Доклады Национальной академии наук Беларуси

2016 **январь–февраль** **Том 60 № 1**

УДК 524.6;531

Член-корреспондент Л. М. ТОМИЛЬЧИК

ВЗАИМНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ, ПРИНЦИП МАКСИМАЛЬНОГО НАТЯЖЕНИЯ И КОМПЛЕКСНАЯ ГРУППА ЛОРЕНЦА КАК СИММЕТРИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь
lmt@dragon.bas-net.by

Предложена квазиньютонова модель взаимноинвариантной Гамильтоновой динамики гравитирующих масс, удовлетворяющая принципу максимального натяжения Гиббонса. Симметрия модели определяется комплексной группой Лоренца с вещественной метрикой (группа Барута). Единственным свободным параметром, определяющим пространственно-временные, импульсно-энергетические масштабы, а также частотные характеристики модели, является масса модельного объекта типа гармонического осциллятора. При этом воспроизводится классический аналог шредингеровского «дрожания» (Zitterbewegung). В предельном случае массы Вселенной модель соответствует «осциллирующему» (cyclic) варианту традиционной космологии. Наличие предела Гиббонса приводит к универсальной связи между плотностью энергии и темпом космологического расширения, а также к существованию верхнего и нижнего пределов этих величин. Квантовая версия приводит к модели осциллятора Дирака для фермиона с массой Планка.

Ключевые слова: взаимная симметрия, максимальная сила, группа Барута, расширенное фазовое пространство, Гамильтонова динамика, осциллятор Дирака.

L. M. TOMILCHIK

RECIPROCAL INVARIANT, MAXIMUM TENSION PRINCIPLE, AND THE LORENTZ COMPLEX GROUP AS THE SYMMETRY OF GRAVITATIONAL INTERACTION

B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
lmt@dragon.bas-net.by

The quasi-Newtonian model of the reciprocal invariant Hamiltonian dynamics of gravitating masses, which obeys the Gibson maximum tension principle, is proposed. The symmetry of the model is defined by the Lorentz complex group with real metric. The mass of a model object is the only free parameter that defines space-time momentum-energy scales as well as frequency characteristics of the model. In the case of small masses there appears the classical analog of the Schrödinger "bouncing" (Zitterbewegung). In the limiting case of the Universe mass the model reproduces the "cyclic" variant of traditional cosmology. The availability of Gibbon's limit results both in a universal relationship between energy density and cosmological expansion rate, as well as in the existence of the upper and lower limits of these quantities.

Keywords: reciprocal symmetry, maximum force, Barut group, extended phase space, Hamiltonian dynamics, Dirac oscillator.

Введение. В настоящее время предпринимаются попытки использовать идеи взаимной инвариантности, высказанные в свое время Борном [1; 2], применительно к проблемам космологии. Например, в работах [3; 4] предложена взаимно-симметричная модель описания Вселенной на планковских масштабах. Ключевой момент подхода Борна состоял в объединении координатных и импульсных метрических Лоренц-инвариантов в рамках единой взаимно-симметричной метрической структуры. Для такого объединения требуется наличие универсальной константы, имеющей размерность *импульс/длина* или *энергия/время*. Ввиду отсутствия подобного рода константы программа Борна оказалась реализованной лишь частично.

С другой стороны, Гиббонсом в 2002 г. [5] сформулирован *принцип максимального натяжения* (Maximum Tension Principle – MTP) – утверждение о существовании в Природе верхнего предела для производной по времени от энергии-импульса (т. е. максимально достижимых значений мощности и силы), численная величина которого определяется обратной величиной гравитационной константы Эйнштейна. В дальнейшем для краткости будем называть соответствующие величины *пределом Гиббонса*. Концепция Гиббонса позволяет не только выразить в одной размерности импульсные и координатные переменные, входящие в метрический инвариант Борна, но также идентифицировать его в качестве метрического инварианта комплексной группы Лоренца с вещественной метрикой. Эта группа, впервые рассмотренная Барутом [6] вне связи со взаимной симметрией, впоследствии широко исследовалась в качестве группы симметрии само-взаимного квантовомеханического уравнения Борна применительно к феноменологическим моделям сильных взаимодействий. В дальнейшем для краткости будем называть эту группу *группой Барута.*

Цель работы – демонстрация того, что использование группы Барута в качестве группы фундаментальной симметрии комплексного четырехмерного пространства с вещественной метрикой в сочетании с принципом взаимности Борна и существованием предела Гиббонса открывает новые возможности описания гравитационного взаимодействия на Планковских масштабах, а также структуры и эволюции Вселенной в целом.

Теоретическая часть.

1. Принцип взаимности и предел Гиббонса: классические и квантовые аспекты.

С целью объединения x- и p-пространств в рамках единой метрической структуры в подходе Борна вводятся два параметра: размерности длины – q_e и импульса – p_e (обозначения наши, «e» – от extremal), связанные соотношением

$$q_\mathrm{e} p_\mathrm{e} = \hbar, \tag{1}$$

где $\hbar$ – постоянная Планка.

Соответствующая метрическая Лоренц-инвариантная структура

$$S_B^2 = \frac{1}{q_\mathrm{e}^2} x^\mu x_\mu + \frac{1}{p_\mathrm{e}^2} p^\mu p_\mu = \lambda_B = \mathrm{inv}, \qquad \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\{1, -1, -1, -1\} \tag{2}$$

является также взаимно-инвариантной, т. е. не изменяется при постулированных преобразованиях взаимности (Reciprocal Transformations – RT):

$$\mathrm{RT}: \quad \frac{x^\mu}{q_\mathrm{e}} \to \frac{p^\mu}{p_\mathrm{e}}, \quad \frac{p^\mu}{p_\mathrm{e}} \to -\frac{x^\mu}{q_\mathrm{e}}.$$

При этом Борн изначально рассматривал инвариант (2) как оператор, где канонически сопряженные величины $\hat{x}_\mu$ и $\hat{p}_\mu$ удовлетворяют перестановочным соотношениям

$$[\hat{x}_\mu, \hat{p}_\nu] = i\hbar\eta_{\mu\nu} \ (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3).$$

Один из параметров в соответствии с (1) остаётся произвольным. Фактически у Борна таким феноменологическим размерным параметром является масса m ($p_\mathrm{e} = mc$), что даёт $q_\mathrm{e} = \dfrac{\hbar}{mc} = \lambda_c(m)$ – комптоновская длина. Борн интерпретировал соответствующее квантовомеханическое уравнение как обобщение уравнения Клейна–Фока–Гордона. Оно вошло в физику под названием *уравнение релятивистского осциллятора* и имеет решения, соответствующие дискретному эквидистантному спектру квадрата массы, который в представлении чисел заполнения имеет вид (см., напр., [7] и приведенную там литературу):

$$M_B^2(n_0, n) = 2\left\{\left(n_0 + \frac{1}{2}\right) - \left(n_1 + n_2 + n_3 + \frac{3}{2}\right)\right\} = (2n_0 + 1) - (2n + 3) \quad (n = n_1 + n_2 + n_3) \tag{3}$$

в единицах $\lambda_c^{-2}(m)$.

Здесь все $n_\mu (\mu = 0, 1, 2, 3)$ – натуральные числа; n_0 – числа заполнения состояний линейного осциллятора (в координатах энергия-время); n – числа заполнения состояний трехмерного изотропного осциллятора (в координатах импульс-длина).

Предлагается следующее обобщение подхода Борна.

Условие Борна (1) представляется в виде

$$q_e p_e = a,$$

где a – некоторое заданное (фиксированное) значение действия, причём для любого реального физического процесса это значение не может быть нулевым (т. е. $a_{\min} \neq 0$), и дополняется соотношением

$$æ_0 = p_e / q_e = \frac{c^3}{2G_N} \tag{4}$$

– универсальная константа.

Заметим, что идея о существовании универсальной константы $æ_0$, имеющей размерность масса/время ≡ импульс/длина была сформулирована автором в работах [8; 9], а в 2003 г. [10] для неё (независимо от Гиббонса, хотя и на год позднее) было предложено выражение $æ_0 = c^3 / G_N$, а также определение $F_{\max} = cæ_0$ для максимальной силы. Константа $æ_0$ связана с предельными параметрами Гиббонса $F_{\max} = \dfrac{c^4}{4G_N}$, $P_{\max} = \dfrac{c^5}{4G_N}$ очевидными соотношениями $F_{\max} = \dfrac{1}{2}æ_0 c$, $P_{\max} = \dfrac{1}{2}æ_0 c^2$. Наряду с (1) справедливо также условие $E_e \tau_e = a$, связывающие экстремальные значения энергии $E_e = cp_e$ и временной длительности $\tau_e = c^{-1} r_g$, причём $E_e / \tau_e = æ_0 c^2 = c^5 / 2G_N$.

Теперь параметры p_e и q_e выражаются через a и $æ_0$ следующим образом:

$$p_e = \left(\frac{ac^3}{2G_N}\right); q_e = \left(\frac{2aG_N}{c^3}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Параметризация Борна $p_e = mc$ с учетом (4) приводит к следующему определению q_e :

$$q_e = \frac{2mG_N}{c^2} = r_g.$$

Строго говоря, следует полагать: $p_e = m_{\text{in}} c$, $q_e = \dfrac{2m_{\text{gr}} G_N}{c^2}$, где m_{in} – масса инертная, а m_{gr} – тяготеющая. Однако в силу принципа эквивалентности $m_{\text{in}} = m_{\text{gr}} = m$.

Радиус Шварцшильда r_g возникает в качестве характерного (чисто классического) параметра размерности длины, сопоставляемого заданной массе, что соответствует появлению пространственного масштаба в чисто гравитационном взаимодействии. Как известно, в основаниях теории гравитации Ньютона лежит модель парного взаимодействия двух точечных масс (m и M) заданной величины, сила взаимного притяжения которых определяется законом всемирного тяготения

$$\vec{f}_N = -G_N \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r},$$

где r – расстояние между массами.

Существование предела Гиббонса не только налагает ограничения на величину этой силы, но и вводит параметры, характеризующие размеры взаимодействующих масс. Выражение для силы $|f_N| = G_N \dfrac{mM}{r^2}$ трансформируется следующим образом:

$$|f_N| = F_{\max} \left(\frac{r_0}{r}\right)^2,$$

где $F_{\max} = \dfrac{c^4}{4G_N}$ – предел Гиббонса; $r_0 = (r_g R_g)^{\frac{1}{2}}$, $\quad r_g = \dfrac{2mG_N}{c^2}$, $\quad R_g = \dfrac{2MG_N}{c^2}$.

Видно, что расстояние, до которого могут сблизиться две массы, заданной (ненулевой) величины m и M (говоря наглядно – центры масс двух абсолютно упругих «шариков» радиуса r_g и R_g!), ограничено снизу значением $r_0 = (r_g R_g)^{\frac{1}{2}}$, т. е. равным среднему геометрическому соответствующих радиусов Шварцшильда.

В подобной ситуации возникает универсальное соотношение (при $M = m$)

$$q_e p_e = \frac{2m^2 G_N}{c} = a,$$

которое связывает массу заданной величины с фиксированным значением действия следующим образом:

$$m^2 = \frac{c}{2G_N} a, \qquad (5)$$

что позволяет использовать массу в качестве свободного параметра в классических динамических моделях с чисто гравитационным взаимодействием частиц и с верхним пределом для их допустимых скоростей. Важно подчеркнуть, что соотношение (5) исключает возможность существования нулевого значения массы частицы в её системе покоя.

Переход к квантовой картине достигается при $a_{\min} = \frac{\hbar}{2}$. При этом

$(q_e)_{\min} = \left(\frac{\hbar G}{c^3}\right)^{\frac{1}{2}} = l_P$ – планковская длина,

$(p_e)_{\max} = \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar G}{c}\right)^{\frac{1}{2}} c = \frac{1}{2} M_p c,$ где $M_p = \left(\frac{\hbar G}{c}\right)^{\frac{1}{2}}$ – масса Планка,

т. е. операторное уравнение Борна (2) дает квантование квадрата массы в планковских единицах.

В единицах q_e и p_e оператор Борна (2) принимает вид

$$\hat{S}_B^2 = p_e^2 \hat{x}^\mu \hat{x}_\mu + q_e^2 \hat{p}^\mu \hat{p}_\mu = \lambda_B q_e p_e = \lambda_B a,$$

что при $a = a_{\min} = \frac{\hbar}{2}$ соответствует эквидистантному дискретному спектру действия. Его изменение определяется выражением (см. (3))

$$\Delta S(n_0, n) = 2\{n_0 - (n+1)\} a_{\min} = \{n_0 - (n+1)\}\hbar,$$

где n_0, n – натуральные числа, причем $n_0 > (n+1)$.

2. *Принцип взаимности и группа Барута.*

Группа Барута [6] есть группа преобразований вида $Z' = \Lambda Z$ в четырехмерном комплексном пространстве. Комплексный 4-вектор Z^μ определен следующим образом:

$$Z^\mu = X^\mu + iY^\mu, \quad \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\{1, -1, -1, -1\},$$

где X^μ и Y^μ – вещественные псевдоевклидовы 4-векторы, а 4×4 комплексные матрицы Λ удовлетворяют (в безиндексной записи) условию

$$\Lambda^\dagger \eta \Lambda = \eta \quad (\Lambda^\dagger = \tilde{\Lambda}^* \text{ – эрмитово сопряжение}).$$

Соответствующий метрический инвариант группы имеет следующий вид:

$$Z^\mu Z_\mu^* = |Z_0|^2 - |Z_1|^2 - |Z_2|^2 - |Z_3|^2. \qquad (6)$$

Квадратичная форма $Z^\mu Z_\mu^*$ не является положительно определенной, так что следует рассматривать все 3 возможные значения инварианта $Z^\mu Z_\mu^* < 0$, $Z^\mu Z_\mu^* > 0$, $Z^\mu Z_\mu^* = 0$.

Группа Барута имеет характерную структуру: помимо центра в ней можно выделить подгруппу, изоморфную группе SU(3), а также две подгруппы, каждая из которых изоморфна группе SO(3,1), причём пересечение каждой из этих трёх подгрупп изоморфно группе SO(3).

Нетрудно видеть, что следующее определение 4-векторов X и Y:

$$X_\mu = \frac{x_\mu}{q_e} = \frac{1}{q_e}\{x_0, x_k\},\; Y_\mu = \frac{p_\mu}{p_e} = \frac{1}{p_e}\{p_0, p_k\} \qquad (7)$$

означает отождествление метрического инварианта (6) со взаимно симметричным инвариантом Борна

$$S_B^2 = Z^\mu Z_\mu^* = \frac{1}{q_e^2} x^\mu x_\mu + \frac{1}{p_e^2} p^\mu p_\mu = \frac{x_0^2}{q_e^2} + \frac{p_0^2}{p_e^2} - \sum_{k=1}^{3}\left(\frac{x_k^2}{q_e^2} + \frac{p_k^2}{p_e^2}\right) = \lambda_B. \qquad (8)$$

Заметим, что в полном соответствии с отмеченной структурой группы Барута инвариант (6) допускает определение комплексного 4-вектора $\bar{Z} = \bar{X} + i\bar{Y}$, альтернативное (7), а именно:

$$\bar{X}_\mu = \xi_\mu = \left\{\frac{x_0}{q_e}, \frac{p_k}{p_e}\right\},\ \bar{Y}_\mu = \Pi_\mu = \left\{\frac{p_0}{p_e}, \frac{x_k}{q_e}\right\}.$$

При этом закону композиции параметров группы псевдоортогональных преобразований 4-векторов ξ_μ и Π_μ соответствует «релятивистский» закон сложения сил, совпадающий по форме с законом сложения скоростей для группы Лоренца.

Взаимные преобразования (Reciprocal Transformations – RT) определены следующим образом:

$$\mathrm{RT}: \frac{x}{q_e} \to \frac{p}{p_e};\ \frac{p}{p_e} \to -\frac{x}{q_e};\ \eta \to -\eta,$$

так что

$$\mathrm{RT}: \pm S_B^2 \to \mp S_B^2,$$

т. е. ненулевые интервалы переходят друг в друга, а изотропный остается неизменным

$$\mathrm{RT}: S_B^2 = 0 \to S_B^2 = 0.$$

Действие, определенное как

$$S = \frac{1}{2p_e q_e}(x^\mu p_\mu + p^\mu x_\mu),$$

является самовзаимной величиной, т. е.

$$\mathrm{RT}: S \to S.$$

Инвариантный интервал обращается в нуль, если $x^\mu x_\mu = p^\mu p_\mu = 0$ (соответственно, если $\xi^\mu \xi_\mu = \Pi^\mu \Pi_\mu = 0$), т. е. в случае предельной скорости движения (изменение энергии-импульса).

Особый интерес представляет ситуация, когда изотропный интервал (8) является самовзаимным (Self-Reciprocal, по определению Борна), но возникает при $x^\mu x_\mu \neq 0$ и $p^\mu p_\mu \neq 0.$ Он реализуется при условии

$$x^\mu x_\mu = -q_e^2, \quad p^\mu p_\mu = p_e^2,$$

что соответствует гиперболическому движению частицы с массой *m*, т. е. постоянному 4-ускорению, абсолютная величина которого определяется выражением

$$\left|\left(\frac{dU^\mu}{d\tau}\frac{dU_\mu}{d\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\right| = \left(\frac{c^2}{r_g}\right) = 2W(m),$$

где U^μ – 4-скорость $(U^\mu U_\mu = c^2)$; $W(m) = \frac{1}{m}F_{\max}\left(F_{\max} = \frac{c^4}{2G_N}\right)$ – предельная величина ускорения, достижимого для массы, имеющей заданную величину *m*. Для максимально большой массы, в качестве которой можно принять массу Вселенной (~10^{55} г), эта величина имеет порядок ~10^{-8} см/с^2. Если учесть, что именно такое ускорение было зафиксировано в Аномалии Пионеров, то этот результат фактически представляет собой экспериментальное определение численного значения массы Вселенной с 15 %-ной точностью.

В настоящем сообщении мы ограничимся кратким рассмотрением классической версии самовзаимной динамики.

В таком подходе условие самовзаимности

$$S_B^2 = \frac{1}{q_e^2}(x_0^2 - x_k^2) + \frac{1}{p_e^2}(p_0^2 - p_k^2) = 0,$$

где

$$q_e = r_g = \frac{2mG_N}{c^2}, \quad p_e = mc, \quad q_e p_e = a$$

(*a* – фиксированное значение действия, чему соответствует заданная, согласно формуле (5), конкретная величина массы), выступает в качестве уравнения энергии в (2 + 2 · 3)-мерном расширенном пространстве QTPH, а соотношение

$$\frac{p_0^2}{p_e^2}=\frac{p_k^2}{p_e^2}+\frac{x_k^2}{q_e^2}-\frac{x_0^2}{q_e^2}$$

есть уравнение поверхности энергии в этом пространстве, что позволяет ввести функцию Гамильтона следующего вида:

$$\mathrm{H}(Q_k, P_l, \tau)=(H_0^2-\tau^2)^{\frac{1}{2}},$$

где

$$Q_k=\frac{x_k}{q_e},\ P_l=\frac{p_l}{p_e},\ \tau=\frac{x_0}{q_e},$$

$$H_0^2=Q_k^2+P_k^2 - \text{энергия (интеграл движения)} \tag{9}$$

и построить модель самовзаимной Гамильтоновой динамики.

Соответствующие уравнения Гамильтона

$$\frac{dQ_k}{d\tau}=\frac{P_k}{(H_0^2-\tau^2)^{\frac{1}{2}}};\quad \frac{dP_k}{d\tau}=\frac{-Q_k}{(H_0^2-\tau^2)^{\frac{1}{2}}}$$

имеют сферически симметричные решения

$$\left|\vec{Q}\right|=\sin\varphi,\quad \left|\vec{P}\right|=\cos\varphi,$$

где угол $\varphi=\arcsin\frac{\tau}{H_0}$ задан в первом квадранте, причем его минимальное значение не может быть нулевым в силу существования наименьшего промежутка времени $\tau_{\min}\sim c^{-1}r_g=m\text{æ}_0^{-1}$.

Для наглядной физической интерпретации модели выразим интеграл движения (9) в размерных величинах

$$H_0^2=2mc^2\left(\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}+\frac{m}{2}\omega_0^2\vec{r}^{\,2}\right),$$

где

$$\omega_0=\omega_0(m)=\frac{1}{m}\text{æ}_0\cong\frac{2}{m}10^{38}c^{-1},$$

что соответствует периоду колебаний

$$T(m)=2\pi m\text{æ}_0^{-1}\cong m\pi 10^{-38}. \tag{10}$$

Радиальная амплитуда колебаний равна

$$R(m)=\frac{2mG_N}{c^2}\cong m\cdot 0{,}75\cdot 10^{-28}\ \text{см}. \tag{11}$$

Видно, что речь идёт об энергии локализованного пульсирующего трёхмерного массивного образования типа пространственного изотропного осциллятора, период и радиальная амплитуда пульсаций которого определяются заданной величиной массы в соответствии с (10) и (11). Для макроскопических (не космологических) значений массы речь идёт о колебаниях запредельно высокой частоты в ограниченном объёме, линейный масштаб которого порядка соответствующего радиуса Шварцшильда (классическая аналогия квантового шрёдингерского «дрожания» – Zitterbewegung) и возникает естественный предел ньютоновой динамики точечных масс.

Примечательный результат возникает для максимально большой массы, равной массе наблюдаемой Вселенной ($\sim 10^{55}$ г), в этом случае период колебания $\sim 10^{17}$ с, радиальная амплитуда $\sim 10^{27}$–10^{28} см. Это настолько близко к оценкам времени жизни и линейному размеру Вселенной, что позволяет утверждать о качественном соответствии рассматриваемой модели варианту осциллирующей (cyclic) Вселенной в традиционной космологии.

Каноническое квантование модели приводит с учетом (3) к дискретным значениям энергии $E_{n0} = (2n_0+1)^{\frac{1}{2}} E_p$ и времени $t_{n0} = (2n_0+1)^{\frac{1}{2}} t_p$, где n_0 – натуральное число; E_p и t_p – планковские величины, а суперсимметричная факторизация интеграла энергии (9) – к гамильтониану осциллятора Дирака для фермиона с массой Планка (см. также [7; 10]).

3. *Максимальная мощность и предельная плотность энергии.*

Нетрудно показать, что предположение о существовании предела Гиббонса $\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\max} = \frac{c^5}{4G_N}$ приводит к выводу о наличии универсальной связи следующего вида между предельными значениями плотности энергии, с одной стороны, и темпа космологического расширения – с другой:

$$\left[\rho_E(t) H^{-2}(t)\right]_{\max} = \frac{c^2}{16\pi G_N}, \tag{12}$$

где $H(t)$ – параметр Хаббла.

Величина $H^{-1}(t) \sim \Delta t$, обратная темпу расширения, имеет смысл некоторой характерной длительности, так что соотношение (12) допускает два варианта

$$(\rho_E)_{\max} (\Delta t)^2_{\min} = \frac{c^2}{16\pi G_N}, \tag{13}$$

$$(\rho_E)_{\min} (\Delta t)^2_{\max} = \frac{c^2}{16\pi G_N}. \tag{14}$$

В соответствии с (13) существование минимального промежутка времени (минимальной продолжительностью расширения) автоматически означает наличие конечного верхнего предела для плотности энергии.

Поскольку минимальному значению действия соответствует минимальный промежуток времени

$$\Delta t_{\min} = \frac{(q_{\mathrm{e}})_{\min}}{c} = \frac{t_p}{c},$$

где t_p – планковское время,
то из (13) следует, что максимальная плотность энергии с точностью до численного коэффициента порядка единицы совпадает с планковской, т. е. $(\rho_E)_{\max} = \rho_p \sim 10^{94}$ г/см^3.

Соответствующая гипотеза неоднократно высказывалась в прошлом. В предлагаемом подходе она представляет собой следствие существования предела Гиббонса.

Соответственно, вариант (14) приводит к взаимной зависимости между минимальной плотностью и максимальной продолжительностью расширения.

Соотношение (14) можно записать в виде

$$(\rho_E)_{\lim} = \frac{c^2 H^2_{\lim}}{16\pi G_N} = \frac{1}{6}\frac{3c^2 H^2_{\lim}}{8\pi G_N}.$$

Отсюда следует: в предположении, что современное наблюдаемое значение постоянной Хаббла H_0 является его нижним пределом (или близко к нему, т. е. $H_{\min} \approx H_0$), то для предельно малой плотности энергии получим значение

$$(\rho_E)_{\min} = \frac{1}{6}\rho_c = \frac{1}{6}\frac{3H_0^2 c^2}{8\pi G_N},$$

т. е. минимально допустимая плотность энергии нашей Вселенной составляет одну шестую от критической ρ_c (фактически – от наблюдаемой сегодня).

Заключение. Существование предела Гиббонса позволяет привести пространственно-временные и импульсно-энергетические переменные к одной размерности, объединив их универсальным образом в комплексный 4-вектор, и определить группу Барута в качестве группы фундаментальной симметрии (2 + 2 · 3)-мерного расширенного фазового пространства. Вещественный метрический инвариант группы является взаимно-симметричным. Этот инвариант, рассматриваемый как квантовомеханический оператор, заданный в представлении чисел заполнения, совпадает с оператором самовзаимного уравнения Борна, дающего эквидистантный спектр квадрата массы и действия в планковских единицах.

В случае классической трактовки канонических переменных условие самовзаимности инварианта (его равенство нулю) соответствует движению массивной частицы с постоянным 4-ускорением, абсолютная величина которого параметрически (обратно пропорционально) зависит от её массы и имеет конечный верхний предел при любом конечном значении массы. Заданной массе автоматически сопоставляется параметр размерности длины, который совпадает (без обращения к ОТО!) с гравитационным радиусом частицы. При этом возникает нетривиальная возможность взаимно-симметричного описания гравитационных взаимодействий, дополнительного к чисто геометрическому подходу ОТО, где локализованная инертная масса как таковая в явном виде вообще не представлена. При этом исходная SU(1,3) симметрия полностью сохраняется, поскольку соответствующая алгебра Ли может быть определена в рамках Гамильтонова подхода путём использования классических скобок Пуассона в качестве бинарной операции.

В построенной на этой основе квазиньютоновой модели взаимно-инвариантной Гамильтоновой динамики с чисто гравитационным взаимодействием масса возникающего при этом пространственно локализованного модельного объекта типа трехмерного изотропного осциллятора является единственным свободным параметром, определяющим его пространственно-временные, импульсно-энергетические масштабы, а также частотные характеристики. В предельном случае массы Вселенной модель воспроизводит «осциллирующий» (cyclic) вариант традиционной космологии. Наличие предела Гиббонса приводит к универсальной связи между плотностью энергии и темпом космологического расширения, а также к существованию верхнего и нижнего пределов этих величин.

Выражаю благодарность Е. А. Толкачеву, А. Э. Шалыт-Марголину, В. В. Кудряшову и Ю. П. Выблому за помощь в работе и полезные обсуждения.

Список использованной литературы

1. *Born, M.* A suggestion for unifying quantum theory and relativity / M. Born // Proc. Roy. Lond. – 1938. – A165.291.

2. *Born, M.* Reciprocity Theory of Elementary Particles / M. Born // Rev. Mod. Phys. – 1949. – Vol. 21, N 3. – P. 463–473.

3. *Bolognesi, S.* The cosmology of trans-Plankian theory and dark energy / S. Bolognesi // Int. J. Mod. Phys. – 2014. – D23. – 1450046.

4. *Bolognesi, S.* Born Reciprocity and Cosmic Accelarations / S. Bolognesi // Advances in Dark Energy Reseach / ed. Miranda L. Ortiz. – Nova Science Publishers. Inc., 1915. – P. 56–74; Arxiv: 1506.02187 v.3, hep-th.

5. *Gibbons, G. W.* The Maximum Principle Tension in General Relativity / G. W. Gibbons // Found. Phys. – 2002. – Vol. 32. – P. 1891–1901.

6. *Barut, A. O.* Complex Lorentz Group with a Real Metric: Group Structure / A. O. Barut // J. Math. Phys. – 1964. – Vol. 5, N 11. – P. 1652–1656.

7. *Tomilchik, L. M.* Born Reciprocity, Maximum Tension and Conformally-Flat Geometry with Gaussian-Like Metric / L. M. Tomilchik // Actual Problems of MicroWorld Physics: Proc. Int. School-Sem. Gomel, Belarus, July 15–26, 2009. – Dubna, 2011. – Vol. 2. – P. 81–97.

8. *Томильчик, Л. М.* Об условиях синхронизируемости часов в СТО / Л. М. Томильчик // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1974. – № 4. – С. 72–81.

9. *Тараканов, А. Н.* О решениях и функциях Грина взаимно-инвариантного уравнения М. Борна. I. Скалярный случай / А. Н. Тараканов, Л. М. Томильчик // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1981. – № 5. – С. 125–126. № 583-81. Dep.

10. *Tomilchik, L. M.* Conformally-Flat Metric, Position-Dependent Mass and Cold Dark Matter. / L. M. Tomilchik, V. V. Kudryashov // Actual Problems of MicroWorld Physics: Proc. Int. School-Sem. Gomel, Belarus, July 28–August 8, 2003 / ed. by P. Starovoitov. – Dubna, 2004. – Vol. 1. – P. 24–42.

Поступило в редакцию 30.12.2015