратегий);*

3) $L^\perp \cap \overset{\circ}{K}{}^* \neq \varnothing$ *(существует мартингальная мера (уточнённое условие));*

4) $L^\perp + \overset{\circ}{K}{}^* = E^*$, *где* E^* *– сопряженное пространство к E.*

Как отмечено во введении, в общей ситуации при ослаблении условий на K (например, если мы не предполагаем выполнения условия $\overset{\circ}{K}{}^* \neq \varnothing$) мартингальность исчезает из критерия безарбитражности рынка: в общей ситуации нет условия типа условия 3) в теореме 4, а имеет место только некоторый аналог условия 2) (см. [4, теорема 5.5]).

Основные результаты сообщения представлены в следующем разделе, где мы проводим анализ ослабления условий на K без потери мартингальной природы безарбитражных рынков. Кроме того, мы обнаружим, что в ряде ситуаций теоремы 2, 3 и 4 могут быть усилены.

Основная теорема финансовой математики: усиленная версия. Для формулировки результатов нам требуется ввести ряд объектов.

Пусть E – банахово пространство и $K \subset E$ – некоторый конус. Напомним, что *конусом* в векторном пространстве называется множество K, обладающее следующими двумя свойствами:

1) K – выпуклое множество;

2) для любого $x \in K$ и любого $0 < \lambda \in \mathbb{R}$ выполняется $\lambda x \in K$.

Как обычно, через K^* мы обозначаем конус неотрицательных функционалов на K, т. е.

$$K^* := \{x^* \in E^* : < x^*, u > \geq 0 \text{ для любого } u \in K\},$$

где E^* – сопряженное пространство к E.

Пусть $K = \overline{K}$ – замкнутый конус. Конус $\tilde{K} \subset K^*$ называется *тотальным*, если он обладает следующим свойством: если вектор $u \in E$ такой, что для любого $x^* \in \tilde{K}$ выполняется $< x^*, u > \geq 0$, то $u \in K$. Множество всех тотальных конусов в K^* будем обозначать через $\mathbf{K}^*_{\text{tot}}$.

П р и м е р ы.

1. Ясно, что сам конус K^* является тотальным.

2. Если K^* имеет непустую внутренность $\overset{\circ}{K}{}^* \neq \varnothing$, то $\overset{\circ}{K}{}^*$ – тотальный конус. Действительно, в этом случае мы имеем $\bar{\overset{\circ}{K}}{}^* = K^*$. Если $u \notin K$, то существует функционал $x^* \in K^*$, такой что $< x^*, u > < 0$. Поэтому для функционалов $x^{*\prime} \in \overset{\circ}{K}{}^*$, которые достаточно близки к x^*, также выполняется $< x^{*\prime}, u > < 0$.

3. В частности, если $L_{\infty+}$ – конус (2) неотрицательных функций в $L_\infty(\Omega, P)$, интерпретируемый как конус L^*_{1+} неотрицательных функционалов на конусе L_{1+} неотрицательных функций в $L_1(\Omega, P)$, то конус

$$\overset{\circ}{L}_{\infty+} = \{Q \in L^*_{1+} (= L_{\infty+}),\ Q \text{ существенно отделена от нуля}\} \tag{4}$$

является тотальным конусом.

4. Для конуса $L^*_{1+} = L_{\infty+}$ (2) рассмотрим еще один конус $\tilde{L}_{\infty+}$ (3). Ясно, что

$$< Q, f > \geq 0 \text{ для каждой } Q \in \tilde{L}_{\infty+} \Leftrightarrow f \in L_{1+},$$

т. е. $\tilde{L}_{\infty+}$ – тотальный конус.

5. Пусть опять $L^*_{1+} = L_{\infty+}$ – конус (2) и $\tilde{K}$ – конус простых положительных функций с конечным множеством значений, т. е. конечных сумм вида

$$f = \sum_i c_i \chi(A_i),$$

где $\Omega \supset A_i$ – измеримые множества, $\coprod_i A_i = \Omega$ и $c_i > 0$.

Ясно, что $\tilde{K}$ – тотальный конус.

Конус $\tilde{K} \subset K^*$ называется *неаннулирующим*, если он обладает следующим свойством: для любого $x^* \in \tilde{K}$ и каждого $0 \neq u \in K$ выполняется $< x^*, u > > 0$. Множество всех неаннулирующих конусов в K^* обозначается через $\mathbf{K}^*_{\text{nan}}$.

6. Если K^* обладает непустой внутренностью $\overset{\circ}{K}{}^* \neq \varnothing$, то $\overset{\circ}{K}{}^*$ – неаннулирующий конус. Действительно, рассуждаем от противного: предположим, что $x^* \in \overset{\circ}{K}{}^*$ и $< x^*, u > = 0$. Выберем любой функционал $y^* \in E^*$, такой что $< y^*, u > = \alpha < 0$. Так как $x^* \in \overset{\circ}{K}{}^*$, то для достаточно малых положительных ε выполняется $x^* + \varepsilon y^* \in \overset{\circ}{K}{}^*$ и поэтому $< x^* + \varepsilon y^*, u > = \varepsilon\alpha < 0$. Мы пришли к противоречию.

7. В частности, если $L^*_{1+} = L_{\infty+}$ – конус (2), то конус $\overset{\circ}{L}_{\infty+}$ (4) является неаннулирующим.

8. Для этого же конуса $L^*_{1+} = L_{\infty+}$ (2) конус $\tilde{L}_{\infty+}$ (3) также является неаннулирующим.

9. Пусть опять $L^*_{1+} = L_{\infty+}$ – конус (2) и $\tilde{K}$ – конус простых положительных функций, имеющих конечные множества значений. Ясно, что $\tilde{K}$ – неаннулирующий конус.

10. К сожалению, не для каждого конуса K выполняется $\mathbf{K}^*_{\text{nan}} \neq \varnothing$. Пусть, например, $K = L$ – линейное подпространство. В этом случае $L^* = L^\perp$. Поэтому для любого $x^* \in L^*$ и каждого $u \in L$ выполняется $< x^*, u > = 0$.

Т е о р е м а 5 (основная теорема финансовой математики: усиленная версия). *Пусть E – банахово пространство и $K, L \subset E$, где $K = \overline{K}$ – замкнутый конус, а L – конечномерное линейное подпространство. Предположим, что $\mathbf{K}^*_{\text{tot}} \cap \mathbf{K}^*_{\text{nan}} \neq \varnothing$. Тогда для каждого конуса $\tilde{K} \in \mathbf{K}^*_{\text{tot}} \cap \mathbf{K}^*_{\text{nan}}$ следующие условия эквивалентны:*

1) $L \cap K = \{0\}$ *(= арбитраж отсутствует);*

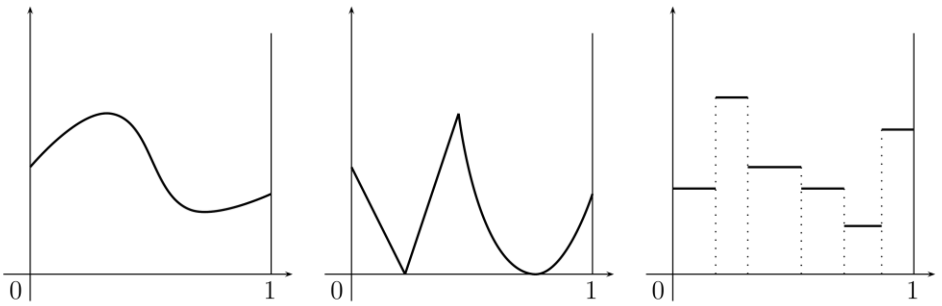
2) $L^{\perp} \cap \tilde{K} \neq \varnothing$ *(= существует мартингальная мера (усиленное условие)).*

Отметим, что вышеприведенные примеры 2 и 6 показывают, что в случае, когда конус K^* обладает непустой внутренностью $\mathring{K}^* \neq \varnothing$, выполняется $\mathring{K}^* \in \mathbf{K}^*_{\text{tot}} \cap \mathbf{K}^*_{\text{nan}}$. Поэтому из теоремы 5 для конечномерного пространства L, в частности, следует эквивалентность 1) и 2) в теореме 3.

Следующий рисунок иллюстрирует различия между теоремами 2, 3 и 5 с помощью конусов $\tilde{K}$ из примеров 5 и 9. Отметим, что в общей ситуации имеют место следующие связи между конусами $\tilde{L}_{\infty+}$ (теорема 2), $L_{\infty+}$ (теорема 3) и $\tilde{K}$ (примеры 5 и 9):

$$\tilde{L}_{\infty+} \underset{\neq}{\supset} \mathring{L}_{\infty+} \underset{\neq}{\supset} \tilde{K}.$$

Поэтому теорема 5 является наиболее сильным утверждением среди вышеупомянутых результатов.



$\mathring{L}_{\infty+}$ (т. 3) $\tilde{L}_{\infty+}$ (т. 2) $\tilde{K}$ (прим. 5 и 9; т. 5)

Подчеркнем, что свойство $\mathring{K}^* \neq \varnothing$ является довольно специальным (см. в связи с этим обсуждение этого свойства в [4, раздел 3]). Это свойство имеет место для конуса $L^*_{1+} = L_{\infty+}$ (2) (именно этот конус и используется в теореме 2). С другой стороны, если, например, мы рассматриваем аналогичные конусы L_{p+} неотрицательных функций в пространствах $L_p(\Omega, P)$, $1 \leq p < \infty$, то имеет место $\mathring{L}_{p+} = \varnothing$. Кроме того, для $1 \leq p < \infty$ мы имеем $L^*_{p+} = L_{q+}$, где $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ и мы полагаем $\frac{1}{\infty} = 0$. Заметим, однако, что для каждого конуса $K := L_{p+}$, $1 \leq p < \infty$ выполняется $\mathbf{K}^*_{\text{tot}} \cap \mathbf{K}^*_{\text{nan}} \neq \varnothing$. Действительно, например, следующие три конуса являются элементами этого множества:

а) $\tilde{K}_1 = \{Q \in L_{q+},\ Q \geq_{\text{a.e.}} 0\}$;

б) $\tilde{K}_2 = \{Q \in \tilde{K}_1,\ Q$ существенно отделена от нуля$\}$;

в) $\tilde{K}_3$ – конус простых положительных функций с конечными множествами значений.

Таким образом, из теоремы 5, в частности, вытекает следующий результат, который естественно рассматривать в качестве усиленной версии основной теоремы финансовой математики для p-суммируемых рынков.

Т е о р е м а 6 (основная теорема финансовой математики для p-суммируемых рынков). *Пусть* $K := L_{p+}$ *– конус неотрицательных функций в* $L_p(\Omega, P)$, $1 \leq p < \infty$, *и* $L \subset L_p(\Omega, P)$ *– конечномерное линейное подпространство. Тогда для каждого из вышеупомянутых конусов* $\tilde{K}_i$, $i = 1, 2, 3$, *следующие два условия эквивалентны:*

1) $L \cap K = \{0\}$ (= *арбитраж отсутствует*);

2) $L^{\perp} \cap \tilde{K}_i \neq \varnothing$ (= *существует мартингальная мера*).

В завершении отметим, что представленный материал естественным образом порождает вопрос: существует ли общее описание конусов K, обладающих свойством $K^*_{\text{tot}} \cap K^*_{\text{nan}} \neq \varnothing$?

Список использованных источников

1. Delbaen, F. The Mathematics of Arbitrage / F. Delbaen, W. Schachermayer. – Springer Finance, 2006. https://doi.org/10.1007/978-3-540-31299-4

2. Schachermayer, W. The fundamental theorem of asset pricing / W. Schachermayer // Encyclopedia of Quantitative Finance. – 2010. – N 2. – P. 792–801. https://doi.org/10.1002/9780470061602.eqf04002

3. Забрейко, П. П. Банахова геометрия моделей финансовых рынков / П. П. Забрейко, А. В. Лебедев // Докл. Акад. наук. – 2017. – Т. 473, № 5. – С. 517–520.

4. Lebedev, A. V. Banach geometry of arbitrage free markets / A. V. Lebedev, P. P. Zabreiko // Positivity. – 2021. – Vol. 25, N 2. – P. 679–699. https://doi.org/10.1007/s11117-020-00782-6

5. Follmer, H. Stochstic Finance: An Introduction in Discrete Time / H. Follmer, A. Schied. – 2nd rev. and extended ed. – Berlin; New York; Walter de Guyter, 2004. https://doi.org/10.1515/9783110212075

References

1. Delbaen F., Schachermayer W. *The Mathematics of Arbitrage*. Springer Finance, 2006. https://doi.org/10.1007/978-3-540-31299-4

2. Schachermayer W. Fundamental theorem of asset pricing. *Encyclopedia of Quantitative Finance*, 2010, no. 2, pp. 792–801. https://doi.org/10.1002/9780470061602.eqf04002

3. Zabreiko P. P., Lebedev A. V. Banach geometry of financial market models. *Doklady Mathematics*, 2017, vol. 95, no. 2, pp. 164–167. https://doi.org/10.1134/s106456241702020x

4. Lebedev A. V., Zabreiko P. P. Banach geometry of arbitrage free markets. *Positivity*, 2021, vol. 25, no. 2, pp. 679–699. https://doi.org/10.1007/s11117-020-00782-6

5. Follmer H., Schied A. *Stochstic Finance: An Introduction in Discrete Time*. 2nd rev. and extended ed. Berlin, New York, Walter de Guyter, 2004. https://doi.org/10.1515/9783110212075

Информация об авторах

Лебедев Андрей Владимирович – д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220050, Минск, Республика Беларусь). E-mail: lebedev@bsu.by.

Ромащенко Галина Станиславовна – канд. физ.-мат. наук, доцент. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220050, Минск, Республика Беларусь). E-mail: gal.romash@gmail.com.

Information about the authors

Lebedev Andrei V. – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220050, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: lebedev@bsu.by.

Romashchenko Galina S. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220050, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: gal.romash@gmail.com.