ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

ИНФОРМАТИКА

INFORMATICS

УДК 519.8 Поступило в редакцию 04.05.2022
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-5-489-494 Received 04.05.2022

М. С. Баркетов

Объединенный институт проблем информатики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЙ РАНДОМИЗИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ ЗАДАЧИ «АСИММЕТРИЧНЫЙ КОММИВОЯЖЕР»

(Представлено членом-корреспондентом М. Я. Ковалевым)

Аннотация. Рассматривается задача «Асимметричный коммивояжер», в которой нужно найти обход вершин с минимальной суммарной стоимостью дуг в полном ориентированном графе. На задачу не накладывается неравенство треугольника. Для решения данной задачи построен рандомизированный алгоритм, у которого есть определенная гарантированная степень приближения. Вычислительная сложность алгоритма позволяет использовать данный алгоритм для компьютерных программ.

Ключевые слова: комбинаторная оптимизация, теория вероятностей, рандомизированный алгоритм, приближенный алгоритм, задача коммивояжера

Для цитирования. Баркетов, М. С. Полиномиальный рандомизированный алгоритм для задачи «Асимметричный коммивояжер» / М. С. Баркетов // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2022. – Т. 66, № 5. – С. 489–494. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-5-489-494

Maksim S. Barketau

Joint Institute for Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

POLYNOMIAL RANDOMIZED ALGORITHM FOR THE ASYMMETRIC TRAVELLING SALESMAN PROBLEM

(Communicated by Corresponding Member Mikhail Ya. Kovalev)

Abstract. The asymmetric travelling salesman problem without metric restrictions is considered. The randomized algorithm is proposed. It has a certain approximation guarantee and possesses a certain property regarding the probabilities of the tours built. The computational complexity of the algorithm is polynomial and affordable.

Keywords: combinatorial optimization, probability theory, randomized algorithm, approximation algorithm, asymmetric travelling salesman problem

For citation. Barketau M. S. Polynomial randomized algorithm for the asymmetric travelling salesman problem. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2022, vol. 66, no. 5, pp. 489–494 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2022-66-5-489-494

Введение. Рассматривается задача «Асимметричный коммивояжер». Дан полный ориентированный граф $G = G(V, A)$ с множеством вершин $V = \{1, 2, ..., n\}$ и множеством из $n(n-1)$ дуг $A = \{(u, v) \mid u, v \in V, u \neq v\}$. У каждой дуги есть неотрицательная стоимость $c(u, v) \geq 0$. Обходом (частичным обходом) называется перестановка множества (подмножества) вершин $(i_1, i_2, ..., i_n)$. Стоимостью обхода $c(i_1, i_2, ..., i_n)$ является значение

$$c(i_1, i_2, ..., i_n) = \sum_{j=2}^{n} c(i_{j-1}, i_j) + c(i_n, i_1).$$

Задача состоит в том, чтобы найти обход минимальной стоимости.

На задачу не накладывается метрических ограничений или неравенства треугольника. Без этих ограничений задача является трудной для приближения в детерминированном смысле. В данном сообщении мы предлагаем рандомизированный подход к задаче «Асимметричный коммивояжер». Других работ с рандомизированными алгоритмами для задачи «Асимметричный коммивояжер» авторам не известно.

Рандомизированные алгоритмы применялись для решения некоторых похожих задач. Наиболее успешным примером, вероятно, является задача «Евклидов коммивояжер» [1]. Однако задача «Евклидов коммивояжер» обладает лучшей степенью приближения, а именно, для нее построена полиномиальная приближенная схема. Отметим, что в [1] используется принципиально иной способ рандомизации, по сравнению с предложенным в данном сообщении.

В детерминированном случае для задачи «Асимметричный коммивояжер» наиболее исследованным является случай с метрическими ограничениями или с неравенством треугольника. Недавно для данной задачи было доказано существование полиномиального приближенного алгоритма с гарантированной константной степенью приближения [2]. Далее в литературе для детерминированного случая изложены относительно быстрые метаэвристические подходы для задачи «Асимметричный коммивояжер» с дополнительными ограничениями [3], и подходы точного решения для разных вариантов задачи [4].

В данной работе мы предлагаем рандомизированный алгоритм, который с вероятностью, стремящейся к 1 с ростом размерности задачи, находит обход, стоимостью не более стоимости $\left\lceil \frac{(n-1)!}{n^r} \right\rceil$-го обхода в упорядоченной по неубыванию стоимости последовательности всех обходов задачи (общее число которых $(n-1)!$), где r – некоторый параметр алгоритма. Отметим, что сложность алгоритма зависит от константы r в качестве показателя степени. Эта константа может быть определена достаточно небольшой (к примеру $r = 1$), что делает сложность алгоритма приемлемой для реального применения.

Рандомизированный алгоритм.

Алгоритм строит обход за $n+1$ шаг. На шаге 0 выбирается произвольная вершина графа i_1.

На шаге k, $1 \le k \le n$, генерируется k-я дуга обхода, начинающегося с вершины i_1.

Шаг 0. Фиксируется произвольная начальная вершина i_1 графа.

Шаг 1. Случайно генерируется дуга (i_1, x_1), где i_1 и x_1 – вершины графа, от вершины i_1 к одной из оставшихся вершин со следующими вероятностями:

$$P(x_1 = j) = p_j^{(i_1)}, \text{ если } j \in V \setminus i_1,$$

$$P(x_1 = j) = 0, \text{ в противном случае.}$$

Эти вероятности должны быть распределением, т. е. $\sum_{j \in V \setminus i_1} p_j^{(i_1)} = 1.$

Шаги со 2 до $n-1$. Допустим, зафиксировано $k-1$ первых дуг (или k первых вершин) частичного обхода $(i_1, i_2, ..., i_k)$. Тогда случайным образом генерируем исходящую из вершины i_k дугу к одной из оставшихся вершин со следующими вероятностями:

$$P(x_{k+1} = j \,|\, (i_1, i_2, ..., i_k)) = p_j^{(i_1, i_2, ..., i_k)}, \text{ если } j \in V \setminus \{i_1, i_2, ..., i_k\},$$

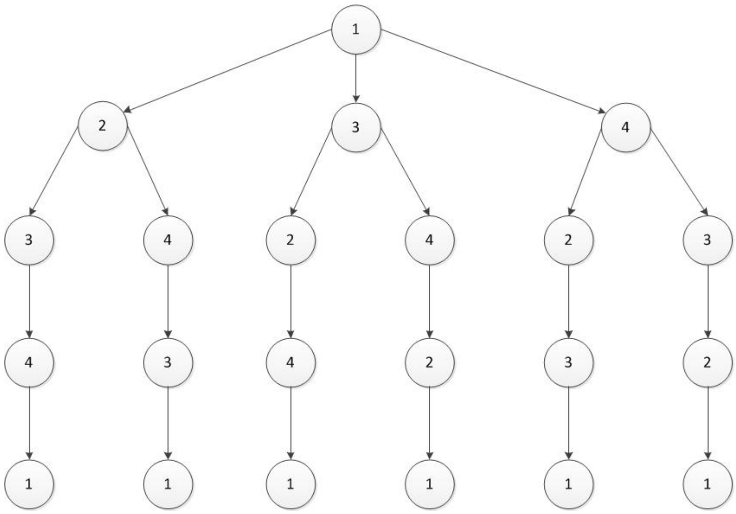
$$P(x_{k+1} = j) = 0, \text{ в противном случае.}$$

Эти вероятности должны быть распределением, т. е. $\sum_{j \in V \setminus \{i_1, i_2, ..., i_k\}} p_j^{(i_1, i_2, ..., i_k)} = 1.$

Запись $P(x_{k+1} = j \,|(i_1, i_2, ..., i_k))$ обозначает вероятность выбора следующей вершины j при наличии уже сгенерированного частичного обхода $(i_1, i_2, ..., i_k)$.

Шаг n. Добавить к частичному обходу дугу (i_n, i_1) с вероятностью 1.

Шаги 1 – n алгоритма являются фактически процессом построения ориентированного пути из корня дерева к его листу в некотором ориентированном выходящем дереве с корнем в вершине i_1. На следующем рисунке показан этот процесс на примере полного ориентированного графа на четырех вершинах.



Дерево решений

Decision tree

Все узлы в данном дереве распределены по уровням. Единственный узел нулевого уровня – это корень i_1. Все узлы k-го уровня имеют соответствие один к одному с частичными гамильтоновыми обходами длины k от вершины i_1 в исходном графе G. Фактически узел k-го уровня определяется соответствующим частичным обходом $(i_1, i_2, ..., i_k)$. Есть $n - k - 1$ дуг, заходящих в вершины $(i_1, i_2, ..., i_k, j)$, $j \in V \setminus \{i_1, i_2, ..., i_k\}$ $k+1$-го уровня из узла $(i_1, i_2, ..., i_k)$. Степень захода каждого узла в этом дереве равна 1 и дуги исходят только из узлов данного уровня к узлам следующего уровня. Листья дерева $(i_1, i_2, ..., i_n)$ соответствуют гамильтоновым обходам исходного графа. Вес дуги из узла $(i_1, i_2, ..., i_k)$ к узлу $(i_1, i_2, ..., i_{k+1})$ равен $c(i_k, i_{k+1})$. Таким образом, вес пути к листу равен весу соответствующего гамильтонова обхода.

Вспомогательные значения, необходимые для определения вероятностей в общей схеме. В данном разделе рассматривается следующая задача. Пусть дан частичный обход $(i_1, i_2, ..., i_k)$ в дереве алгоритма, где $k \le n$, или дан узел в выходящем дереве, который соответствует этому частичному обходу $(i_1, i_2, ..., i_k)$. Рассмотрим поддерево с корнем в этом узле. Обозначим его $T_{(i_1, i_2, ..., i_k)}$. Каждый лист этого поддерева соответствует гамильтонову обходу. Дополнительно нам дана дуга (u, v). Требуется определить как много гамильтоновых обходов, соответствующих листьям поддерева $T_{(i_1, i_2, ..., i_k)}$, содержат дугу (u, v).

Предлагается следующая процедура, вычисляющая это число, которое мы обозначим $N(T_{(i_1, i_2, ..., i_k)}, (u, v))$.

Рассмотрим граф $H = G(V, \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), ..., (i_{k-1}, i_k)\} \bigcup \{(u, v)\})$. Ясно, что если есть вершины графа H со степенью исхода или захода более или равной 2, то $N(T_{(i_1, i_2, ..., i_k)}, (u, v)) = 0$. Если среди компонент графа H есть цикл длины менее чем n, то $N(T_{(i_1, i_2, ..., i_k)}, (u, v)) = 0$.

Если множество $\{(i_1, i_2), (i_2, i_3), ..., (i_{k-1}, i_k)\} \bigcup \{(u, v)\}$ является гамильтоновым циклом, то тогда $N(T_{(i_1, i_2, ..., i_k)}, (u, v)) = 1$.

Граф H (после всех выше рассмотренных случаев) представляет собой дизъюнктивное объединение непересекающихся по вершинам простых путей либо изолированных вершин. Обозначим это множество через $P = \{P_1, P_2, ..., P_g\}$. Сейчас необходимо определить, как возможно объединить эти пути и изолированные вершины в один гамильтоновый обход. Понятно, что из этих путей мы можем построить $(g-1)!$ гамильтоновых обходов и, таким образом, $N(T_{(i_1, i_2, ..., i_k)}, (u, v)) = (g-1)!$ в этом случае.

Обозначим через $L(i_1, i_2, ..., i_k)$ множество всех гамильтоновых обходов, соответствующих листьям поддерева $T_{(i_1, i_2, ..., i_k)}$, и пусть $C(i_1, i_2, ..., i_k)$ – сумма стоимостей этих обходов. Тогда

$$C(i_1, i_2, ..., i_k) = \sum_{(j_1, j_2, ..., j_n) \in L(i_1, i_2, ..., i_k)} c(j_1, j_2, ..., j_n) = \sum_{(u, v) \in A} N(T_{(i_1, i_2, ..., i_k)}, (u, v)) c(u, v). \qquad (1)$$

Обсудим путь к уменьшению очевидной сложности $O(n^4)$ вычисления всех величин $C(i_1, i_2, ..., i_k, j),\ 1 \le k \le n-1,\ j \notin \{i_1, i_2, ..., i_k\}$.

Для вычисления величин $N(T_{(i_1, i_2, ..., i_k)}, (u, v))$ удобно поделить все возможные графы на несколько классов.

Класс 1. $(u, v) \notin \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), ..., (i_{k-1}, i_k)\}$.

Класс 1a. $u \in \{i_1, i_2, ..., i_{k-1}\}$ или $v \in \{i_2, i_3, ..., i_k\}$. В этом случае $N(T_{(i_1, i_2, ..., i_k)}, (u, v)) = 0$.

Класс 1b. $v = i_1, u \notin \{i_1, i_2, ..., i_k\}$ или $u = i_k, v \notin \{i_1, i_2, ..., i_k\}$. В этом случае $N(T_{(i_1, i_2, ..., i_k)}, (u, v)) = (n-k-1)!$

Класс 1c. $u, v \notin \{i_1, i_2, ..., i_k\}$. В этом случае $N(T_{(i_1, i_2, ..., i_k)}, (u, v)) = (n-k-1)!$

Класс 2. $(u, v) \in \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), ..., (i_{k-1}, i_k)\}$. В этом случае $N(T_{(i_1, i_2, ..., i_k)}, (u, v)) = (n-k)!$

Пусть $W = \{1a, 1b, 1c, 2\}$ – это множество всех рассмотренных выше классов. Пусть множество $A_{(i_1, i_2, ..., i_k)}{}^w$ обозначает множество дуг, которые попадают в класс $w \in W$ при вычислении значения $C(i_1, i_2, ..., i_k)$. Пусть далее $A_{(i_1, i_2, ..., i_{k-1}, i_k)}{}^{(w_1, w_2)}$ обозначает множество дуг, которые попадают в класс w_1 во время вычисления значения $C(i_1, i_2, ..., i_{k-1})$ и в класс w_2 во время вычисления значения $C(i_1, i_2, ..., i_{k-1}, i_k)$.

Пусть далее $R_{1a} = 0, R_{1b} = (n-k-1)!, R_{1c} = (n-k-1)!, R_2 = (n-k)!$

Возможно записать следующие выражения:

$$C(i_1, i_2, ..., i_k, j) = \sum_{w \in W} R_w c_w(i_1, i_2, ..., i_k, j),$$

где $c_w(i_1, i_2, ..., i_k, j) = \sum_{(u, v) \in A_{(i_1, ..., i_k, j)}{}^w} c(u, v)$.

Далее верны следующие рекуррентные соотношения:

$$c_w(i_1, i_2, ..., i_k, j) = c_w(i_1, i_2, ..., i_k) - \sum_{w_1 \ne w} \sum_{(u, v) \in A_{(i_1, ..., i_k, j)}{}^{(w, w_1)}} c(u, v) + \sum_{w_1 \ne w} \sum_{(u, v) \in A_{(i_1, ..., i_k, j)}{}^{(w_1, w)}} c(u, v).$$

Так как в каждом из множеств $A_{(i_1, ..., i_k, j)}{}^{(w, w_1)}$ не более $O(n)$ дуг, возможно подсчитать вторую и третью сумму за время $O(n)$.

Таким образом, можно подсчитать $c_w(i_1)$ для каждого $w \in W$ за время $O(n^2)$ используя (1) и каждое $c_w(i_1, i_2, ..., i_k, j)$, $w \in W$, считая, что уже подсчитаны $c_w(i_1, i_2, ..., i_k)$, $w \in W$, за время $O(n)$.

В общем, все значения $C(i_1, i_2, ..., i_k, j),\ 1 \le k \le n-1,\ j \notin \{i_1, i_2, ..., i_k\}$ могут быть подсчитаны за $O(n^3)$.

Определение вероятностей для общей схемы. Перед тем как определить вероятности для общей схемы трансформируем входные данные, в частности, определим по-другому стоимости дуг. А именно, положим $c'(u, v) = (1+\eta)c_{\max} - c(u, v), (u, v) \in A$, где $c_{\max} = \max\{c(u, v) \mid (u, v) \in A\}$ – это максимальный вес дуги; η – некоторая константа меньше 1.

Пусть $x_1 \le x_2 \le ... \le x_{(n-1)!}$ – это упорядоченная последовательность стоимостей всех решений для исходного входа. Пусть y_i – это стоимость i-го решения в этой последовательности, но с трансформированными стоимостями. Тогда, очевидно, выполняется

$$y_1 \ge y_2 \ge ... \ge y_{(n-1)!}.$$

Сейчас, предполагаем, что наша задача рассматривается с трансформированными стоимостями дуг и используется исходное обозначение стоимости дуги $c(u, v)$ для трансформированных стоимостей.

Установим вероятности $p_j^{(i_1, i_2, ..., i_k)}$ для общей схемы:

$$p_j^{(i_1, i_2, ..., i_k)} = \frac{C(i_1, i_2, ..., i_k, j)}{C(i_1, i_2, ..., i_k)}, \; j \in V \setminus \{i_1, ..., i_k\}, \quad (2)$$

где $C(i_1, i_2, ..., i_k)$ – сумма стоимостей всех гамильтоновых обходов, соответствующих листьям поддерева $T_{(i_1, i_2, ..., i_k)}$, см. раздел «Вспомогательные значения, необходимые для определения вероятностей в общей схеме».

Устанавливая вероятности для общей схемы в соответствии с (2), определяем следующие вероятности гамильтонова обхода:

$$P(i_1, ..., i_n) = \prod_{l=1}^{n-1} p_{i_{l+1}}^{(i_1, ..., i_l)} = \prod_{l=1}^{n-1} \frac{C(i_1, ..., i_l, i_{l+1})}{C(i_1, ..., i_l)} = \frac{c(i_1, i_2, ..., i_n)}{C(i_1)}. \quad (3)$$

Таким образом, вероятность гамильтонова обхода тем выше, чем выше его трансформированная стоимость.

Отметим, что одно выполнение рандомизированного алгоритма с этими вероятностями требует выполнения $O(n^3)$ операций, см. раздел «Вспомогательные значения, необходимые для определения вероятностей в общей схеме».

Алгоритм. Напомним, что $x_1 \le x_2 \le ... \le x_{(n-1)!}$ – это последовательность стоимостей решений, а $y_1 \ge y_2 \ge ... \ge y_{(n-1)!}$ – последовательность трансформированных стоимостей решений для той же последовательности решений, см. предыдущий раздел. Так как в соответствии с (3) вероятность получения гамильтонова обхода в результате запуска рандомизированного алгоритма пропорциональна его трансформированной стоимости, то первые $\left\lceil \frac{(n-1)!}{n^r} \right\rceil$ обхода в приведенной выше последовательности имеют наибольшие вероятности и одновременно наименьшие стоимости. Таким образом, сумма вероятностей этих первых обходов не менее $1/n^r$.

Организуем $\left\lceil n^{r+1} \right\rceil$ независимых запусков рандомизированного алгоритма с вероятностями, определенными в предыдущем разделе. В соответствии с вышесказанным, вероятность получения хотя бы одного обхода из первых $\left\lceil \frac{(n-1)!}{n^r} \right\rceil$ с наименьшей стоимостью не меньше чем $1-(1-1/n^r)^{n^{r+1}}$. Это количество сходится к $1-(1-1/n^r)^{n^{r+1}} \to 1-\frac{1}{e^n}$ с ростом *n*.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Т е о р е м а. *Общая схема из раздела «Рандомизированный алгоритм», ее параметры, определенные в разделе «Определение вероятностей общей схемы», и независимые запуски алгоритма, данного в этом разделе с выбором наилучшего полученного решения, все вместе являются рандомизированным алгоритмом сложности* $O(n^{4+r})$, *где r – это некоторый параметр алгоритма. С вероятностью, сходящейся к числу не менее* $1-1/e^n$, *обход, найденный этим алгоритмом, находится среди первых* $\left\lceil \frac{(n-1)!}{n^r} \right\rceil$ *обходов с наименьшей стоимостью.*

Заключение. В этом сообщении мы предложили рандомизированный алгоритм для задачи «Асимметричный коммивояжер» без метрического ограничения. Вычислительная сложность алгоритма приемлема для реального применения. Основой алгоритма является комбинаторное вычисление вероятностей общей вероятностной схемы. Отметим некоторые вещи. Во-первых, оценка, данная в теореме, это оценка для худшего случая, а именно для случая, когда стоимости всех дуг равны или для случая равновероятностной схемы. Для большинства примеров алгоритм, вероятно, обладает лучшей приближающей силой. Во-вторых, качество приближения алгоритма зависит от стоимостей примера. Из-за трансформации входа, чем больше стоимость максимальной дуги отличается от стоимостей других дуг, тем больше приближение алгоритма стремится к равновероятностному случаю.

Благодарности. Работа выполнена при частичной поддержке БРФФИ (проект Ф21-010).

Acknowledgments. This work was supported in part by the BRFFR (project Ф21-010).

Список использованных источников

1. Arora, S. Polynomial time approximation schemes for Euclidean TSP and other geometric problems / S. Arora // Proceedings of 37th Conference on Foundations of Computer Science. – 1996. – P. 2–11. https://doi.org/10.1109/sfcs.1996.548458

2. Svensson, O. Approximating ATSP by relaxing connectivity / O. Svensson // IEEE 56th Annual Symposium on Foundations of Computer Science. – 2015. – P. 1–19. https://doi.org/10.1109/focs.2015.10

3. Burke, E. Effective local and guided variable neighbourhood search methods for the asymmetric travelling salesman problem / E. Burke, P. Cowling, R. Keuthen // Workshops on Applications of Evolutionary Computation. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2001. – P. 203–212. https://doi.org/10.1007/3-540-45365-2_21

4. Fischetti, M. Exact methods for the asymmetric traveling salesman problem / M. Fischetti, A. Lodi, P. Toth // The traveling salesman problem and its variations. – Boston, MA: Springer, 2007. – P. 169–205. https://doi.org/10.1007/0-306-48213-4_4

References

1. Arora S. Polynomial time approximation schemes for Euclidean TSP and other geometric problems. *Proceedings of 37th Conference on Foundations of Computer Science*, 1996, pp. 2–11. https://doi.org/10.1109/sfcs.1996.548458

2. Svensson O. Approximating ATSP by relaxing connectivity. IEEE 56th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 2015, pp. 1–19. https://doi.org/10.1109/focs.2015.10

3. Burke E., Cowling P., Keuthen R. Effective local and guided variable neighbourhood search methods for the asymmetric travelling salesman problem. *Workshops on Applications of Evolutionary Computation.* Berlin, Heidelberg, 2001, pp. 203–212. https://doi.org/10.1007/3-540-45365-2_21

4. Fischetti M., Lodi A., Toth P. Exact methods for the asymmetric traveling salesman problem. *The traveling salesman problem and its variations.* Boston, MA, 2007, pp. 169–205. https://doi.org/10.1007/0-306-48213-4_4

Информация об авторе

Баркетов Максим Сергеевич – канд. физ.-мат. наук, доцент, ст. науч. сотрудник. Объединенный институт проблем информатики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 6, 220012, Минск, Республика Беларусь). E-mail: barketau@mail.ru.

Information about author

Barketau Maksim S. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Senior Researcher. United Institute of Informatics Problems of the National Academy of Sciences of Belarus (6, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: barketau@mail.ru.