ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.958:537.8 Поступило в редакцию 11.08.2022
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-1-7-13 Received 11.08.2022

В. Т. Ерофеенко, И. С. Козловская

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

МОДЕЛИРОВАНИЕ УЗКИХ ПУЧКОВ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ НА ПЛОСКОСТИ

(Представлено академиком Ю. С. Хариным)

Аннотация. Разработана математическая модель узких пучков монохроматических электромагнитных волн, распространяющихся в вакууме. Построены пучки электромагнитных волн с порядком осевой симметрии m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, характеризуемые радиусом локализации пучка $R_{\text{пуч}}$, параметром узости пучка n $(n \geq 2)$ и коэффициентом ослабления пучка N $(N \geq 2)$. Численно исследована структура электрического поля ТЕ-поляризованного пучка волн.

Ключевые слова: узкие пучки, порядок симметрии, радиус локализации, монохроматические волны, цилиндрические поля, поляризация пучка

Для цитирования. Ерофеенко, В. Т. Моделирование узких пучков электромагнитных волн с осевой симметрией на плоскости / В. Т. Ерофеенко, И. С. Козловская // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2023. – Т. 67, № 1. – С. 7–13. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-1-7-13

Viktor T. Erofeenko, Inessa S. Kozlovskaja

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

MODELING OF NARROW BEAMS OF ELECTROMAGNETIC WAVES WITH AXIAL SYMMETRY ON A PLANE

(Communicated by Academician Yuriy S. Kharin)

Abstract. A mathematical model of narrow beams of monochromatic electromagnetic waves propagating in vacuum is developed. Beams of electromagnetic waves are constructed with the order of axial symmetry m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$, characterized by the beam localization radius $R_{\text{пуч}}$, the beam narrowness parameter n $(n \geq 2)$, and the beam attenuation coefficient N $(N \geq 2)$. The structure of the electric field for a TE-polarized wave beam is studied numerically.

Keywords: narrow beam, order symmetry, radius localization, monochromatic waves, cylindrical fields, polarization of the beam

For citation. Erofeenko V. T., Kozlovskaja I. S. Modeling of narrow beams of electromagnetic waves with axial symmetry on a plane. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2023, vol. 67, no. 1, pp. 7–13 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-1-7-13

Введение. Пучки электромагнитных волн используются для передачи информации и для воздействия на электронное оборудование технических устройств. Изучаются пучки с различной геометрической структурой в различных диапазонах частот: гауссовы [1], Лагерра–Гаусса [2], сингулярные [3; 4], оптические [1; 3], пучки в специальных средах [1; 5] и др. Значительное внимание уделяется разработке методов решения задач экранирования полей пучков экранами из различных материалов: метаматериалов [2], биизотропных [6], магнитодиэлектрических [7] и др. В предлагаемой работе разработан класс узких пучков электромагнитных волн, обобщающих гауссовы пучки. Электромагнитное поле пучков представлено в интегральном виде через базисные цилиндрические электромагнитные поля [8] с плотностью, характеризующей узость пучков. Плотность вычислена аналитически и выражена через радиус локализации пучка, параметр узости и коэффициент ослабления пучка с заданным порядком осевой симметрии.

Структура *TE*-поляризованных узких пучков электромагнитных волн. Построим узкий *TE*-поляризованный пучок электромагнитных волн с осевой симметрией порядка m ($m = 0, 1, 2,...$), который излучается плоскостью $z = 0$ в полупространство $D_0(z \geq 0)$ из вакуума.

Пучок представим в цилиндрической системе координат $\vec{\rho} = (\rho, \varphi, z)$ в интегральном виде через базисные цилиндрические поля.

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{пуч}}(\vec{\rho}) = \int_0^\infty \vec{E}_0(\vec{\rho}; \lambda, k_0)\, d\lambda, \ \vec{\mathbf{H}}_{\text{пуч}}(\vec{\rho}) = \int_0^\infty \vec{H}_0(\vec{\rho}; \lambda, k_0)\, d\lambda; \ 0 \leq \lambda < \infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, z \geq 0, \tag{1}$$

$$\vec{E}_0 = a_{\text{пуч}}^{(m)}(\lambda) \vec{M}_m^{(-1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0), \ \vec{H}_0 = h_0 a_{\text{пуч}}^{(m)}(\lambda) \vec{M}_m^{(-2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0),$$

где $a_{\text{пуч}}^{(m)}(\lambda)$ – плотность пучка; $\vec{E}_0, \vec{H}_0$ – базисное монохроматическое цилиндрическое электромагнитное поле [8, с. 131], зависящее от параметра λ; $h_0 = \dfrac{1}{iZ_0}$, $Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \varepsilon_0}$,

$$\vec{M}_m^{(\mp 1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) = \vec{V}_m^{(1)}(\lambda\rho) e^{\mp v_0(\lambda) z} \Phi_m, \ \Phi_m = \exp(im\varphi), \tag{2}$$

$$\vec{M}_m^{(\mp 2)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0) = \frac{1}{k_0}(\mp v_0(\lambda) \vec{V}_m^{(2)}(\lambda\rho) + \lambda J_m(\lambda\rho) \vec{e}_z) e^{\mp v_0(\lambda) z} \Phi_m,$$

$$\vec{V}_m^{(1)}(\lambda\rho) = \frac{im}{\lambda\rho} J_m(\lambda\rho) \vec{e}_\rho - J'_m(\lambda\rho) \vec{e}_\varphi, \ \vec{V}_m^{(2)}(\lambda\rho) = J'_m(\lambda\rho) \vec{e}_\rho + \frac{im}{\lambda\rho} J_m(\lambda\rho) \vec{e}_\varphi, \tag{3}$$

$v_0(\lambda) = \sqrt{\lambda^2 - k_0^2}$ при $k_0 \leq \lambda < \infty$, $v_0(\lambda) = -i\sqrt{k_0^2 - \lambda^2}$ при $0 \leq \lambda \leq k_0$, $0 \leq \lambda < \infty$; $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$ – орты цилиндрической системы координат; $J_m(\cdot)$ – функции Бесселя; $k_0 = \omega / c$, ω – круговая частота поля, $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ – скорость света; ε_0, μ_0 – диэлектрическая и магнитная постоянные.

Для *TE*-поляризованного пучка (*TE*-пучка) (1) электрическое поле $\vec{\mathbf{E}}_{\text{пуч}}$ параллельно плоскости Oxy; $z = z_0$ – плоскость сечения пучка.

Электромагнитное поле (1) удовлетворяет уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \vec{\mathbf{E}}_{\text{пуч}} = i\omega\mu_0 \vec{\mathbf{H}}_{\text{пуч}}, \ \operatorname{rot} \vec{\mathbf{H}}_{\text{пуч}} = -i\omega\varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}}_{\text{пуч}}$$

в полупространстве $D_0(z \geq 0)$.

Моделирование *TE*-поляризованных узких пучков волн порядка $m \geq 1$. Рассмотрим *TE*-пучок (1), для которого электрическое поле на плоскости $z = 0$ сконцентрировано возле начала координат ($x = 0$, $y = 0$) и экспоненциально затухает при $\rho \to \infty$. Плоскость Oxy рассматривается как источник пучка волн.

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{пуч}}\Big|_{z=0} = \int_0^\infty a_{\text{пуч}}^{(m)}(\lambda) \vec{M}_m^{(-1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0)\, d\lambda = (f_1(\rho)\vec{e}_\rho + f_2(\rho)\vec{e}_\varphi)\Phi_m, \tag{4}$$

где функция $f_1(\rho)$ имеет вид узкого пучка

$$f_1(\rho) = E_0 \left(\frac{\rho}{R_{\text{пуч}}} \right)^{m-1} e^{-\alpha\rho^n}, \quad 0 \leq \rho < \infty, \tag{5}$$

где $\alpha = \dfrac{\ln(N)}{R_{\text{пуч}}^n}$; E_0 – const; $[E_0] = \dfrac{\text{В}}{\text{м}}$; $R_{\text{пуч}}$ – радиус локализации пучка; N – коэффициент ослабления пучка ($N \geq 2$); n – параметр узости пучка ($n \geq 2$); при $n = 2$ образуется гауссов пучок волн, при $n = 3, 4, ...$ формируются узкие пучки волн.

Т е о р е м а 1. *Плотность* $a_{\text{пуч}}^{(m)}$ *узкого ТЕ-поляризованного пучка электромагнитных волн (1) порядка* m = 1, 2, 3, ... *определяется формулами:*

$$a_{\text{пуч}}^{(m)}(\lambda) = iE_0 R_{\text{пуч}} G_n^{(m)}(\lambda), \tag{6}$$

где

$$G_n^{(m)}(\lambda) = \frac{1}{nm} 2^{m+2} (\beta_n)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} (\beta_n R_{\text{пуч}} \lambda)^{2k+m+1}}{k!(k+m)!} \Gamma\left(\frac{2k+2m+2}{n}\right), \ \beta_n = \frac{1}{2\sqrt[n]{\ln(N)}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим электрическое поле (4) на плоскости $z = 0$, используя (2), (3):

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{пуч}}\Big|_{z=0} = \int_0^{\infty} a_{\text{пуч}}^{(m)}(\lambda) \left(\frac{im}{\lambda\rho} J_m(\lambda\rho) \vec{e}_\rho - J'_m(\lambda\rho) \vec{e}_\varphi \right) d\lambda \, \Phi_m = (f_1(\rho)\vec{e}_\rho + f_2(\rho)\vec{e}_\varphi)\Phi_m. \tag{7}$$

Обозначим

$$\overline{a}(\lambda) = \frac{im}{\lambda^2} a_{\text{пуч}}^{(m)}(\lambda), \tag{8}$$

тогда из формул (6), (7) и (4) для компонент при $\vec{e}_\rho$ следует равенство

$$E_0 \frac{\rho^m}{R_{\text{пуч}}^{m-1}} e^{-\alpha\rho^n} = \int_0^{\infty} \overline{a}(\lambda) \, J_m(\lambda\rho) \lambda \, d\lambda. \tag{9}$$

Применим обратное интегральное преобразование Ханкеля, получим

$$\overline{a}(\lambda) = \frac{E_0}{R_{\text{пуч}}^{m-1}} \int_0^{\infty} \rho^{m+1} e^{-\alpha\rho^n} J_m(\lambda\rho) \, d\rho. \tag{10}$$

Вычислим интеграл (10), используя представление функции Бесселя $J_m(\lambda\rho)$ в виде ряда [8, с. 288]. Тогда

$$\overline{a}(\lambda) = \frac{E_0}{R_{\text{пуч}}^{m-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^{m+2k}}{k!(k+m)! 2^{m+2k}} \int_0^{\infty} e^{-\alpha\rho^n} \rho^{2m+2k+1} d\rho. \tag{11}$$

Для вычисления интеграла (11) преобразуем интегральную формулу для гамма-функции

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = [t = \alpha x^n] = n\alpha^z \int_0^{\infty} x^{nz-1} e^{-\alpha x^n} dx.$$

Обозначим $nz - 1 = s$, $z = \dfrac{s+1}{n}$, тогда получим формулу

$$\int_0^{\infty} x^s e^{-\alpha x^n} dx = \frac{1}{n\alpha^{\frac{s+1}{n}}} \Gamma\left(\frac{s+1}{n}\right). \tag{12}$$

Учитывая (12) в (11), получим разложение

$$\begin{aligned} \overline{a}(\lambda) &= \frac{E_0}{R_{\text{пуч}}^{m-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^{m+2k}}{k!(k+m)! 2^{m+2k}} \frac{1}{n(\sqrt[n]{\alpha})^{2k+2m+2}} \Gamma\left(\frac{2k+2m+2}{n}\right) = \\ &= \frac{mE_0}{\lambda^2} \frac{4}{nmR_{\text{пуч}}^{m-1} (\sqrt[n]{\alpha})^m} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \lambda^{2k+m+2}}{k!(k+m)!(2\sqrt[n]{\alpha})^{2k+m+2}} \Gamma\left(\frac{2k+2m+2}{n}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

Определим радиус $R_{\text{пуч}}$ локализации пучка (5). Экспоненциальная амплитуда пучка (5) на плоскости $z = 0$ имеет вид $A(\rho) = e^{-\alpha\rho^n}$. Предположим, что амплитуда на радиусе $A(R_{\text{пуч}})$ в N $(N \geq 2)$ раз меньше по сравнению с амплитудой $A(0)$ в центральной точке $\rho = 0$. При $\rho = 0$ $A(0) = 1$, при $\rho = R_{\text{пуч}}$ имеем $A(R_{\text{пуч}}) = e^{-\alpha R_{\text{пуч}}^n}$, тогда $\dfrac{A(0)}{A(R_{\text{пуч}})} = e^{\alpha R_{\text{пуч}}^n} = N$. Следует $\alpha = \dfrac{\ln(N)}{R_{\text{пуч}}^n}$, $\sqrt[n]{\alpha} = \dfrac{1}{2\beta_n R_{\text{пуч}}}$, $\beta_n = \dfrac{1}{2\sqrt[n]{\ln(N)}}$.

В результате разложение (13) преобразуется к виду

$$\overline{a}(\lambda) = -\frac{mE_0}{\lambda^2} R_{\text{пуч}} G_n^{(m)}(\lambda), \tag{14}$$

где $G_n^{(m)}(\lambda) = \dfrac{1}{nm} 2^{m+2} (\beta_n)^m \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^{k+1} (\beta_n R_{\text{пуч}} \lambda)^{2k+m+1}}{k!(k+m)!} \Gamma\left(\dfrac{2k+2m+2}{n}\right)$.

Сопоставляя (8) с (14), получим искомую формулу (6). ■

Вычислим $f_2(\rho)$, сравнивая компоненты при $\vec{e}_\varphi$ в равенстве (7). Используя (8), представим

$$f_2(\rho) = -\int_0^\infty a_{\text{пуч}}^{(m)}(\lambda) J'_m(\lambda\rho)\, d\lambda = -\int_0^\infty a_{\text{пуч}}^{(m)}(\lambda) \frac{d}{\lambda\, d\rho} J_m(\lambda\rho)\, d\lambda = \frac{i}{m} \frac{d}{d\rho} \int_0^\infty \overline{a}(\lambda) J_m(\lambda\rho)\, \lambda\, d\lambda.$$

Учитывая (9), получим формулу

$$f_2(\rho) = iE_0 \frac{\rho^{m-1}}{R_{\text{пуч}}^{m-1}} \left(1 - \ln(N) \frac{n}{m} \frac{\rho^n}{R_{\text{пуч}}^n}\right) \exp\left(-\ln(N) \left(\frac{\rho}{R_{\text{пуч}}}\right)^n\right). \tag{15}$$

Моделирование *TE*-поляризованных узких пучков электромагнитных волн порядка *m* = 0. Рассмотрим поле *TE*-пучка с порядком осевой симметрии $m = 0$ (осесимметричное поле, поле не зависит от координаты φ). Электрическое поле (1) на плоскости $z = 0$, сконцентрированное возле начала координат ($x = 0$, $y = 0$), представим в виде

$$\mathbf{E}_{\text{пуч}}\Big|_{z=0} = \int_0^\infty a_{\text{пуч}}^{(0)}(\lambda) \vec{M}_0^{(-1)}(\vec{\rho}; \lambda, k_0)\, d\lambda = f_0(\rho) \vec{e}_\varphi, \tag{16}$$

где функция $f_1(\rho)$ имеет вид узкого пучка

$$f_0(\rho) = E_0 \frac{\rho}{R_{\text{пуч}}} e^{-\alpha\rho^n}, \quad \alpha = \frac{\ln(N)}{R_{\text{пуч}}^n}, \quad 0 \le \rho < \infty. \tag{17}$$

Т е о р е м а 2. *Плотность* $a_{\text{пуч}}^{(0)}$ *узкого пучка электромагнитных волн порядка* $m = 0$ *определяется формулами:*

$$a_{\text{пуч}}^{(0)}(\lambda) = E_0 R_{\text{пуч}} G_n(\lambda), \tag{18}$$

где

$$G_n(\lambda) = \frac{8}{n} (\beta_n)^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (\beta_n R_{\text{пуч}} \lambda)^{2k+2}}{k!(k+1)!} \Gamma\left(\frac{2k+4}{n}\right), \quad \beta_n = \frac{1}{2\sqrt[n]{\ln(N)}},$$

для гауссова пучка $G_2(\lambda) = \left(\dfrac{R_{\text{пуч}} \lambda}{2\ln(N)}\right)^2 \exp\left(-\dfrac{(R_{\text{пуч}} \lambda)^2}{4\ln(N)}\right)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Преобразуем электрическое поле (16), используя (2), (3). Получим равенство

$$\int_0^\infty a_{\text{пуч}}^{(0)}(\lambda) J_1(\lambda\rho)\, d\lambda = f_0(\rho). \tag{19}$$

Обозначим

$$\overline{a}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} a_{\text{пуч}}^{(0)}(\lambda). \tag{20}$$

Тогда, с учетом формул (17), (19), следует равенство

$$E_0 \frac{\rho}{R_{\text{пуч}}} e^{-\alpha\rho^n} = \int_0^\infty \overline{a}(\lambda)\, J_1(\lambda\rho) \lambda\, d\lambda.$$

Применим обратное интегральное преобразование Ханкеля, получим

$$\overline{a}(\lambda)=\frac{E_0}{R_{\text{пуч}}}\int\limits_0^{\infty}\rho^2 e^{-\alpha\rho^n}\ J_1(\lambda\rho)\,d\rho. \tag{21}$$

Вычислим интеграл (21), используя представление функции Бесселя $J_1(\lambda\rho)$ в виде ряда:

$$\overline{a}(\lambda)=\frac{E_0}{R_{\text{пуч}}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\lambda^{2k+1}}{k!(k+1)!2^{2k+1}}\int\limits_0^{\infty}e^{-\alpha\rho^n}\ \rho^{2k+3}d\rho. \tag{22}$$

На основании формулы (12) вычислим интеграл (22). Получим

$$\overline{a}(\lambda)=\frac{E_0}{R_{\text{пуч}}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\lambda^{2k+1}}{k!(k+1)!2^{2k+1}}\frac{1}{n(\sqrt[n]{\alpha})^{2k+4}}\Gamma\left(\frac{2k+4}{n}\right). \tag{23}$$

Вводя обозначение $\beta_n=\dfrac{1}{2\sqrt[n]{\ln(N)}}$ формулу (23) преобразуем к виду

$$\overline{a}(\lambda)=E_0R_{\text{пуч}}\frac{8}{n\lambda}(\beta_n)^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(\beta_n R_{\text{пуч}}\lambda)^{2k+2}}{k!(k+1)!}\Gamma\left(\frac{2k+4}{n}\right). \tag{24}$$

Подставляя (24) в (20), получим искомую формулу (18). ■

Электрическое поле пучка в сечении на $z=z_0$ определяется формулой

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{пуч}}\Big|_{z=z_0}=\int\limits_0^{k_0}a^{(0)}_{\text{пуч}}(\lambda)J_1(\lambda\rho)e^{i\sqrt{k_0^2-\lambda^2}z_0}\,d\lambda+\int\limits_{k_0}^{\infty}a^{(0)}_{\text{пуч}}(\lambda)J_1(\lambda\rho)e^{-\sqrt{\lambda^2-k_0^2}z_0}\,d\lambda.$$

Численное исследование *TE*-пучков электромагнитных волн порядка *m* = 0. Рассмотрим ТЕ-поляризованное электрическое поле (16) узкого пучка на плоскости $z=0$.

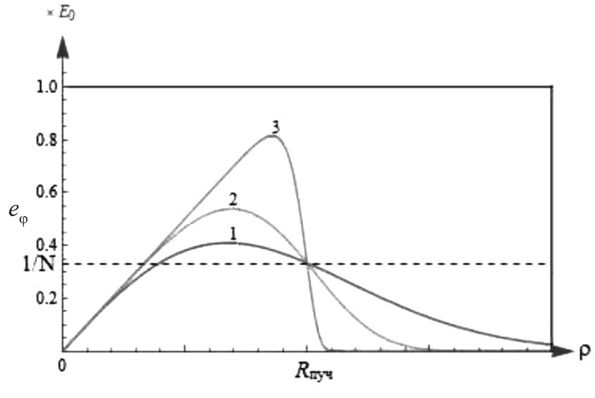
$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{пуч}}\Big|_{z=0}=E_0e_\varphi(\rho)\vec{e}_\varphi,\ \ e_\varphi(\rho)=\frac{\rho}{R_{\text{пуч}}}\exp\left(-\ln(N)\left(\frac{\rho}{R_{\text{пуч}}}\right)^n\right).$$

Вычислим поле $e_\varphi(\rho)$ при различных значениях параметров n, N (рисунок).

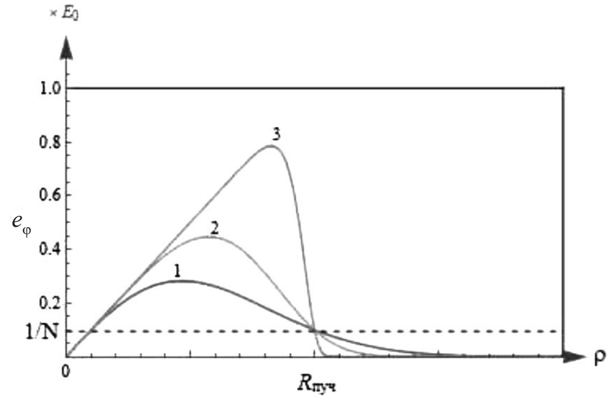
Сингулярный *TE*-поляризованный пучок электромагнитных волн. Для сингулярного пучка порядок симметрии m = 1. Определим электрическое поле сингулярного пучка на плоскости $z=0,$ учитывая формулы (4), (5), (15),

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{пуч}}\Big|_{z=0}=E_0(\vec{e}_\rho+if(\overline{\rho})\vec{e}_\varphi)F(\overline{\rho})\exp(i\varphi),$$

где $F(\overline{\rho})=\exp(-\ln(N)(\overline{\rho})^n)$; $f(\overline{\rho})=1-n\ln(N)(\overline{\rho})^n$; $\overline{\rho}=\dfrac{\rho}{R_{\text{пуч}}}$.



a



b

Графики напряженности электрического поля $e_\varphi(\rho)$ узкого пучка в зависимости от параметра узости пучка: *1* – n = 2; *2* – n = 4; *3* – n = 20 и коэффициента ослабления пучка: *a* – N = 3, *b* – N = 10

Electric field strength $e_\varphi(\rho)$ of a narrow beam vs. beam narrowness parameter: *1* – n = 2; *2* – n = 4; *3* – n = 20 and beam attenuation: *a* – N = 3, *b* – N = 10

Вычислим реальное поле

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{ре}}\Big|_{z=0} = \operatorname{Re}\vec{\mathbf{E}}_{\text{пуч}}\Big|_{z=0} = E_0(\cos(\varphi)\vec{e}_\rho - f(\overline{\rho})\sin(\varphi)\vec{e}_\varphi)F(\overline{\rho}) \tag{25}$$

и определим модуль электрического поля (25)

$$E(\overline{x},\overline{y}) = \left|\vec{\mathbf{E}}_{\text{ре}}\right| = \left|E_0\right|(\cos^2(\varphi)\vec{e}_\rho + f^2(\overline{\rho})\sin^2(\varphi)\vec{e}_\phi)^{1/2}F(\overline{\rho}) = \frac{\left|E_0\right|}{\overline{\rho}}\sqrt{\overline{x}^2 + f^2(\overline{\rho})\overline{y}^2}F(\overline{\rho}),$$

где $\overline{\rho} = \sqrt{\overline{x}^2 + \overline{y}^2}$, $\overline{x}, \overline{y}$ – безразмерные декартовы координаты; $-1 \le \overline{x} \le 1,\ -1 \le \overline{y} \le 1.$

В центре пучка $E(0,0) = \left|E_0\right|$. Распределение поля вдоль оси Oz определяется формулами

$$\vec{\mathbf{E}}_{\text{пуч}}\Big|_{\rho=0} = -\frac{1}{2}E_0 k_0 R_{\text{пуч}}(I_1(z) + I_2(z))(\vec{e}_\rho + i\vec{e}_\varphi),\ z \ge 0,$$

$$I_1(z) = \int_0^1 G_n^{(1)}(k_0\overline{\lambda})e^{ik_0 z\sqrt{1-\overline{\lambda}^2}}\,d\overline{\lambda}, \quad I_2(z) = \int_1^\infty G_n^{(1)}(k_0\overline{\lambda})e^{-k_0 z\sqrt{\overline{\lambda}^2-1}}\,d\overline{\lambda},$$

где функция $G_n^{(1)}(k_0\overline{\lambda})$ определена в (6).

Заключение. Исследованы электрические поля *TE*-поляризованных узких пучков электромагнитных волн с различными порядками осевой симметрии m. Представлены графики электрических полей осесимметричных пучков $(m = 0)$ для различных значений параметра узости n и параметра ослабления пучка N. Показано, что при больших значениях параметра n поле на плоскости источника вне радиуса пучка $R_{\text{пуч}}$ практически отсутствует и возрастает внутри пучка, локализуясь при $\rho = R_{\text{пуч}}$. Рассмотрен сингулярный пучок электромагнитных волн $(m = 1)$, для которого электрическое поле в центре пучка $\rho = 0$ отлично от нуля. Заметим, что для пучков с порядками $m = 0$ и $m \ge 2$ электрическое поле в точке $\rho = 0$ равно нулю.

Благодарности. Работа выполнена в рамках задания 1.4.3 Государственной программы научных исследований «Цифровые и космические технологии, безопасность общества и государства» на 2021–2023 гг.

Acknowledgements. The work has been done within the framework of task 1.4.3 of the State Research Program “Digital and space technologies, security of society and state for 2021–2023”.

Список использованных источников

1. Гончаренко, А. М. Оптические гауссовы пучки и солитоны / А. М. Гончаренко. – Минск, 2011. – 126 с.

2. Ерофеенко, В. Т. Преобразование пучков электромагнитных волн при прохождении через экран из кирального метаматериала / В. Т. Ерофеенко, В. Ф. Бондаренко // Информатика. – 2013. – № 1. – С. 5–17.

3. Кухарчик, П. Д. Полное внутреннее отражение гауссова светового пучка / П. Д. Кухарчик, В. М. Сердюк, И. А. Титовицкий // Журн. техн. физики. – 1999. – Т. 69, № 4. – С. 74–78.

4. Казак, Л. А. Формирование, суперпозиция и устойчивость вихревых оптических пучков различного порядка / Л. А. Казак, А. Л. Толстик // Вестн. БГУ. Сер. 1. Физика. Математика. Информатика. – 2010. – № 2. – С. 3–7.

5. Панов, В. П. О распространении волновых пучков в средах с изотропной комплексной диэлектрической проницаемостью / В. П. Панов, В. В. Приходько // Радиотехника и электроника. – 2007. – Т. 52, № 6. – С. 662–670.

6. Ерофеенко, В. Т. Краевая задача дифракции пучков электромагнитных волн на плоском экране из биизотропных материалов / В. Т. Ерофеенко // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фiз.-мат. навук. – 2012. – № 4. – С. 72–79.

7. Ерофеенко, В. Т. Решение задачи экранирования круговых пучков электромагнитных волн плоским магнитодиэлектрическим экраном / В. Т. Ерофеенко, А. И. Урбанович // Тр. XXIX Междунар. конф. «Радиационная физика твердого тела», Севастополь, 8–13 июля 2019 г. – М., 2019. – С. 352–362.

8. Ерофеенко, В. Т. Аналитическое моделирование в электродинамике / В. Т. Ерофеенко, И. С. Козловская. – Минск, 2010. – 303 с.

References

1. Goncharenko A. M. *Optical Gaussian beams and solitons*. Minsk, 2011. 126 p. (in Russian).

2. Erofeenko V. T., Bondarenko V. F. Transformation of beams of electromagnetic waves passing through a chiral metamaterial screen. *Informatika* [Informatics], 2013, no. 1, pp. 5–17 (in Russian).

3. Kukharchik P. D., Serdyuk V. M., Titovitskii I. A. Total Internal Reflection of a Gaussian Light Beam. *Technical Physics*, 1999, vol. 44, no. 4, pp. 417–421. https://doi.org/10.1134/1.1259312

4. Kazak L. A., Tolstik A.L. The formation, superposition, and stability of different-order vortex optical beams. *Vestnik BGU. Seriya 1. Fizika, Matematika, Informatika* [Vestnik BSU. Series 1. Physics. Mathematics. Informatics], 2010, no. 2, pp. 3–7 (in Russian).

5. Panov V. P., Prikhodko V. V. On the propagation of wave beams in media with isotropic complex permittivity. *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2007, vol. 52, no. 6, pp. 617–625. https://doi.org/10.1134/s1064226907060022

6. Erofeenko V. T. Boundary value problem of the diffraction of beams of electromagnetic waves on the flat screen made of biisotropic materials. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2012, no. 4, pp. 72–79 (in Russian).

7. Erofeenko V. T., Urbanovich A. I. Solution of the problems of shielding of the beams of electromagnetic waves by means of plane magnetodielectrical screen. *Trudy XXIX Mezhdunarodnoi konferentsii "Radiatsionnaya fizika tverdogo tela", Sevastopol', 8–13 iyulya 2019 g.* [Works of the XXIX International Conference "Radiative physics of the rigid body", Sevastopol, 08–13 July 2019]. Moscow, 2019, pp. 352–362 (in Russian).

8. Erofeenko V. T., Kozlovskaja I. S. *Analytical Modeling in Electrodynamics*. Minsk, 2010. 303 p. (in Russian).

Информация об авторах

Ерофеенко Виктор Тихонович – д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. НИИ прикладных проблем математики и информатики БГУ (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: bsu_erofeenko@tut.by.

Козловская Инесса Станиславовна – канд. физ.-мат. наук, доцент. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kozlovskaja@bsu.by.

Information about the authors

Erofeenko Viktor T. – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher. Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: bsu_erofeenko@tut.by.

Kozlovskaja Inessa S. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kozlovskaja@bsu.by.