ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.925 Поступило в редакцию 04.05.2022
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-5-479-488 Received 04.05.2022

М. С. Белокурский

Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель, Республика Беларусь

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ И ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ С ЛИНЕЙНОЙ ОТРАЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИЕЙ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Аннотация. Исследуется уравнение Риккати с помощью метода отражающей функции Мироненко. Предварительно осуществляется построение класса уравнений Риккати, обладающих отражающей функцией определенного вида. В этом направлении, в частности, найдены необходимые и достаточные условия того, чтобы уравнение Риккати имело линейную по фазовой переменной отражающую функцию. Эти условия носят конструктивный характер, поскольку на их основе получена формула, которая выражает линейную по фазовой переменной отражающую функцию через коэффициенты уравнения Риккати. Дополнительно исследована зависимость между свойством четности (нечетности) коэффициентов уравнения Риккати и наличием у него линейной по фазовой переменной отражающей функции. Применение метода отражающей функции Мироненко к построенному классу уравнений Риккати позволило установить достаточные условия, при выполнении которых все его решения являются периодическими либо почти периодическими. Найден признак отсутствия периодических решений у почти периодических уравнений Риккати. Приведен пример квазипериодического уравнения Риккати с квазипериодической отражающей функцией, которое имеет периодическое решение.

Ключевые слова: отражающая функция Мироненко, периодическое решение, почти периодическое решение, уравнение Риккати, квазипериодическое решение, линейная отражающая функция

Для цитирования. Белокурский, М. С. Периодические и почти периодические решения уравнений Риккати с линейной отражающей функцией / М. С. Белокурский // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2022. – Т. 66, № 5. – С. 479–488. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-5-479-488

Maksim S. Belokursky

Francisk Skorina Gomel State University, Gomel, Republic of Belarus

PERIODIC AND ALMOST PERIODIC SOLUTIONS OF THE RICCATI EQUATIONS WITH LINEAR REFLECTING FUNCTION

(Communicated by Academician Nikolay A. Izobov)

Abstract. The method of Mironenko's reflecting function is used for investigation of Riccati equations. The class of Riccati equations with certain-type reflecting function has been preliminarily constructed. The necessary and sufficient conditions, under which the Riccati equation would have a reflecting function linear in phase variable, are proved. These conditions are constructive in nature, since on their basis the formula is obtained, which shows the linear in phase variable reflecting function in terms of the coefficients of the Riccati equation. Additionally, the relationship between the parity (oddness) property of the coefficients of the Riccati equation and the existence of a reflecting function linear in phase variable is investigated. The application of the method of Mironenko's reflecting function to the constructed class of Riccati equations revealed sufficient conditions, under which all its solutions are periodic or almost periodic. A sign of no periodic solutions for almost periodic Riccati equations is obtained. An example of the quasi-periodic Riccati equation with quasi-periodic reflecting function, which has a periodic solution, is given.

Keywords: Mironenko's reflecting function, periodic solution, almost periodic solution, Riccati equation, quasiperiodic solution, linear reflecting function

For citation. Belokursky M. S. Periodic and almost periodic solutions of the Riccati equations with linear reflecting function. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2022, vol. 66, no. 5, pp. 479–488 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-5-479-488

Введение. Метод отражающей функции является современным инструментом, который успешно применяется для качественного исследования дифференциальных уравнений. Так, отражающая функция позволяет судить о существовании и устойчивости периодических решений периодических дифференциальных систем, а также решать краевые задачи и исследовать проблему центра-фокуса [1–4]. Кроме фундаментальных исследований, отражающую функцию используют и в прикладных областях математики [5]. В последнее время особый интерес вызывают не только периодические, но и почти периодические решения дифференциальных уравнений и систем [6–8]. Интересные результаты удается получить в этой области с применением отражающей функции [9; 10].

Отражающая функция [11, c. 62] дифференциального уравнения определяется через общее решение в форме Коши $x = \varphi(t; t_0, x_0)$ по формуле $F(t, x) = \varphi(-t; t, x)$. Известно [11, c. 63], что функция $F(t, x)$ будет отражающей функцией дифференциальной системы с правой частью $X(t, x)$ тогда и только тогда, когда она удовлетворяет основному соотношению

$$F_t + F_x X(t, x) + X(-t, F) = 0, \quad F(0, x) \equiv x. \tag{1}$$

Несмотря на то что решить аналитически подавляющее большинство дифференциальных уравнений невозможно, разработаны методы, позволяющие строить отражающую функцию даже для тех уравнений, которые не интегрируются в квадратурах.

К таким дифференциальным уравнениям относится и уравнение Риккати, которое, как известно, в общем случае не интегрируется в квадратурах. Интерес к уравнениям Риккати обусловлен физической интерпретацией их решений. Например, в электродинамике слоистых сред, в теории многоволновых линий связи и в гидравлике трубопроводов решения уравнения Риккати описывают импеданс или коэффициент отражения, матрицу рассеяния электромагнитных волн и стохастическую матрицу диффузионного процесса [12, c. 6]. Кроме того, к уравнениям Риккати приводят такие задачи, как проблема приведения дифференциальных систем к системам с блочно-треугольной матрицей линейного приближения, а также задача оптимального управления для линейных систем с квадратичным критерием качества [13]. В [14] указан случай, когда с помощью метода отражающей функции можно найти начальные данные периодических решений уравнений Риккати.

В настоящей работе рассматриваются вопросы наличия и построения для уравнений Риккати отражающей функции наиболее простого вида – линейного по фазовой переменной. С помощью метода Мироненко получены условия существования периодических и почти периодических решений у периодических и почти периодических уравнений Риккати.

Существование линейной отражающей функции уравнения Риккати. Согласно [9] если уравнение Риккати имеет линейную отражающую функцию, то его старший коэффициент равен $b(t)e^{\beta(t)}$, где $b(t)$, $\beta(t)$ – нечетные непрерывно дифференцируемые функции. При этом мы считаем, что $b(t)$ может обращаться в нуль только в изолированных точках. Поэтому будем рассматривать уравнение Риккати вида

$$\dot{x} = b(t)e^{\beta(t)}x^2 + B(t)x + C(t), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

где $B(t), C(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Наряду с уравнением Риккати рассмотрим линейную по фазовой переменной x функцию

$$F(t, x) = f(t) + g(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

где $f(t), g(t)$ – дифференцируемые функции. Найдем условия на коэффициенты $B(t), C(t)$, необходимые и достаточные для того чтобы уравнение Риккати (2) имело линейную отражающую функцию вида (3). Справедлива

Т е о р е м а 1. *Пусть коэффициенты уравнения (2) непрерывно дифференцируемы на* $\mathbb{R}$. *Для того чтобы уравнение Риккати (2) имело линейную по фазовой переменной отражающую функцию, определенную на всей числовой прямой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) функция $\frac{e^{\beta(t)}}{2b(t)}(2\dot\beta(t)+B(t)+B(-t))$ *доопределяется до дифференцируемой на* $\mathbb{R}$ *функции* $f(t)$, которая обращается в нуль при $t=0$;

2) имеют место равенства

$$(2\dot\beta(t)+B(t)+B(-t))\left(-\frac{2\dot b(t)}{b(t)}+B(-t)-B(t)\right)+2(2\ddot\beta(t)+\dot B(t)-\dot B(-t))+ \\ +4b(t)(e^{\beta(t)}C(t)+e^{-\beta(t)}C(-t))=0,\quad t\in\mathbb{R}, \tag{4}$$

и

$$\dot\beta(0)+B(0)=0. \tag{5}$$

При этом линейная отражающая функция (3) имеет вид

$$F(t,x)=\frac{e^{\beta(t)}}{2b(t)}(2\dot\beta(t)+B(t)+B(-t))+e^{2\beta(t)}x. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы, согласно [11, с. 63], достаточно проверить основное соотношение (1) для отражающей функции (3), считая $X(t,x)=b(t)e^{\beta(t)}x^2+B(t)x+C(t)$. Подставим функцию (3) в первое равенство из (1):

$$\dot f(t)+\dot g(t)x+g(t)(b(t)e^{\beta(t)}x^2+B(t)x+C(t))-b(t)e^{-\beta(t)}(f(t)+g(t)x)^2+ \\ +B(-t)(f(t)+g(t)x)+C(-t)=0.$$

Раскрываем скобки и приводим подобные члены по степеням x:

$$(g(t)b(t)e^{\beta(t)}-g^2(t)b(t)e^{-\beta(t)})x^2+ \\ +(\dot g(t)+g(t)B(t)-2f(t)g(t)b(t)e^{-\beta(t)}+g(t)B(-t))x+ \\ +\dot f(t)+g(t)C(t)-f^2(t)b(t)e^{-\beta(t)}+f(t)B(-t)+C(-t)=0.$$

Функция (3) будет отражающей функцией уравнения (2) тогда и только тогда, когда записанное выше соотношение выполняется тождественно по t и x [11, с. 63]. В силу линейной независимости степеней x последнее тождество распадается на три соотношения:

$$g(t)b(t)e^{\beta(t)}-g^2(t)b(t)e^{-\beta(t)}=0, \\ \dot g(t)+g(t)B(t)-2f(t)g(t)b(t)e^{-\beta(t)}+g(t)B(-t)=0, \\ \dot f(t)+g(t)C(t)-f^2(t)b(t)e^{-\beta(t)}+f(t)B(-t)+C(-t)=0. \tag{7}$$

Основное соотношение (1) включает в себя также и начальное условие $F(0,x)\equiv x$, из которого следует, что $g(t)\not\equiv 0$. Тогда из первого равенства системы (7) находим

$$g(t)=e^{2\beta(t)}. \tag{8}$$

Действительно, в нашем случае функции $g(t)$ и $b(t)$ – дифференцируемы, а $b(t)$ даже непрерывно дифференцируемая. В тех точках, где $g(t)$ и $b(t)$ не обращаются в нуль, равенство (8) верно. В изолированных точках, где $g(t)b(t)=0$, это равенство также выполняется. В самом деле, если при $t=\tau_0$ $g(\tau_0)b(\tau_0)=0$, то при $t\ne\tau_0$, но близких к τ_0, мы в силу непрерывности $g(t)$ должны положить $g(\tau_0)=\lim\limits_{t\to\tau_0}g(t)=\lim\limits_{t\to\tau_0}e^{2\beta(t)}=e^{2\beta(\tau_0)}$.

Подставляя найденную функцию $g(t)$ в остальные соотношения системы (7), получаем систему

$$2\dot{\beta}(t)e^{2\beta(t)} + e^{2\beta(t)}B(t) - 2f(t)b(t)e^{\beta(t)} + e^{2\beta(t)}B(-t) = 0,$$
$$\dot{f}(t) + e^{2\beta(t)}C(t) - f^2(t)b(t)e^{-\beta(t)} + f(t)B(-t) + C(-t) = 0.$$

Из первого соотношения последней системы при $b(t) \neq 0$ выражаем функцию

$$f(t) = \frac{e^{\beta(t)}}{2b(t)}(2\dot{\beta}(t) + B(t) + B(-t)). \tag{9}$$

По предположению о существовании отражающей функции, существует функция, определенная и дифференцируемая на всем $\mathbb{R}$ и совпадающая с правой частью (9) при $b(t) \neq 0,$ а это и означает выполнение условия 1).

Далее подставляем функцию $f(t)$ во второе равенство последней системы, и после ряда несложных преобразований получаем условие (4). Условие $F(0, x) \equiv x$ для отражающей функции (3) принимает вид

$$f(0) = 0, \quad g(0) = 1.$$

Отсюда для найденных функций (8) и (9) имеем условие (5).

Подставляя функции (8) и (9) в (3), находим линейную отражающую функцию (6).

Остается отметить, что согласно [11, с. 63] основное соотношение для отражающей функции является как необходимым, так и достаточным условием для отражающей функции. Таким образом, основное соотношение выполнено, и теорема доказана.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = -2te^t x^2 - (2t\sin t + 1)x + e^{-t}\left(3t^5 - \frac{1}{2}\cos t\right). \tag{10}$$

Здесь $b(t) = -2t, \quad \beta(t) = t, \quad B(t) = -2t\sin t - 1, \quad C(t) = e^{-t}\left(3t^5 - \frac{1}{2}\cos t\right).$ Чтобы узнать, является ли отражающая функция уравнения (10) линейной, проверим справедливость условий теоремы 1.

Итак, первое условие:

$$\frac{e^t}{2(-2t)}(2 + (-2t\sin t - 1) + (-2t\sin t - 1)) = e^t \sin t.$$

Полученная функция является дифференцируемой и обращается в нуль при $t = 0,$ т. е. условие 1) выполнено. Второе условие:

$$(2 - 2t\sin t - 1 - 2t\sin t - 1)\left(-\frac{2(-2)}{-2t} - 2t\sin t - 1 + 2t\sin t + 1\right) + 4(-2)\left(e^t e^{-t}\left(3t^5 - \frac{1}{2}\cos t\right) + \right.$$
$$\left. + e^t e^{-t}\left(-3t^5 - \frac{1}{2}\cos t\right)\right) = -4t\sin t\left(\frac{-2}{t}\right) - 8\sin t - 8t\cos t - 8t(-\cos t) = 0.$$

Таким образом, условие (4) выполнено. Кроме этого,

$$\dot{\beta}(0) + B(0) = 1 + (0 - 1) = 0.$$

Следовательно, условие (5) также выполняется.

Значит уравнение (10) имеет линейную отражающую функцию, и ее можно построить по формуле (6):

$$F(t, x) = e^t \sin t + e^{2t} x.$$

Далее выясним связь между четностью или нечетностью коэффициентов $B(t), C(t)$ уравнения (2) и наличием у него линейной отражающей функции.

Согласно [9] все уравнения Риккати, имеющие линейную отражающую функцию вида (3), записываются в виде

$$\dot{x} = b(t)e^{\beta(t)}x^2 + (c(t) + \alpha(t)b(t) - \dot{\beta}(t))x + e^{-\beta(t)}\left(d(t) + \frac{1}{2}\alpha(t)c(t) - \frac{1}{2}\dot{\alpha}(t)\right), \tag{11}$$

где $c(t), d(t), \alpha(t)$ – произвольные непрерывно дифференцируемые нечетные функции. Отсюда

$$B(t) = c(t) + \alpha(t)b(t) - \dot{\beta}(t), \quad C(t) = e^{-\beta(t)}\left(d(t) + \frac{1}{2}\alpha(t)c(t) - \frac{1}{2}\dot{\alpha}(t)\right).$$

Пусть $C(t)$ является нечетной функцией. Тогда $\beta(t) \equiv 0$ и $\alpha(t) \equiv 0.$

В самом деле, функция $e^{-\beta(t)},$ вообще говоря, не является ни четной, ни нечетной. Поэтому для четности функции $C(t)$ необходимо, чтобы выполнялось тождество $\beta(t) \equiv 0.$ Кроме того, должно выполняться тождество $\alpha(t)c(t) - \dot{\alpha}(t) \equiv 0,$ из которого следует, что нечетная функция $\alpha(t)$ имеет вид $\alpha(t) = e^{\int c(t)dt}\text{const}.$ Последнее возможно лишь в том случае, когда $\alpha(t) \equiv 0.$ Тогда функция $B(t)$ имеет вид $B(t) = c(t).$ Следовательно, функция $B(t)$ – нечетная. При этом она может быть, в частности, и тождественным нулем, если $c(t) \equiv 0.$

Рассмотрим теперь случай, когда $C(t)$ является четной функцией. Тогда, аналогично тому, как показано в предыдущем случае, имеем тождество $\beta(t) \equiv 0.$ Поэтому

$$C(t) = d(t) + \frac{1}{2}\alpha(t)c(t) - \frac{1}{2}\dot{\alpha}(t).$$

Так как функция $d(t)$ – нечетная, то для четности функции $C(t)$ необходимо выполнение тождества $d(t) \equiv 0.$ Тогда для коэффициентов $C(t)$ и $B(t)$ получим представления

$$C(t) = \frac{1}{2}\alpha(t)c(t) - \frac{1}{2}\dot{\alpha}(t), \quad B(t) = c(t) + \alpha(t)b(t). \tag{12}$$

Отсюда возможны три случая. Если $c(t) \equiv 0,$ то $B(t)$ – четная функция. Если $c(t) \not\equiv 0,$ и произведение $\alpha(t)b(t)$ не тождественный ноль, то $B(t)$ не является ни четной, ни нечетной. Если же $c(t) \not\equiv 0,$ и произведение $\alpha(t)b(t) \equiv 0,$ то $B(t)$ – нечетная функция.

Таким образом доказана

Т е о р е м а 2. *Пусть коэффициенты $B(t)$ и $C(t)$ уравнения Риккати (2) непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}$ и отражающая функция уравнения (2) является линейной. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если коэффициент $C(t)$ – нечетная функция, то коэффициент $B(t)$ – нечетная функция;

2) если коэффициент $C(t)$ – четная функция, то коэффициент $B(t)$ – произвольная функция; в таком случае эти коэффициенты связаны соотношениями (12).

Периодические и почти периодические решения уравнения Риккати. Под периодом определенной на всей числовой оси функции $a(t)$ будем понимать такое действительное число $T > 0,$ что для всех значений переменной выполняется равенство $a(t+T) = a(t).$

Т е о р е м а 3. *Пусть коэффициенты $b(t),$ $\beta(t),$ $B(t),$ $C(t)$ уравнения Риккати (2) непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}$ и являются 2ω-периодическими. Если отражающая функция уравнения (2) линейная, то все его решения будут 2ω-периодическими.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть отражающая функция уравнения (2) является линейной. Тогда, согласно теореме 1, она имеет вид (6).

Так как, по условию, функции $b(t),$ $\beta(t),$ $B(t),$ $C(t)$ – 2ω-периодические, отражающая функция (6) будет 2ω-периодической по *t*. Тогда, согласно [11, с. 67], все решения уравнения (2) являются 2ω-периодическими. Теорема доказана.

Теорему 3 иллюстрирует уравнение

$$\dot{x} = x^2\sin t + x(e^{\cos t}\sin 2t + \sin t\sin 3t) + \frac{\sin 4t}{1+\cos^2 3t} + \frac{1}{2}e^{\cos t}\sin 2t\sin 3t - \frac{3}{2}\cos 3t,$$

коэффициенты которого являются 2π-периодическими, а отражающая функция является линейной и имеет вид $F(t,x) = x + \sin 3t.$ Отметим, что основным периодом отражающей функции является число $\dfrac{2\pi}{3}$, однако число 2π также является ее периодом. Поэтому по тереме 3 все решения этого уравнения будут 2π-периодическими.

Рассмотрим частные случаи линейной отражающей функции (6), определяемой теоремой 1. Если $\beta(t) \equiv 0,$ то отражающая функция (6) принимает вид

$$F(t, x) = \frac{B(t) + B(-t)}{2b(t)} + x, \tag{13}$$

а если $2\dot{\beta}(t) + B(t) + B(-t) \equiv 0,$ то

$$F(t, x) = e^{2\beta(t)} x. \tag{14}$$

У т в е р ж д е н и е. *Пусть уравнение Риккати (2) с непрерывно дифференцируемой правой частью имеет линейную отражающую функцию (13) или (14). Для того чтобы уравнение (2) имело хотя бы одно* 2ω*-периодическое решение* $x_0(t),$ *необходимо, чтобы линейная отражающая функция (13) или (14) была* 2ω*-периодической по t.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть уравнение (2) имеет 2ω-периодическое решение $x_0(t)$ и отражающая функция этого уравнения линейна и представима в виде (13). Согласно [11, с. 63] для любого решения $x(t)$ уравнения, имеющего отражающую функцию $F(t, x),$ справедливо тождество

$$F(t, x(t)) \overset{t}{\equiv} x(-t).$$

Тогда для решения $x_0(t)$ последнее тождество примет вид

$$\frac{B(t) + B(-t)}{2b(t)} + x_0(t) \overset{t}{\equiv} x_0(-t). \tag{15}$$

Так как 2ω является периодом решения $x_0(t),$ то из определения периодичности и тождества (15) следует, с одной стороны,

$$x_0(-t - 2\omega) \overset{t}{\equiv} \frac{B(t + 2\omega) + B(-t - 2\omega)}{2b(t + 2\omega)} + x_0(t + 2\omega) \overset{t}{\equiv} \frac{B(t + 2\omega) + B(-t - 2\omega)}{2b(t + 2\omega)} + x_0(t),$$

а с другой стороны,

$$x_0(-t - 2\omega) \overset{t}{\equiv} x_0(-t) \overset{t}{\equiv} \frac{B(t) + B(-t)}{2b(t)} + x_0(t).$$

Из последних двух тождеств получаем

$$\frac{B(t) + B(-t)}{2b(t)} + x_0(t) \overset{t}{\equiv} \frac{B(t + 2\omega) + B(-t - 2\omega)}{2b(t + 2\omega)} + x_0(t).$$

Следовательно,

$$\frac{B(t + 2\omega) + B(-t - 2\omega)}{2b(t + 2\omega)} \overset{t}{\equiv} \frac{B(t) + B(-t)}{2b(t)},$$

т. е. линейная отражающая функция (13) является 2ω-периодической.

Для случая линейной отражающей функции (14) доказательство аналогично. Таким образом, утверждение доказано.

Для линейной отражающей функции общего вида (6) утверждение неверно. Из утверждения следует, что уравнение (2) с линейной отражающей функцией вида (13) или (14) не имеет периодических решений, если эта отражающая функция не является периодической. С точки зрения задач, решаемых в данном сообщении, интерес представляет следующий результат.

С л е д с т в и е. *Пусть уравнение Риккати (2) с непрерывно дифференцируемыми и квазипериодическими коэффициентами имеет линейную квазипериодическую отражающую функцию (13) или (14), частотный базис которой содержит не менее двух частот. Тогда уравнение (2) не имеет периодических решений.*

З а м е ч а н и е. Следствие остается в силе и в случае почти периодической по t отражающей функции, отличной от периодической и почти периодического уравнения (2).

Чтобы показать, что следствие не имеет места для общего линейного случая отражающей функции вида (6), построим квазипериодическое уравнение Риккати с квазипериодической отражающей функцией и периодическим решением.

Согласно [9], если отражающая функция $F(t, x)$ какого-либо уравнения является линейной, то ее можно записать в виде $F(t, x) = \alpha(t)e^{\beta(t)} + e^{2\beta(t)}x,$ а любое решение уравнения с такой отражающей функцией имеет вид

$$x(t) = e^{-\beta(t)}\left(f(t) - \frac{1}{2}\alpha(t)\right), \tag{16}$$

где $f(t)$ – четная функция, удовлетворяющая некоторому соответствующему уравнению. Так, в случае уравнения Риккати (11) функция $f(t)$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{f} = b(t)f^2 + c(t)f + d(t) - \frac{1}{4}\alpha^2(t)b(t).$$

Возьмем линейную отражающую функцию

$$F(t, x) = 2e^{\sin\sqrt{2}t}\,\mathrm{sh}(\sin\sqrt{2}t - \sin t) + e^{2\sin\sqrt{2}t}x, \tag{17}$$

у которой $\alpha(t) = 2\,\mathrm{sh}(\sin\sqrt{2}t - \sin t),$ $\beta(t) = \sin\sqrt{2}t.$ Построим уравнение Риккати, которое имеет периодическое решение и линейную квазипериодическую по t отражающую функцию (17), которая, очевидно, не является периодической. Положим $f(t) = \mathrm{ch}(\sin\sqrt{2}t - \sin t).$ Непосредственной подстановкой можно убедиться, что функция $f(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{f} = f^2\sin\sqrt{3}t + f(\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t - \cos t)\,\mathrm{th}(\sin\sqrt{2}t - \sin t) -$$
$$-(1 + \mathrm{sh}^2(\sin\sqrt{2}t - \sin t))\sin\sqrt{3}t.$$

Используя структуру уравнения (11), в принятых обозначениях построим уравнение

$$\dot{x} = x^2 e^{\sin\sqrt{2}t}\sin\sqrt{3}t + x((\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t - \cos t)\,\mathrm{th}(\sin\sqrt{2}t - \sin t) +$$
$$+2\sin\sqrt{3}t\,\mathrm{sh}(\sin\sqrt{2}t - \sin t) - \sqrt{2}\cos\sqrt{2}t) + e^{-\sin\sqrt{2}t}(-\sin\sqrt{3}t +$$
$$+\mathrm{sh}(\sin\sqrt{2}t - \sin t)(\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t - \cos t)\,\mathrm{th}(\sin\sqrt{2}t - \sin t) -$$
$$-(\sqrt{2}\cos\sqrt{2}t - \cos t)\,\mathrm{ch}(\sin\sqrt{2}t - \sin t)),$$

решение которого находим по (16):

$$x(t) = e^{-\sin\sqrt{2}t}(\mathrm{ch}(\sin\sqrt{2}t - \sin t) + \mathrm{sh}(\sin\sqrt{2}t - \sin t)) = e^{-\sin\sqrt{2}t + \sin\sqrt{2}t - \sin t} = e^{-\sin t}.$$

Заметим, что согласно [12, с. 141] найденное решение позволяет проинтегрировать в квадратурах полученное уравнение Риккати.

Рассмотрим почти периодическое уравнение Риккати вида

$$\dot{y} = b(t)e^{\beta(t)}y^2 + (B(t) - 2b(t)e^{\beta(t)}\varphi(t))y + C(t) + \dot{\varphi}(t) + b(t)e^{\beta(t)}\varphi^2(t) - B(t)\varphi(t), \tag{18}$$

где функции $b(t),$ $\beta(t), B(t), C(t)$ – 2ω-периодические, а функция $\varphi(t)$ – почти периодическая.

Т е о р е м а 4. *Пусть коэффициенты уравнения Риккати (2) и функция* $\varphi(t)$ *непрерывно дифференцируемы на* $\mathbb{R}$. *Для того чтобы все решения* $y(t)$ *уравнения (18) были почти периодическими, достаточно, чтобы:*

1) функции $b(t),$ $\beta(t), B(t), C(t)$ *удовлетворяли условиям (4), (5);*

2) функции $b(t),$ $\beta(t), B(t), C(t)$ *были* 2ω*-периодическими, а функция* $\varphi(t)$ *– почти периодической.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнены условия теоремы. Покажем, что все решения (18) почти периодические. Для этого сделаем в (18) замену переменных $y(t) = x(t) + \varphi(t),$ где $x(t)$ – новая зависимая переменная. Тогда уравнение (18) примет вид

$$\dot{x}+\dot{\varphi}=b(t)e^{\beta(t)}(x^2(t)+2x(t)\varphi(t)+\varphi^2(t))+(B(t)-2b(t)e^{\beta(t)}\varphi(t))(x(t)+\varphi(t))+$$
$$+C(t)+\dot{\varphi}(t)+b(t)e^{\beta(t)}\varphi^2(t)-B(t)\varphi(t).$$

Откуда после приведения подобных членов получаем 2ω-периодическое уравнение (2).

По предположению для коэффициентов уравнения (2) выполняются условия (4) и (5). Значит, согласно теореме 1, (2) имеет линейную отражающую функцию. Следовательно, по теореме 3, все решения $x(t)$ уравнения (2) являются 2ω-периодическими. Возвращаясь к исходной переменной, находим решение $y(t)=x(t)+\varphi(t)$ уравнения (18).

В силу почти периодичности функции $\varphi(t)$ и периодичности функции $x(t)$ согласно [15, с. 27] полученное решение $y(t)$ уравнения (18) будет почти периодическим. Теорема доказана.

Уравнение

$$\dot{y}=y^2e^{\sin 2t}\sin t-y(\sin t-2\cos 2t-2e^{\sin 2t}\sin t(\sin\sqrt{3}t-e^{\cos\sqrt{2}t}))+\sqrt{3}\cos\sqrt{3}t+$$
$$+\sqrt{2}e^{\cos\sqrt{2}t}\sin\sqrt{2}t+e^{\sin 2t}\sin t(\sin\sqrt{3}t-e^{\cos\sqrt{2}t})^2-(\sin t-2\cos 2t)(\sin\sqrt{3}t-e^{\cos\sqrt{2}t}) \quad (19)$$

иллюстрирует теорему 4. Найдем коэффициенты $b(t)$, $\beta(t), B(t), C(t)$ уравнения (19) опираясь на строение уравнения (18). Так как $\dfrac{e^{\sin 2t}\sin t}{e^{\sin 2(-t)}\sin(-t)}=-e^{2\sin 2t}$, то $\beta(t)=\dfrac{1}{2}\ln(-(-e^{2\sin 2t}))=\sin 2t$. Следовательно, $b(t)=\dfrac{e^{\sin 2t}\sin t}{e^{\sin 2t}}=\sin t$. Поскольку $\dfrac{e^{\sin 2t}\sin t(\sin\sqrt{3}t-e^{\cos\sqrt{2}t})^2}{e^{\sin 2t}\sin t}=(\sin\sqrt{3}t-e^{\cos\sqrt{2}t})^2$, то $\varphi(t)=\sin\sqrt{3}t-e^{\cos\sqrt{2}t}$. Тогда $B(t)=\sin t-2\cos 2t$, $C(t)\equiv 0$. Проверим условия (4), (5):

$$(2\dot{\beta}(t)+B(t)+B(-t))\left(-\frac{2\dot{b}(t)}{b(t)}+B(-t)-B(t)\right)+2(2\ddot{\beta}(t)+\dot{B}(t)-\dot{B}(-t))+$$
$$+4b(t)(e^{\beta(t)}C(t)+e^{-\beta(t)}C(-t))=(4\cos 2t+\sin t-2\cos 2t-\sin t-2\cos 2t)\times$$
$$\times\left(-\frac{2\cos t}{\sin t}-\sin t-2\cos 2t-\sin t+2\cos 2t\right)+$$
$$+2(2(-4\sin 2t)+\cos t+4\sin 2t-\cos t+4\sin 2t)+4\sin t(e^{\sin 2t}\cdot 0+e^{-\sin 2t}\cdot 0)=0,$$
$$\dot{\beta}(0)+B(0)=2\cos 0+\sin 0-2\cos 0=0.$$

В (19) функции $b(t), \beta(t), B(t), C(t)$ – 2π-периодические, а функция $\varphi(t)=\sin\sqrt{3}t-e^{\cos\sqrt{2}t}$ является квазипериодической. Таким образом, все условия теоремы 4 выполнены, и значит, все решения уравнения (19) будут квазипериодическими с базисными частотами 2π, $\dfrac{2\pi}{\sqrt{2}}$, $\dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

Можно заметить, что после замены $y(t)=x(t)+\sin\sqrt{3}t-e^{\cos\sqrt{2}t}$ уравнение (19) принимает вид

$$\dot{x}=x^2e^{\sin 2t}\sin t-x(\sin t-2\cos 2t). \quad (20)$$

Отражающую функцию уравнения (20) находим по (6)

$$F(t,x)=e^{2\sin 2t}.$$

Так как и правая часть уравнения (20), и его отражающая функция являются 2π-периодическими, то согласно [11, с. 67] все решения уравнения (20) будут 2π-периодическими. Уравнение (20) является уравнением Бернулли, которое интегрируется в квадратурах. После подстановки найденных 2π-периодических решений $x(t)$ уравнения (20) в формулу $y(t)=x(t)+\sin\sqrt{3}t-e^{\cos\sqrt{2}t}$ получаем квазипериодические решения уравнения (19).

Решения уравнения (18) будут квазипериодическими и в случае, когда функция $\varphi(t)$ – Ω-периодическая при условии иррациональности отношения $\dfrac{2\omega}{\Omega}$. Если же периоды функций $b(t), \beta(t), B(t), C(t)$ и $\varphi(t)$ соизмеримы, то все решения уравнения (18) окажутся периодическими.

Заключение. Получены достаточные условия существования периодических, а также почти периодических решений уравнения Риккати. Стоит отметить, что исследование уравнения Риккати носит конструктивный характер, поскольку проведено с использованием коэффициентов и правой части уравнения и их свойств. Соответственно все условия содержат только их, в том числе и формула, по которой можно построить линейную отражающую функцию. Полученные результаты могут быть использованы как для дальнейших исследований в области качественной теории дифференциальных уравнений, так и для непосредственного применения в прикладных областях математики.

Список использованных источников

1. Мироненко, В. И. Классы систем с совпадающими отражающими функциями / В. И. Мироненко // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20, № 12. – С. 2173–2176.

2. Zhou, Z. Research on the properties of some planar polynomial differential equations / Z. Zhou // Appl. Math. Comput. – 2012. – Vol. 218, N 9. – P. 5671–5681. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.11.062

3. Zhou, Z. On the structure of the equivalent differential systems and their reflecting integrals / Z. Zhou // Bull. Braz. Math. Soc. (N. S.). – 2017. – Vol. 48, N 3. – P. 439–447. https://doi.org/10.1007/s00574-016-0026-4

4. Musafirov, E. V. Reflecting function and periodic solutions of differential systems with small parameter / E. V. Musafirov // Indian J. Math. – 2008. – Vol. 50, N 1. – P. 63–76.

5. Мусафиров, Э. В. Допустимые возмущения системы Лэнгфорда / Э. В. Мусафиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 3 (28). – С. 47–51.

6. Деменчук, А. К. О существовании частично нерегулярных почти периодических решений линейных неоднородных дифференциальных систем в одном критическом нерезонансном случае / А. К. Деменчук // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40, № 5. – С. 590–596.

7. Деменчук, А. К. О частично нерегулярных почти периодических решениях слабо нелинейных обыкновенных дифференциальных систем / А. К. Деменчук // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, № 8. – С. 1325–1333.

8. Zhang, C. Ergodicity and asymptotically almost periodic solutions of some differential equations / C. Zhang // Int. J. Math. Math. Sci. – 2001. – Vol. 25, N 12. – P. 787–801. https://doi.org/10.1155/s016117120100429x

9. Белокурский, М. С. Почти периодические решения почти периодического уравнения Абеля с линейной отражающей функцией / М. С. Белокурский // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4 (45). – С. 88–90.

10. Белокурский, М. С. Периодическая отражающая функция нелинейной квазипериодической дифференциальной системы с двухчастотным базисом / М. С. Белокурский, А. К. Деменчук // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49, № 10. – С. 1356–1360.

11. Мироненко, В. И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем / В. И. Мироненко. – Гомель, 2004. – 196 с.

12. Егоров, А. И. Уравнения Риккати / А. И. Егоров. – М., 2001. – 320 с.

13. Барис, Я. С. О взрывных решениях неавтономных квадратичных дифференциальных систем / Я. С. Барис, П. Я. Барис, Б. Рухлевич // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, № 3. – С. 302–307.

14. Мироненко, В. И. О периодических решениях уравнения Риккати / В. И. Мироненко // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 62–64.

15. Левитан, Б. М. Почти периодические функции / Б. М. Левитан. – М., 1953. – 396 с.

References

1. Mironenko V. I. Classes of systems with same reflecting functions. *Differentsial'nye Uravneniya = Differential Equations*, 1984, vol. 20, no. 12, pp. 2173–2176 (in Russian).

2. Zhou Z. Research on the properties of some planar polynomial differential equations. *Applied Mathematics and Computation*, 2012, vol. 218, no. 9, pp. 5671–5681. https://doi.org/10.1016/j.amc.2011.11.062

3. Zhou Z. On the structure of the equivalent differential systems and their reflecting integrals. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society. New Series*, 2017, vol. 48, no. 3, pp. 439–447. https://doi.org/10.1007/s00574-016-0026-4

4. Musafirov E. V. Reflecting function and periodic solutions of differential systems with small parameter. *Indian Journal of Mathematics*, 2008, vol. 50, no. 1, pp. 63–76.

5. Musafirov E. V. Admissible perturbations of Langford system. *Problemy Fiziki, Matematiki i Tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2016, no. 3 (28), pp. 47–51 (in Russian).

6. Demenchuk A. K. On the existence of partially irregular almost periodic solutions of linear nonhomogeneous differential systems in a critical nonresonance case. *Differential Equations*, 2004, vol. 40, no. 5, pp. 634–640. https://doi.org/10.1023/b:dieq.0000043521.06175.af

7. Demenchuk A. K. On partially irregular almost periodic solutions of weakly nonlinear ordinary differential systems. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2005, vol. 57, no. 8, pp. 1325–1333. https://doi.org/10.1007/s11253-005-0264-x

8. Zhang C. Ergodicity and asymptotically almost periodic solutions of some differential equations. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2001, vol. 25, no. 12, pp. 787–801. https://doi.org/10.1155/s016117120100429x

9. Belokursky M. S. Almost periodic solutions of the almost periodic Abel equation with linear reflecting function. *Problemy Fiziki, Matematiki i Tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2020, no. 4 (45), pp. 88–90 (in Russian).

10. Belokursky M. S., Demenchuk A. K. Periodic reflecting function of a nonlinear quasiperiodic differential system with a two-frequency basis. *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 10, pp. 1323–1327. https://doi.org/10.1134/s0012266113100145

11. Mironenko V. I. *Reflecting Function and the Research of Multidimensional Differential Systems*. Gomel, 2004. 196 p. (in Russian).

12. Egorov A. I. *Riccati Equations*. Moscow, 2001. 320 p. (in Russian).

13. Baris J. S., Baris P. J., Ruchlevich B. On blow-up solutions of nonautonomous quadratic differential systems. *Differential Equations*, 2006, vol. 42, no. 3, pp. 320–326. https://doi.org/10.1134/s0012266106030025

14. Mironenko V. I. On periodic solutions of Riccati equations. *Problemy Fiziki, Matematiki i Tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technics*, 2015, no. 2 (23), pp. 62–64 (in Russian).

15. Levitan B. M. *Almost periodic functions.* Moscow, 1953. 396 p. (in Russian).

Информация об авторе

Белокурский Максим Сергеевич – канд. физ.-мат. наук, доцент. Гомельский государственный университет им. Франциска Скорины (ул. Советская, 104, 246028, Гомель, Республика Беларусь). E-mail: drakonsm@ya.ru.

Information about the author

Belokursky Maksim S. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor. Francisk Skorina Gomel State University (104, Sovetskaya Str., 246028, Gomel, Republic of Belarus). E-mail: drakonsm@ya.ru.