

**ИНФОРМАТИКА****INFORMATICS**

УДК 533.72+519.218.28

<https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-3-274-279>

Поступило в редакцию 30.04.2021

Received 30.04.2021

**Член-корреспондент П. С. Гринчук, С. П. Фисенко, А. И. Шнип***Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси,  
Минск, Республика Беларусь***МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ВАКЦИНАЦИИ  
НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭПИДЕМИИ COVID-19**

**Аннотация.** Предложена математическая модель на основе системы обыкновенных дифференциальных уравнений для описания влияния темпа вакцинации на распространение эпидемии типа COVID-19. Приведены результаты численного моделирования для случая, когда вакцинация начинается после начала распространения эпидемии. Получен безразмерный параметр вакцинации  $V$ , который позволяет количественно характеризовать влияние темпа вакцинации на снижение заболеваемости вирусными заболеваниями с различными уровнями вирулентности в большой замкнутой популяции людей. Введение этого параметра позволяет переносить результаты моделирования на популяции других размеров для разных скоростей распространения эпидемии, разных скоростей вакцинирования и разной эффективности вакцин. Показано, что увеличение параметра вакцинации  $V$  при прочих равных условиях приводит к снижению доли заболевшего населения. Показано также, что при постоянном темпе вакцинации ее влияние на распространение респираторного вирусного заболевания типа COVID-19 снижается при более позднем начале вакцинации. Результаты моделирования могут способствовать разработке оптимальных сценариев вакцинации населения.

**Ключевые слова:** коронавирус, COVID-19, вакцинация, математическое моделирование, численность популяции, коэффициент распространения

**Для цитирования.** Гринчук, П. С. Математическое моделирование влияния вакцинации на распространение эпидемии COVID-19 / П. С. Гринчук, С. П. Фисенко, А. И. Шнип // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2022. – Т. 66, № 3. – С. 274–279. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-3-274-279>

**Corresponding Member Pavel S. Grinchuk, Sergey P. Fisenko, Alexander I. Shnip***A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus***MATHEMATICAL MODELING OF THE VACCINATION INFLUENCE  
ON THE COVID-19 EPIDEMIC PROPAGATION**

**Abstract.** The mathematical model based on a system of ordinary differential equations is proposed to describe the effect of the vaccination rate on the spread of the COVID-19 epidemic. The results of numerical modeling are presented for the case when vaccination begins after the beginning of the epidemic. A dimensionless vaccination parameter  $V$  was obtained, which allows one to characterize the effect of the vaccination rate on the reduction of the incidence of viral diseases with different virulence levels in a large closed population of people. Introducing this parameter allows the simulation results to be generalized to the populations of different size, different epidemic spread rate, different vaccination rate, and different vaccine efficiency. It has been shown that increasing the parameter  $V$  decreases the proportion of the sick population. It follows from our model that the vaccination influence on the spread of a respiratory viral disease such as COVID-19 decreases for a later initiation of vaccination. The simulation results should contribute to the development of optimal vaccination scenarios for the population.

**Keywords:** coronavirus, COVID-19, vaccination, mathematical modeling, population size, distribution coefficient

**For citation.** Grinchuk P. S., Fisenko S. P., Shnip A. I. Mathematical modeling of the vaccination influence on the COVID-19 epidemic propagation. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2022, vol. 66, no. 3, pp. 274–279 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-3-274-279>

**Введение.** Новая пандемия стала как новым глобальным вызовом, требующим новых подходов для эффективного противодействия, так и открыла новые возможности для понимания процессов взаимодействия людей в больших сообществах. Благодаря тому, что оперативная статистическая информация о распространении COVID-19 является общедоступной, к проблеме активно подключились ученые, причем не только медики и биологи, но в том числе физики и математики. Например, в [1–3] были рассмотрены различные демографические, географические и физические аспекты, влияющие на распространение эпидемии COVID-19. Еще на начальной стадии развития эпидемии итальянскими учеными была обнаружена общая функциональная зависимость (pattern) в динамике распространения коронавируса для Китая, Франции и Италии [4]:

$$C(n+1) = \alpha[C(n)]^\beta.$$

Здесь  $C$  – количество заболевших в день  $n$  после начала эпидемии (в день начала эпидемии заболевает  $C(0)$  человек);  $\alpha$ ,  $\beta$  – константы, находящиеся в узком диапазоне значений для разных стран и сообществ ( $\alpha \approx 1,5–2,5$ ,  $\beta \approx 0,9–0,95$ ). Авторы данной работы показали, что эта функциональная зависимость со своими значениями коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  применима к описанию начальной стадии развития эпидемии коронавируса и в Республике Беларусь. Более того, авторы впервые предложили гипотезу о том, что корректное описание динамики распространения респираторной эпидемии в больших странах возможно при рассмотрении нескольких независимых волн эпидемии, одновременно распространяющихся в субпопуляциях с существенно разной плотностью населения [5]. Приближение трех одновременных волн для Республики Беларусь позволило построить беспрецедентный по точности прогноз на все лето 2020 года [5; 6]. Интересно отметить, что к аналогичной модели одновременных множественных волн пришла и другая исследовательская группа из Гарвардского университета (США) [7]. Эта работа была опубликована на один день позже препринта белорусской группы. Важно отметить и развитие другими отечественными группами альтернативных подходов для прогнозирования распространения эпидемии, основанных на методах математической статистики [8].

Характерной особенностью второго года развития эпидемии стало создание нескольких вакцин (Sputnik V и др.) и начало относительно массовой вакцинации населения. На вакцинацию возлагаются большие надежды с точки зрения остановки распространения вируса в отдельных странах. Через 2–3 месяца с начала вакцинации уже можно делать определенные выводы. Например, в ряде стран с началом вакцинации уровень заболеваемости COVID-19 стал падать (Великобритания, Израиль, ОАЭ). В других странах, несмотря на вакцинацию, заболеваемость COVID-19 продолжала расти (Франция, Германия, Италия) [9]. Мы полагаем, что скорость или темп вакцинации в данном случае играет существенную роль. В рамках данной работы мы изучаем модель, описывающую влияние темпа вакцинации на динамику развития заболеваемости коронавирусом в отдельной популяции. Важно отметить, что рассматривается вариант, когда вакцинация стартует уже после начала эпидемии, что отличает пандемию COVID-19. В этой работе представлены результаты численного моделирования влияния вакцинирования на распространение эпидемии.

**Математическая модель.** Основой математической модели является логистическое уравнение, широко применяемое для описания распространения эпидемий. На этом уравнении базируется ряд эпидемиологических моделей математической биологии, таких как SIR (Susceptible-Infectious-Recovered), SIRD (Susceptible-Infectious-Recovered-Dead) и др. Важно, что подобные модели, использовавшиеся ранее, не учитывают такой фактор, как вакцинация. Недавние попытки включения процесса вакцинации в модели распространения эпидемий [10; 11] носят все еще достаточно абстрактный характер. Новые модели включают в себя до 12 уравнений с большим количеством (до 30) эмпирических коэффициентов [11], что не позволяет существенно продвигаться в теоретическом анализе эпидемической ситуации.

С учетом вакцинации наша нелинейная математическая модель состоит из двух обыкновенных дифференциальных уравнений и включает в себя общепринятые в эпидемиологии параметры. Уравнение для числа заболевших людей  $y$  имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = R_0 y \left( 1 - \frac{y + N_v(t)}{N} \right). \quad (1)$$

Уравнение для числа вакцинированных людей также имеет простую форму

$$\frac{dN_v}{dt} = ca. \quad (2)$$

Здесь  $R_0$  – коэффициент распространения эпидемии;  $N$  – численность популяции;  $N_v(t)$  – число вакцинированных людей, не участвующих в передаче инфекции;  $c$  – эффективность вакцины ( $c < 1$ );  $a$  – число людей, получающих вакцину в сутки. В этой работе будем для простоты считать  $a$  постоянной во времени величиной. В практике массового вакцинирования  $a$  может меняться во времени.

В [1] было показано, характерное время распространения эпидемии  $\tau$

$$\tau = 1 / R_0,$$

и длительность эпидемии (без учета вакцинации)  $t_f$  приближенно выражается формулой

$$t_f \approx \ln N / R_0.$$

Из рассмотрения системы уравнений (1), (2) следует, что в задаче появляется еще одно характерное время  $\tau_v$

$$\tau_v = N / ac.$$

Параметр  $\tau_v$  – это характерное время вакцинации популяции.

Сделаем численную оценку  $\tau_v$  для популяции  $N = 2 \cdot 10^6$  человек. Если  $R_0 = 0,5$ , то  $\tau = 2$  дня и  $t_f \approx 29$  дней. При эффективности вакцины  $c = 0,8$  и скорости вакцинирования  $a = 10^4$  чел/день, имеем, что  $\tau_v = 25$  дней.

Из (1), (2) следует, что скорость распространения эпидемии достигает максимума при условии

$$y = 0,5(N - N_v(t)).$$

Это условие является обобщением результата в [1] и выполняется при любом значении  $R_0$ . Эпидемия заканчивается, если выполняется второе условие

$$y(t_f) + N_v(t_f) = N.$$

Для описания вакцинации во время эпидемии возникает естественный безразмерный параметр  $V$ , который можно назвать параметром вакцинации:

$$V = t_f / \tau_v \approx \frac{ac}{R_0} \frac{\ln N}{N}. \quad (3)$$

Если  $V = 0$ , то вакцинирование в популяции не проводится. Чем больше величина параметра  $V$ , тем большее влияние оказывает вакцинирование на распространение эпидемии. Обратим внимание, что безразмерный параметр  $V$  прямо пропорционален эффективности вакцины.

**Результаты расчетов.** Ниже приведены численные результаты моделирования системы уравнений (1), (2). Обратим внимание, что в наших расчетах предполагается, что вакцинирование началось на второй день эпидемии. Для численного решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений использовался пакет Mathcad 15.

На рис. 1 показано влияние вакцинации на распространение эпидемии. Заметим, что для выбранного размера популяции при скорости вакцинирования 10 000 или менее человек в день длительность эпидемии практически не изменилась по сравнению со временем распространения эпидемии в популяции при отсутствии вакцинации. Высокая скорость вакцинации существенно снижает число заболевших людей, снижает нагрузку на систему здравоохранения, и тем самым способствует снижению уровня смертности в популяции. Из результатов моделирования следует,

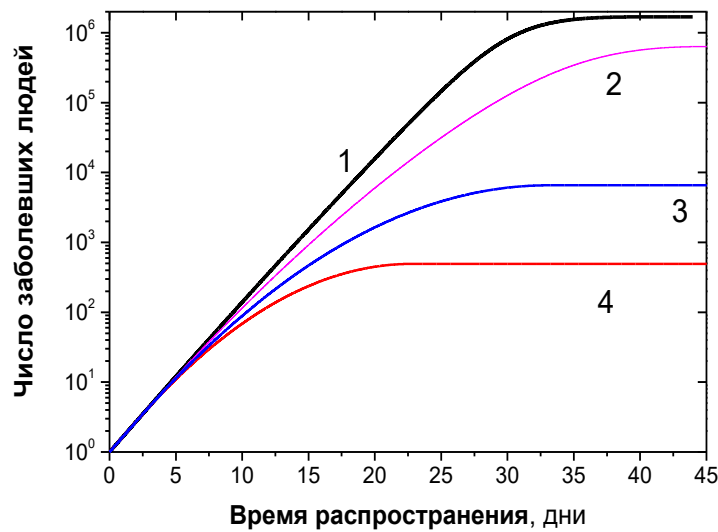


Рис. 1. Число заболевших людей в популяции 2 млн чел. при разной скорости вакцинации: 1 – скорость вакцинации 10 тыс. чел/день; 2 – 40 тыс. чел/день; 3 – 80 тыс. чел/день; 4 – 120 тыс. чел/день

Fig. 1. The number of sick people in a population of 2,000,000 people at different rates of vaccination: 1 – vaccination rate of 10,000 ppl/day; 2 – 40,000 ppl/day; 3 – 80,000 ppl/day; 4 – 120,000 ppl/day

что изменение темпа вакцинации приводит к монотонному изменению отклика всей популяции на количество инфицированных. При этом пороговых переходов не наблюдается ни при каких сочетаниях параметров.

На рис. 2 показана рассчитанная по модели (1), (2) доля заболевшего населения в зависимости от величины параметра  $V$ . Обратим внимание, что параметр  $V$  зависит не только от скорости вакцинации, но и от значения  $R_0$ . Таким образом, поддержание более низкого значения  $R_0$  за счет использования масок, соблюдения респираторного этикета и мер социального дистанцирования увеличивает значение  $V$  и снижает долю заболевших людей даже во время вакцинации.

Численные результаты о доле заболевших людей получены для  $N = 2 \cdot 10^6$  человек. Для другой популяции достижение такого же значения безразмерного параметра  $V$  при прочих равных условиях требует другой скорости вакцинации. Как следует из нашей модели, при постоянном

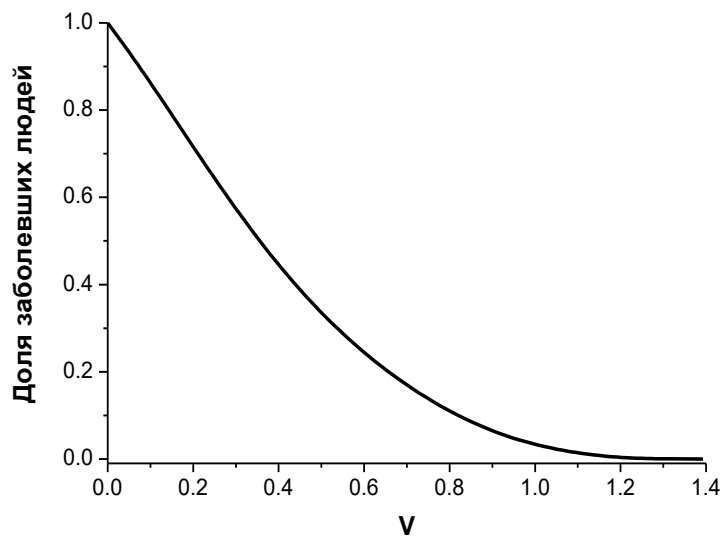


Рис. 2. Зависимость расчетной доли заболевшего населения от величины параметра вакцинации  $V$  (уравнение (3))

Fig. 2. Dependence of the estimated proportion of the diseased population on the value of the vaccination parameter  $V$  (eq. (3))

значении параметра вакцинации  $V$  соответствующая ему скорость вакцинации  $a$  нелинейно зависит от размера популяции  $a \sim N / \ln(N)$ .

**Закключение.** Построена математическая модель для описания влияния темпа вакцинации на распространение эпидемии типа COVID-19 в достаточно большой замкнутой популяции людей. Модель представляет собой систему обыкновенных дифференциальных уравнений, начальные условия для которых ставятся в разные моменты времени. Приведены результаты численного моделирования для случая, когда вакцинация начинается на второй день распространения эпидемии. Показано, что при постоянном темпе вакцинации ее влияние на распространение респираторного вирусного заболевания типа COVID-19 снижается при более позднем начале вакцинации.

Получен безразмерный параметр вакцинации  $V$ , который позволяет количественно характеризовать влияние темпа вакцинации конкретной вакциной (эффективность вакцины  $c$ ) на снижение заболеваемости вирусными заболеваниями с различными уровнями вирулентности (коэффициент распространения  $R_0$ ) в популяции заданного размера  $N$ . Введение этого параметра позволяет переносить результаты моделирования на популяции других размеров, разных скоростей распространения эпидемии, разных скоростей вакцинирования и разной эффективности вакцин. Показано, что уровень заболеваемости имеет обратную корреляцию с параметром вакцинации  $V$  – повышение этого параметра при прочих равных условиях приводит к снижению доли заболевшего населения.

Представляется важным обобщить модель на более сложные случаи, используя приближение трех групп населения, развитое в [1; 5].

**Благодарности.** Авторы признательны за поддержку БРФФИ (грант Т21КОВИД-033).

**Acknowledgements.** The authors are much grateful for the support of the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (Grant T21КОВИД-033).

### Список использованных источников

1. Grinchuk, P. S. Physical Kinetics and Simulation of the Spread of an Epidemic / P. S. Grinchuk, S. P. Fisenko // *J. Eng. Phys. Thermophys.* – 2021. – Vol. 94, N 1. – P. 1–5. <https://doi.org/10.1007/s10891-021-02267-z>
2. Shnip, A. I. Epidemic Dynamics Kinetic Model and Its Testing on the Covid-19 Epidemic Spread Data / A. I. Shnip // *J. Eng. Phys. Thermophys.* – 2021. – Vol. 94, N 1. – P. 6–17. <https://doi.org/10.1007/s10891-021-02268-y>
3. Isothermal Evaporation Rate of Deposited Liquid Aerosols and the SARS-CoV-2 Coronavirus Survival / P. S. Grinchuk [et al.] // *Aerosol Air Qual. Res.* – 2021. – Vol. 21, N 3. – Art. 200428. <https://doi.org/10.4209/aaqr.2020.07.0428>
4. Fanelli, D. Analysis and forecast of COVID-19 spreading in China, Italy and France / D. Fanelli, F. Piazza // *Chaos Soliton Fract.* – 2020. – Vol. 134. – Art. 109761. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109761>
5. Гринчук, П. С. Несколько одновременных волн в распространении COVID-19. Объяснение длительного плато [препринт] / П. С. Гринчук, С. П. Фисенко // *Preprints.ru.* – 2020. – 1 июня. <https://doi.org/10.24108/preprints-3112063>
6. Grinchuk, P. S. Power-law multi-wave model for COVID-19 propagation in countries with nonuniform population density [preprint] / P. S. Grinchuk, S. P. Fisenko // *arXiv.* – 2020. – 14 December. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.06383>
7. Kaxiras, E. Multiple epidemic wave model of the covid-19 pandemic: Modeling study / E. Kaxiras, G. Neofotistos // *Journal of Medical Internet Research.* – 2020. – Vol. 22, N 7. – Art. e20912. <https://doi.org/10.2196/20912>
8. Статистическое прогнозирование динамики эпидемиологических показателей заболеваемости COVID-19 в Республике Беларусь / Ю. С. Харин [и др.] // *Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика.* – 2020. – № 3. – С. 36–50. <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-36-50>
9. WHO Coronavirus (COVID-19) Dashboard [Electronic resource]. – Mode of access: <https://covid19.who.int/>. – Date of access: 02.04.2021.
10. Ehrhardt, M. SIR-based mathematical modeling of infectious diseases with vaccination and waning immunity / M. Ehrhardt, J. Gašper, S. Kilianová // *Journal of Computational Science.* – 2019. – Vol. 37. – Art. 101027. <https://doi.org/10.1016/j.jocs.2019.101027>
11. Martínez-Rodríguez, D. Analysis of key factors of a SARS-CoV-2 vaccination program: A mathematical modeling approach / D. Martínez-Rodríguez, G. Gonzalez-Parra, R. J. Villanueva // *Epidemiologia.* – 2021. – Vol. 2, N 2. – P. 140–161. <https://doi.org/10.3390/epidemiologia2020012>

### References

1. Grinchuk P. S., Fisenko S. P. Physical Kinetics and Simulation of the Spread of an Epidemic. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2021, vol. 94, no. 1, pp. 1–5. <https://doi.org/10.1007/s10891-021-02267-z>
2. Shnip A. I. Epidemic Dynamics Kinetic Model and its Testing on the Covid-19 Epidemic Spread Data. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2021, vol. 94, no. 1, pp. 6–17. <https://doi.org/10.1007/s10891-021-02268-y>

3. Grinchuk P. S., Fisenko K. I., Fisenko S. P., Danilova-Tretiak S. M. Isothermal Evaporation Rate of Deposited Liquid Aerosols and the SARS-CoV-2 Coronavirus Survival. *Aerosol and Air Quality Research*, 2021, vol. 21, no. 3, art. 200428. <https://doi.org/10.4209/aaqr.2020.07.0428>
4. Fanelli D., Piazza F. Analysis and forecast of COVID-19 spreading in China, Italy and France. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2020, vol. 134, art. 109761. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2020.109761>
5. Grinchuk P. S., Fisenko S. P. Several simultaneous waves of COVID-19. Explanation of long-time plateau [preprint]. *Preprints.ru*, 2020, 01 June (in Russian). <https://doi.org/10.24108/preprints-3112063>
6. Grinchuk P. S., Fisenko S. P. Power-law multi-wave model for COVID-19 propagation in countries with nonuniform population density [preprint]. *arXiv:2012.06383*, 2020, 14 December. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2012.06383>
7. Kaxiras E., Neofotistos G. Multiple epidemic wave model of the COVID-19 pandemic: Modeling study. *Journal of Medical Internet Research*, 2020, vol. 22, no. 7, art. e20912. <https://doi.org/10.2196/20912>
8. Kharin Yu. S., Valoshka V. A., Dernakova O. V., Malugin V. I., Kharin A. Yu. Statistical forecasting of the dynamics of epidemiological indicators for COVID-19 incidence in the Republic of Belarus. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2020, no. 3, pp. 36–50 (in Russian). <https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-3-36-50>
9. WHO Coronavirus (COVID-19) Dashboard. Available at: <https://covid19.who.int/> (accessed 02.04.2020).
10. Ehrhardt M., Gašper J., Kiliánová S. SIR-based mathematical modeling of infectious diseases with vaccination and waning immunity. *Journal of Computational Science*, 2019, vol. 37, art. 101027. <https://doi.org/10.1016/j.jocs.2019.101027>
11. Martínez-Rodríguez D., Gonzalez-Parra G., Villanueva R. J. Analysis of key factors of a SARS-CoV-2 vaccination program: A mathematical modeling approach. *Epidemiologia*, 2021, vol. 2, no. 2, pp. 140–161. <https://doi.org/10.3390/epidemiologia2020012>

### Информация об авторах

*Гринчук Павел Семенович* – член-корреспондент, д-р физ.-мат. наук, заведующий отделом. Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: [gps@hmti.ac.by](mailto:gps@hmti.ac.by).

*Фисенко Сергей Павлович* – д-р физ.-мат. наук, гл. науч. сотрудник. Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: [fsp@hmti.ac.by](mailto:fsp@hmti.ac.by).

*Шнип Александр Иванович* – канд. физ.-мат. наук, заведующий лабораторией. Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: [shnip@hmti.ac.by](mailto:shnip@hmti.ac.by).

### Information about the authors

*Grinchuk Pavel S.* – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Head of the Department. A. V. Lykov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [gps@hmti.ac.by](mailto:gps@hmti.ac.by).

*Fisenko Sergei P.* – D. Sc. (Physics and Mathematics), Chief Researcher. A. V. Lykov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [fsp@hmti.ac.by](mailto:fsp@hmti.ac.by).

*Shnip Alexander I.* – Ph. D. (Physics and Mathematics), Head of the Laboratory. A. V. Lykov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: [shnip@hmti.ac.by](mailto:shnip@hmti.ac.by).