ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.954 Поступило в редакцию 12.04.2022
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-4-391-396 Received 12.04.2022

Академик В. И. Корзюк[1], О. А. Ковнацкая[2], В. А. Севастюк[1]

[1]*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь*
[2]*Белорусский государственный университ, Минск, Республика Беларусь*

ЗАДАЧА ГУРСА НА ПЛОСКОСТИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация. Получено классическое решение задачи для квазилинейного гиперболического уравнения в случае двух независимых переменных с заданными для искомой функции условиями на характеристических линиях. Задача сводится к системе уравнений с вполне непрерывным оператором. Решение строится методом последовательных приближений. Проводятся обоснования. Кроме того, показывается для рассмотренной задачи единственность полученного классического решения. Доказаны необходимые и достаточные условия согласования заданных функций из рассмотренной в сообщении задачи, при выполнении которых классическое решение ее существует при наличии определенной гладкости заданных функций.

Ключевые слова: задача Гурса, квазилинейное уравнение, классическое решение, метод последовательных приближений, условия согласования

Для цитирования. Корзюк, В. И. Задача Гурса на плоскости для квазилинейного гиперболического уравнения / В. И. Корзюк, О. А. Ковнацкая, В. А. Севастюк // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2022. – Т. 66, № 4. – С. 391–396. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-4-391-396

Academician Viktor I. Korzyuk[1], Olga A. Kovnatskaya[2], Vladimir A. Sevastyuk[1]

[1]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*
[2]*Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus*

GOURSAT'S PROBLEM ON THE PLANE FOR A QUASILINEAR HYPERBOLIC EQUATION

Abstract. A classical solution of the problem for a quasilinear hyperbolic equation in the case of two independent variables with given conditions for the desired function on the characteristic lines is obtained. The problem is reduced to a system of equations with a completely continuous operator. We constructed the unique solution by the method of successive approximations and showed the necessary and sufficient smoothness and matching conditions on given functions.

Keywords: Goursat's problem, quasilinear equation, classical solution, method of successive approximations, matching conditions

For citation. Korzyuk V. I., Kovnatskaya O. A., Sevastyuk V. A. Goursat's problem on the plane for a quasilinear hyperbolic equation. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2022, vol. 66, no. 4, pp. 391–396 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-4-391-396

Введение. В [1, п. 4.6; 2] дается постановка задач для гиперболического уравнения двух независимых переменных, главная часть которого представлена во втором каноническом виде. Среди них задачи Гурса и Пикара. В [3; 4] авторами данного сообщения рассмотрены аналогичные задачи для одномерного волнового уравнения, когда условия для искомых функций заданы только на характеристиках или при наличии условия на одной из характеристик и на одной из нехарактеристических линий плоскости. Однако методика исследования классического решения в данном сообщении будет другой. В [3; 4] использовано представление общего решения для волнового уравнения. Здесь следует отметить и [5], в которой изучается классическое решение первой смешанной задачи в криволинейной полуполосе для уравнения типа волнового уравнения с переменными коэффициентами и неоднородным дифференциальным оператором.

Такого рода задачи, близкие к нашему сообщению, рассмотрены в [6–9]. Однако в данной работе решение рассматриваемой задачи найдено в аналитическом виде с помощью последовательных приближений непрерывно дифференцируемых функций. Особый интерес представляет случай, когда исходное уравнение задано на всей плоскости. Здесь присоединяются условия Дирихле, заданные на выбранных характеристиках уравнения.

Постановка задачи. На плоскости $\mathbb{R}^2$ независимых переменных $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2)$ рассмотрим квазилинейное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\mathcal{L}u(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{D}) = a(\boldsymbol{x})\partial_{x_1}^2 u + 2b(\boldsymbol{x})\partial_{x_1}\partial_{x_2}u + c(\boldsymbol{x})\partial_{x_2}^2 u + \mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, u, \partial_{x_1}u, \partial_{x_2}u) = f(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

относительно искомой функции $u:\mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$, где a, b, c, f – заданные функции на всей плоскости. Оператор $\mathcal{L}^{(1)}$ рассматриваем как функцию $\mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ от переменных $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, которая удовлетворяет следующему условию Липшица.

У с л о в и е 1. *Для любого* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ *существует константа* $L \in \mathbb{R}$, *для которой для любых* $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ *и* $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ *из* $\mathbb{R}^3$ *выполняется неравенство*

$$|\mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \xi) - \mathcal{L}^{(1)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\eta})| \le |\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\eta}|.$$

У с л о в и е 2. *На всей плоскости* $\mathbb{R}^2$ *уравнение (1) является гиперболическим, т. е. дискриминант, составленный из коэффициентов его главной части, является положительным, т. е.*

$$b^2(\boldsymbol{x}) - a(\boldsymbol{x})c(\boldsymbol{x}) \ge A > 0$$

для любого $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ *и некоторой положительной константы A из множества действительных чисел* $\mathbb{R}$.

Будем считать, что коэффициент $a(\boldsymbol{x}) \ne 0$ или $c(\boldsymbol{x}) \ne 0$ (если $a(\boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{x}) = 0$, то мы уже имеем второй канонический вид уравнения (1)). Из условия 2 следует, что (1) имеет два семейства характеристик $\varphi^{(1)}(\boldsymbol{x}) = C_1$ и $\varphi^{(2)}(\boldsymbol{x}) = C_2$, которые являются решениями соответствующего уравнения характеристик

$$a(\boldsymbol{x})(\mathrm{d}x_2)^2 - 2b(\boldsymbol{x})\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 + c(\boldsymbol{x})(\mathrm{d}x_1)^2 = 0. \tag{2}$$

К (1) присоединим условия Дирихле

$$u(\boldsymbol{x})|_{\gamma^{(1)}} = \psi^{(1)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \gamma^{(1)}, \tag{3}$$

$$u(\boldsymbol{x})|_{\gamma^{(2)}} = \psi^{(2)}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \gamma^{(2)}, \tag{4}$$

которые задаются на характеристиках $\gamma^{(1)} = \{\boldsymbol{x} \,|\, \varphi^{(1)}(\boldsymbol{x}) = C_1^{(0)}\}$ и $\gamma^{(2)} = \{\boldsymbol{x} \,|\, \varphi^{(2)}(\boldsymbol{x}) = C_2^{(0)}\}$, которые пересекаются в некоторой точке $\mathcal{M}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})$.

О п р е д е л е н и е. *Функцию и из класса* $C^2(\mathbb{R}^2)$ *назовем классическим решением задачи (1), (3), (4), если она удовлетворяет уравнению (1) и условиям (3), (4).*

Интегральное уравнение. Пусть $a(\boldsymbol{x}) \ne 0$ для любых независимых переменных $\boldsymbol{x}$ на плоскости $\mathbb{R}^2$ и заданные функции уравнения (1) достаточно гладкие, например, a, b, c, $\mathcal{L}^{(1)}$ являются функциями из класса $C^2(\mathbb{R}^2)$. Согласно условию 2 уравнение (2) имеет два семейства характеристик [1]

$$\varphi^{(j)}(\boldsymbol{x}) = C_j, \quad j = 1, 2.$$

Через полученные функции $\varphi^{(j)}$ делаем замену независимых переменных $\boldsymbol{y}$ через старые $\boldsymbol{x}$ по следующим формулам:

$$y_1 = \varphi^{(1)}(\boldsymbol{x}), \quad y_2 = \varphi^{(2)}(\boldsymbol{x}). \tag{5}$$

Замена (5) является невырожденной [1] и $y_j \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Следовательно, из (5) имеем обратную замену, т. е.

$$x_j = \tilde{\varphi}^{(j)}(\boldsymbol{y}), \quad j = 1, 2.$$

С помощью замены (5) относительно функции $v(\boldsymbol{y}) = u(\boldsymbol{x})$ уравнение (1) приведется ко второму каноническому виду [1]

$$\partial_{y_1}\partial_{y_2} v + \mathcal{L}^{(2)}(\boldsymbol{y}, v, \partial_{y_1} v, \partial_{y_2} v) = g(\boldsymbol{y}). \tag{6}$$

Условия (3), (4) преобразуются следующим образом:

$$v(y_1 = C_1^{(0)}, y_2) = \xi^{(1)}(y_2), \quad y_2 \in \mathbb{R}, \tag{7}$$

$$v(y_1, y_2 = C_2^{(0)}) = \xi^{(2)}(y_1), \quad y_1 \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

Так как замена (5) является невырожденной, т. е. якобиан не равен нулю для всех $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, то оператор $\mathcal{L}^{(2)}$ удовлетворяет условию 1, возможно с другой константой L.

Т е о р е м а 1. *Пусть функции a, b, c,* $\mathcal{L}^{(1)}$, $\psi^{(j)}$, $j = 1, 2$, *из класса* $C^2(\mathbb{R}^2)$, f *– из класса* $C^1(\mathbb{R}^2)$. *Если u является классическим решением задачи (1), (3), (4), то* $v(\boldsymbol{y}) = u(\boldsymbol{x})$ *является классическим решением задачи (6)–(8). И наоборот, классическое решение задачи (6)–(8) является классическим решением* $u(\boldsymbol{x}) = v(\boldsymbol{y})$ *задачи (1), (3), (4).*

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из того, что замена (5) является невырожденной, и того, что заданные функции рассматриваемой задачи (1), (3), (4) достаточно гладкие (последнее будет доказано позже при конструкции классического решения задачи (6)–(8)).

Так как u – классическое решение задачи (1), (3), (4), то

$$\psi^{(1)}(\boldsymbol{x}^{(0)}) = \psi^{(2)}(\boldsymbol{x}^{(0)}). \tag{9}$$

Следовательно, и для решения задачи (6)–(8) имеем условие согласования

$$\xi^{(1)}(C_2^{(0)}) = \xi^{(2)}(C_1^{(0)}). \tag{10}$$

Условие согласования (10) (условие (9)) является не только необходимым, но и достаточным условием существования классического решения задачи (1), (3), (4) (задачи (6)–(8)). Достаточность этих условий будет доказана при исследовании классического решения задачи (6)–(8).

Таким образом, рассматриваем классическое решение задачи (6)–(8). Вводим дополнительные обозначения и функции следующим образом:

$$\partial_{y_1} v(\boldsymbol{y}) = w^{(1)}(\boldsymbol{y}), \quad \partial_{y_2} v(\boldsymbol{y}) = w^{(2)}(\boldsymbol{y}).$$

Теперь уравнение (6) в новых обозначениях запишется в виде

$$\partial_{y_2} w^{(1)} + \mathcal{L}^{(2)}(\boldsymbol{y}, v, w^{(1)}, w^{(2)}) = g(\boldsymbol{y}) \tag{11}$$

или

$$\partial_{y_1} w^{(2)} + \mathcal{L}^{(2)}(\boldsymbol{y}, v, w^{(1)}, w^{(2)}) = g(\boldsymbol{y}). \tag{12}$$

Запишем уравнения (11), (12) в интегральном виде через функции $w^{(1)}$ и $w^{(2)}$, используя условия (7), (8). В результате получим систему интегральных уравнений второго рода

$$w^{(1)}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{d}\xi^{(2)}(y_1) + \int_{y_2^{(0)}}^{y_2} (g(y_1, z) - \mathcal{L}^{(2)}(y_1, z, v(y_1, z), w^{(1)}(y_1, z), w^{(2)}(y_1, z)))\mathrm{d}z,$$

$$w^{(2)}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{d}\xi^{(1)}(y_2) + \int_{y_1^{(0)}}^{y_1} (g(z, y_2) - \mathcal{L}^{(2)}(z, y_2, v(z, y_2), w^{(1)}(z, y_2), w^{(2)}(z, y_2)))\mathrm{d}z,$$

$$v(\boldsymbol{y}) = \xi^{(2)}(y_1) + \int_{y_2^{(0)}}^{y_2} w^{(2)}(y_1, z)\mathrm{d}z. \tag{13}$$

Т е о р е м а 2. *Задача (6)–(8) и система уравнений (13) эквивалентны, если* $v, a, b, c, \mathcal{L}^{(1)}$, $\psi^{(j)} \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $j = 1, 2$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

Т е о р е м а 3. *Если* $v, a, b, c, \mathcal{L}^{(1)}, \psi^{(j)} \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $j = 1, 2$, $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, *то существует единственное решение* $v, w^{(1)}, w^{(2)} \in C(\mathbb{R}^2)$ *системы уравнений (13), а также* $\partial_{y_1}\partial_{y_2} v \in C(\mathbb{R}^2)$ *и функция v является решением задачи (6)–(8).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим метод последовательных приближений. За нулевое приближение системы (13) возьмем $w_0^{(1)} = \mathrm{d}\xi^{(2)}$, $w_0^{(2)} = \mathrm{d}\xi^{(1)}$, $v_0 = \xi^{(2)}$. Следующие приближения вычисляются по формуле

$$w_k^{(1)}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{d}\xi^{(2)}(y_1) + \int_{y_2^{(0)}}^{y_2} (g(y_1, z) - \mathcal{L}^{(2)}(y_1, z, v_{k-1}(y_1, z), w_{k-1}^{(1)}(y_1, z), w_{k-1}^{(2)}(y_1, z)))\mathrm{d}z,$$

$$w_k^{(2)}(\boldsymbol{y}) = \mathrm{d}\xi^{(1)}(y_2) + \int_{y_1^{(0)}}^{y_1} (g(z, y_2) - \mathcal{L}^{(2)}(z, y_2, v_{k-1}(z, y_2), w_{k-1}^{(1)}(z, y_2), w_{k-1}^{(2)}(z, y_2)))\mathrm{d}z,$$

$$v_k(\boldsymbol{y}) = \xi^{(2)}(y_1) + \int_{y_2^{(0)}}^{y_2} w_{k-1}^{(2)}(y_1, z)\mathrm{d}z, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Пусть $\Omega^{(\lambda)} \subset \mathbb{R}^2$, $\lambda = 1, 2, \ldots,$ – подобласти в $\mathbb{R}^2$ такие, что $\bigcup_{\lambda=1}^{\infty} \Omega^{(\lambda)} = \mathbb{R}^2$, $\Omega^{(\lambda)} \subset \Omega^{(\tilde{\lambda})}$, $\lambda < \tilde{\lambda}$, $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$ – компактное множество в $\mathbb{R}^2$. Докажем равномерную сходимость последовательностей $\{w_k^{(1)}, w_k^{(2)}, v_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$.

Путем вычитания предыдущего приближения из последующего получим соотношения

$$\begin{gathered}
w_{k+1}^{(1)} - w_k^{(1)} = \\
= -\int_{y_2^{(0)}}^{y_2} (\mathcal{L}^{(2)}(y_1, z, v_k(y_1, z), w_k^{(1)}(y_1, z), w_k^{(2)}(y_1, z)) - \\
-\mathcal{L}^{(2)}(y_1, z, v_{k-1}(y_1, z), w_{k-1}^{(1)}(y_1, z), w_{k-1}^{(2)}(y_1, z)))\mathrm{d}z; \\
w_{k+1}^{(2)} - w_k^{(2)} = \\
= -\int_{y_1^{(0)}}^{y_1} (\mathcal{L}^{(2)}(z, y_2, v_k(z, y_2), w_k^{(1)}(z, y_2), w_k^{(2)}(z, y_2)) - \\
-\mathcal{L}^{(2)}(z, y_2, v_{k-1}(z, y_2), w_{k-1}^{(1)}(z, y_2), w_{k-1}^{(2)}(z, y_2)))\mathrm{d}z; \\
v_{k+1} - v_k = \int_{y_2^{(0)}}^{y_2} (w_k^{(2)} - w_{k-1}^{(2)})(y_1, z)\mathrm{d}z, \quad k = 1, 2, \ldots.
\end{gathered} \tag{14}$$

Покажем, что разности $|w_{k+1}^{(1)} - w_k^{(1)}|$, $|w_{k+1}^{(2)} - w_k^{(2)}|$, $|v_{k+1} - v_k|$ удовлетворяют неравенствам

$$|w_{k+1}^{(1)} - w_k^{(1)}|, |w_{k+1}^{(2)} - w_k^{(2)}|, |v_{k+1} - v_k| \le L^k B \frac{(y_1 + y_2 - y_1^{(0)} - y_2^{(0)})}{k!}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

где B – некоторая постоянная. При $k = 0$ неравенство (15) легко проверяется, так как

$$\begin{gathered}
w_1^{(1)} - w_0^{(1)} = -\int_{y_2^{(0)}}^{y_2} \mathcal{L}^{(2)}(y_1, z, \xi^{(2)}(y_1, z), \mathrm{d}\xi^{(2)}(y_1, z), \mathrm{d}\xi^{(1)}(y_1, z))\mathrm{d}z, \\
w_1^{(2)} - w_0^{(2)} = -\int_{y_1^{(0)}}^{y_1} \mathcal{L}^{(2)}(z, y_2, \xi^{(2)}(z, y_2), \mathrm{d}\xi^{(2)}(z, y_2), \mathrm{d}\xi^{(1)}(z, y_2))\mathrm{d}z,
\end{gathered} \tag{16}$$

$$v_1 - v_0 = \int_{y_2^{(0)}}^{y_2} \mathrm{d}\xi^{(1)}(z)\mathrm{d}z.$$

Оценка (15) сразу видна, если выбрать в (16) число B достаточно большим, которое зависит от функций $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$, $\mathcal{L}^{(2)}$ и размера области $\Omega^{(\lambda)}$. Из (14) для $k = 1, 2, \ldots$ имеем

$$|w_{k+1}^{(1)} - w_k^{(1)}| \le \int\limits_{y_2^{(0)}}^{y_2} L^{k-1} B \frac{(y_1 + z - y_1^{(0)} - y_2^{(0)})^{k-1}}{(k-1)!} \mathrm{d}z \le$$

$$\le L^k B \frac{(y_1 + z - y_1^{(0)} - y_2^{(0)})^k}{k!} \Big|_0^{y_2} \le L^k B \frac{(y_1 + y_2 - y_1^{(0)} - y_2^{(0)})^k}{k!}.$$

Аналогично оцениваются разности $|w_{k+1}^{(2)} - w_k^{(2)}|$ и $|v_{k+1} - v_k|$. Заметим, что

$$w_k^{(1)} = w_0^{(1)} + \sum_{j=1}^{k} (w_j^{(1)} - w_{j-1}^{(1)}), \quad w_k^{(2)} = w_0^{(2)} + \sum_{j=1}^{k} (w_j^{(2)} - w_{j-1}^{(2)}), \quad v_k = v_0 + \sum_{j=1}^{k} (v_j - v_{j-1}).$$

Из оценок (15) следует абсолютная и равномерная сходимость рядов

$$w_0^{(1)} + \sum_{k=1}^{\infty} (w_k^{(1)} - w_{k-1}^{(1)}), \quad w_0^{(2)} + \sum_{k=1}^{\infty} (w_k^{(2)} - w_{k-1}^{(2)}), \quad v_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (v_k - v_{k-1})$$

на компактном множестве $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$, члены которых по абсолютной величине меньше членов равномерно сходящегося ряда

$$B + B \sum_{k=0}^{\infty} L^k \frac{(y_1 + y_2 - y_1^{(0)} - y_2^{(0)})^k}{k!} = B(1 + e^{L(y_1 + y_2 - y_1^{(0)} - y_2^{(0)})}).$$

Таким образом, последовательные приближения $\{w_k^{(1)}, w_k^{(2)}, v_k\}$ на $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$ равномерно стремятся к непрерывным функциям $w^{(1)}, w^{(2)}, v : \mathbb{R}^2 \supset \overline{\Omega^{(\lambda)}} \ni \boldsymbol{y} \to w^{(1)}(\boldsymbol{y}), w^{(2)}(\boldsymbol{y}), v(\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}$ соответственно. Переходя к пределу в (14) при $k \to \infty$, получим, что $w_k^{(1)}, w_k^{(2)}, v_k$ являются решением системы (13).

Докажем единственность решения. Предположим, что существуют два решения системы (13) $w^{(1)}, w^{(2)}, v$ и $W^{(1)}, W^{(2)}, V$, $\tilde{w}^{(1)} = W^{(1)} - w^{(1)}$, $\tilde{w}^{(2)} = W^{(2)} - w^{(2)}$, $\tilde{v} = V - v$. Тогда

$$\tilde{w}^{(1)} = -\int\limits_{y_2^{(0)}}^{y_2} (\mathcal{L}^{(2)}(y_1, z, V(y_1, z), W^{(1)}(y_1, z), W^{(2)}(y_1, z)) -$$

$$-\mathcal{L}^{(2)}(y_1, z, v(y_1, z), w^{(1)}(y_1, z), w^{(2)}(y_1, z)))\mathrm{d}z,$$

$$\tilde{w}^{(2)} = -\int\limits_{y_1^{(0)}}^{y_1} (\mathcal{L}^{(2)}(z, y_2, V(z, y_2), W^{(1)}(z, y_2), W^{(2)}(z, y_2)) -$$

$$-\mathcal{L}^{(2)}(z, y_2, v(z, y_2), w^{(1)}(z, y_2), w^{(2)}(z, y_2)))\mathrm{d}z,$$

$$\tilde{v} = \int\limits_{y_2^{(0)}}^{y_2} \tilde{w}^{(2)}(y_1, z)\mathrm{d}z.$$

Функции $\tilde{w}^{(1)}, \tilde{w}^{(2)}, \tilde{v} \in C(\overline{\Omega^{(\lambda)}})$. Поэтому $|\tilde{w}^{(1)}|, |\tilde{w}^{(2)}|, |\tilde{v}| \le D$, D – некоторая постоянная. Из (16) имеем

$$|\tilde{w}^{(1)}(\boldsymbol{y})| \le \int\limits_{y_2^{(0)}}^{y_2} LD\mathrm{d}z \le LD(y_1 - y_1^{(0)}) \le LD \frac{y_1 + y_2 - y_1^{(0)} - y_2^{(0)}}{1!}.$$

Такие же оценки справедливы и для $\tilde{w}^{(2)}$ и $\tilde{v}$. Применяя метод математической индукции, получим

$$|\tilde{w}^{(1)}|, |\tilde{w}^{(2)}|, |\tilde{v}| \le L^k D \frac{(y_1 + y_2 - y_1^{(0)} - y_2^{(0)})^k}{k!}$$

для любого натурального k и любого $\boldsymbol{y} \in \overline{\Omega^{(\lambda)}}$. Отсюда следует, что $\tilde{w}^{(1)} \equiv \tilde{w}^{(2)} \equiv \tilde{v} \equiv 0$ в $\overline{\Omega^{(\lambda)}}$, если перейти к пределу при $k \to \infty$.

Таким образом, мы доказали утверждение теоремы 3 для системы (13) в подобласти $\Omega^{(\lambda)}$. Поскольку система $\{\Omega^{(\lambda)}\}_{\lambda=1}^{\infty}$ является покрытием плоскости $\mathbb{R}^2$, то отсюда получаем доказываемое утверждение теоремы 3 для системы (13). Теорема 3 доказана.

Список использованных источников

1. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики / В. И. Корзюк. – М., 2021. – 480 с.

2. Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. – М., 1970. – 712 с.

3. Корзюк, В. И. Решения задач для волнового уравнения с условиями на характеристиках / В. И. Корзюк, О. А. Ковнацкая // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 148–155. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-148-155

4. Корзюк, В. И. Задачи для одномерного волнового уравнения с условиями на характеристиках и нехарактеристических линиях / В. И. Корзюк, О. А. Ковнацкая, В. П. Сериков // Тр. Ин-та математики. – 2021. – Т. 29, № 1–2. – С. 106–112.

5. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения второго порядка в криволинейной полуполосе с переменными коэффициентами / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 53, № 1. – С. 77–88.

6. Миронов, А. Н. К методу Римана решения одной смешанной задачи / А. Н. Миронов // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер. физ.-мат. науки. – 2007. – № 2. – С. 27–32.

7. Наумов, О. Ю. Задача для уравнения колебания струны с производными по нормали на нехарактеристических частях границы треугольника и специальным условием сопряжения на характеристике / О. Ю. Наумов // Научные доклады ежегодной межвузовской 55 Научной конференции СамГПУ. – Самара, 2001. – С. 58–61.

8. Koeber, M. Inclusion of solutions of initial value problems for quasilinear hyperbolic equations / M. Koeber // Math. Res. – 1995. – Vol. 89. – P. 132–137.

9. Корзюк, В. И. Классические решения задач для гиперболических уравнений: курс лекций: в 10 ч. / В. И. Корзюк, И. С. Козловская. – Минск, 2017. – Ч. 1, 2.

References

1. Korzyuk V. I. *Equations of Mathematical Physics*. Moscow, 2021. 480 p. (in Russian).

2. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*. Moscow, 1970. 712 p. (in Russian).

3. Korzyuk V. I., Kovnatskaya O. A. Solutions of problems for the wave equation with conditions on the characteristics. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 148–155 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-148-155

4. Korzyuk V. I., Kovnatskaya O. A., Serikov V. P. Problems for a one-dimensional wave equation with conditions on characteristics and non-characteristic lines. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2021, vol. 29, no. 1–2, pp. 106–112 (in Russian).

5. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the first mixed problem for second-order hyperbolic equation in curvilinear half-strip with variable coefficients. *Differential Equations*, 2017, vol. 53, no. 1, pp. 74–85. https://doi.org/10.1134/s001226611701007

6. Mironov A. N. On the Riemann method for solving one mixed problem. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: fiziko-matematicheskie nauki* [Bulletin of the Samara State Technical University. Series: Physical and Mathematical Sciences], 2007, no. 2, pp. 27–32 (in Russian).

7. Naumov O. Yu. The problem for the string vibration equation with normal derivatives on noncharacteristic parts of the triangle boundary and a special conjugation condition on the characteristic. *Nauchnye doklady ezhegodnoy mezhvuzovskoy 55 Nauchnoy konferentsii Samarskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta* [Scientific reports of the annual interuniversity 55th Scientific Conference of the Samara State Pedagogical University]. Samara, 2001, pp. 58–61 (in Russian).

8. Koeber M. Inclusion of solutions of initial value problems for quasilinear hyperbolic equations. *Mathematical Research*, 1995, vol. 89, pp. 132–137.

9. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S. *Classical problem solutions for hyperbolic equations: A course of lectures in 10 parts*. Minsk, 2017, part 1, 2 (in Russian).

Информация об авторах

Корзюк Виктор Иванович – академик, д-р физ.-мат. наук, профессор. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by.

Ковнацкая Ольга Анатольевна – канд. физ.-мат. наук. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: Kovnatskaya@bsu.by.

Севастюк Владимир Александрович – ведущий инженер-программист. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь).

Information about the authors

Korzyuk Viktor I. – Academician, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by.

Kovnatskaya Olga A. – Ph. D. (Physics and Mathematics). Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: Kovnatskaya@bsu.by.

Sevastyuk Vladimir A. – Lead Software Developer. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus).