ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

## *МАТЕМАТИКА*

## *MATHEMATICS*

УДК 512.554.32
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-2-95-100

Поступило в редакцию 04.11.2022
Received 04.11.2022

**И. Д. Супруненко**, **Т. С. Бусел, А. А. Осиновская**

*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь*

# СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФАКТОРЫ В ОГРАНИЧЕНИЯХ НЕПРИВОДИМЫХ МОДУЛЕЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ЛИНЕЙНОЙ И СИМПЛЕКТИЧЕСКОЙ ГРУПП НА ПОДСИСТЕМНЫЕ ПОДГРУППЫ С ДВУМЯ ПРОСТЫМИ КОМПОНЕНТАМИ

*(Представлено академиком В. И. Янчевским)*

**Аннотация.** Рассматриваются ограничения неприводимых модулей специальной линейной и симплектической групп в нечетной характеристике $p$ с большими относительно $p$ старшими весами на подсистемную подгруппу $H$ максимального ранга с двумя простыми компонентами $H_1$ и $H_2$. Найдена нижняя оценка числа композиционных факторов таких ограничений, которые являются $p$-большими для подгруппы $H_1$ и не слишком малы для $H_2$. На этой основе получены нижние оценки для числа блоков Жордана максимальной размерности у образов определенных унипотентных элементов в соответствующих представлениях рассматриваемых групп.

**Ключевые слова:** алгебраическая группа, специальная линейная группа, симплектическая группа, неприводимое представление, ограничение представления, унипотентный элемент

**Для цитирования.** Супруненко, И. Д. Специальные факторы в ограничениях неприводимых модулей специальной линейной и симплектической групп на подсистемные подгруппы с двумя простыми компонентами / И. Д. Супруненко, Т. С. Бусел, А. А. Осиновская // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2023. – Т. 67, № 2. – С. 95–100. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-2-95-100

**Irina D. Suprunenko**, **Tatsiana S. Busel, Anna A. Osinovskaya**

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*

# SPECIAL FACTORS IN RESTRICTIONS OF IRREDUCIBLE MODULES OF SPECIAL LINEAR AND SYMPLECTIC GROUPS TO SUBSYSTEM SUBGROUPS WITH TWO SIMPLE COMPONENTS

*(Communicated by Academician Vyacheslav I. Yanchevsky)*

**Abstract.** The restrictions of irreducible modules of special linear and symplectic groups in an odd characteristic $p$ with $p$-large highest weights to a subsystem subgroup $H$ of maximal rank with two simple components $H_1$ and $H_2$ are considered. The lower estimate for the number of composition factors for such restrictions, which are $p$-large for the subgroup $H_1$ and are not too small for $H_2$, is found. The lower estimates of the number of Jordan blocks of maximal size for the images of certain unipotent elements in the corresponding representations of such groups are determined.

**Keywords:** algebraic group, special linear group, symplectic group, irreducible representation, restriction of a representation, unipotent element

**For citation.** Suprunenko I. D., Busel T. S., Osinovskaya A. A. Special factors in restrictions of irreducible modules of special linear and symplectic groups to subsystem subgroups with two simple components. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2023, vol. 67, no. 2, pp. 95–100 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-2-95-100

**Введение.** Исследование ограничений представлений на подгруппы широко применяется при решении самых различных задач теории представлений. Такой подход позволяет использовать индукцию по рангу или порядку группы и важен для изучения структуры подгрупп алгебраических и линейных групп. Подсистемные подгруппы, т. е. подгруппы, порожденные корневыми подгруппами, ассоциированными со всеми корнями некоторой подсистемы системы корней, – важный класс подгрупп полупростых алгебраических групп. Ввиду объективной сложности задачи в положительной характеристике полное описание композиционных факторов ограничений неприводимых представлений представляется нереальным в общем случае, однако часто даже наличие одного фактора определенного вида позволяет выявить важные закономерности. При этом анализ ограничений представлений полупростых алгебраических групп на подсистемные подгруппы с двумя простыми компонентами дает информацию, которую вряд ли можно было бы получить, работая лишь с простыми подсистемными подгруппами. Наш опыт показывает, что изучение таких ограничений полезно для выяснения поведения определенных унипотентных элементов в соответствующих представлениях. Детальная информация о таком поведении нужна для решения задач распознавания представлений и линейных групп по наличию матриц заданного вида. Подобные задачи возникают в самых различных ситуациях, в том числе при решении прикладных проблем дискретной математики, связанных с изучением групп преобразований больших конечных множеств (например, в криптографии).

В исследованиях ограничений неприводимых представлений алгебраических групп на замкнутые подгруппы положительной размерности особое место занимает решение проблемы неприводимости таких ограничений. В основополагающей монографии Г. Зейца [1] она была решена для ограничений представлений простых классических алгебраических групп на связные замкнутые подгруппы, но не была указана одна серия неприводимых ограничений. Для исключительных алгебраических групп задача решена Д. Тестерман [2] для связных замкнутых подгрупп и С. Гхандур [3] для несвязных замкнутых подгрупп положительной размерности. В [4; 5] Т. Бэрнесс, С. Гхандур, К. Мэрион и Д. Тестерман решили задачу для ограничений представлений простых классических алгебраических групп на максимальные несвязные замкнутые подгруппы положительной размерности. Наконец, М. Каваллин и Д. Тестерман [6] обнаружили новую серию неприводимых представлений групп типа $D_{n+1}$, ограничения которых на естественно вложенную подгруппу типа $B_n$ неприводимы, устранив пробел в [1]. В совокупности эти результаты позволили описать максимальные неприводимые подгруппы положительной размерности классических алгебраических групп положительной характеристики. Информация об ограничениях представлений на подгруппы существенно использовалась при описании надгрупп унипотентных элементов определенного вида в простых алгебраических группах. Так, М. Либек, Г. Зейц и Д. Тестерман [7] описали неприводимые представления простых алгебраических групп в характеристике 0, образы которых содержат так называемые выделенные унипотентные элементы классических групп соответствующих размерностей. Для положительной характеристики аналогичные представления определены М. Корхоненом, учеником Д. Тестерман, в [8], там же указаны максимальные связные замкнутые надгруппы таких элементов простых алгебраических групп.

Далее $\mathbb{Z}^+$ – множество целых неотрицательных чисел, $K$ – алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 2$, $G = A_r(K)$ или $C_r(K)$, $\omega_i$ $(1 \le i \le r)$ – фундаментальные веса группы $G$, $\omega(\varphi)$ $(\omega(M))$ – старший вес представления $\varphi$ (модуля $M$), $d_\varphi(x)$ – степень минимального многочлена элемента $\varphi(x)$.

Напомним, что доминантный вес полупростой алгебраической группы над полем положительной характеристики $p$ называется $p$-ограниченным, если он является линейной комбинацией фундаментальных весов с коэффициентами, меньшими $p$. Неприводимый модуль (представление) называется $p$-ограниченным, если его старший вес $p$-ограничен. Для неприводимого модуля $M$ полупростой алгебраической группы над $K$ определим вес $\overline{\omega}(M)$ следующим образом: запишем старший вес $\omega(M)$ в виде линейной комбинации $\omega(M) = \sum_{k=0}^{j} p^k \lambda_k$, где $\lambda_k$ – $p$-ограниченные доминантные веса, и положим $\overline{\omega}(M) = \sum_{k=0}^{j} \lambda_k$. Легко видеть, что $\overline{\omega}(M)$ определяется однозначно. Назовем неприводимый модуль группы $A_n(K)$ или $C_n(K)$ $p$-большим, если сумма коэффициентов веса $\overline{\omega}(M)$ не меньше $p$.

Пусть $H \subset G$ – подсистемная подгруппа с двумя простыми компонентами $H_1$ и $H_2$. Предположим, что $H_1 \cong A_l(K)$, $H_2 \cong A_{r-l-1}(K)$ при $G = A_r(K)$ и $H_1 \cong C_l(K)$, $H_2 \cong C_{r-l}(K)$ при $G = C_r(K)$. Известно, что любой неприводимый $H$-модуль $V$ представляется в виде $V_1 \otimes V_2$, где $V_i$ – неприводимые $H_i$-модули, $i = 1, 2$.

Положим

$$\Delta = \begin{cases} \{0, p^j\omega_1, (p^j + p^k)\omega_1, p^j\omega_2, p^j\omega_{r-l-1}, \\ p^j\omega_{r-l-2}, (p^j + p^k)\omega_{r-l-1}, p^j\omega_1 + p^k\omega_{r-l-1}\} & \text{при } G = A_r(K); \\ \{0, p^j\omega_1, (p^j + p^k)\omega_1, p^j\omega_2\} & \text{при } G = C_r(K) \end{cases}$$

(здесь $j$ и $k$ – целые неотрицательные числа, они могут совпадать). Известно, что если $\rho$ – неприводимое представление группы $H_2$ и $\omega(\rho) \notin \Delta$, то

$$\dim\rho > \begin{cases} (r-l-1)^3/8 & \text{при } G = A_r(K), \\ (r-l)^3 & \text{при } G = C_r(K),\ r-l \geq 7. \end{cases} \tag{1}$$

Для $p$-ограниченных представлений это доказано в работе Ф. Любека [9, теорема 5.1 и таблицы], для произвольных неприводимых представлений наше утверждение следует из цитированных выше результатов Любека и теоремы Стейнберга о тензорном произведении. Из тех же результатов вытекает, что $\dim\rho$ не больше некоторой квадратичной функции ранга группы $H_2$ при $\omega(\rho) \in \Delta$. Поэтому естественно считать неприводимые представления группы $H_2$ со старшими весами из $\Delta$ малыми.

Т е о р е м а 1. *Пусть $G = A_r(K)$ или $C_r(K)$, $M$ – $p$-ограниченный неприводимый $G$-модуль со старшим весом $\sum_{i=1}^{r} a_i\omega_i$. Положим $s = \sum_{i=1}^{r} a_i$. Предположим, что $5 \leq l \leq r - 6$ и $s \geq 2p - 1$ при $G = A_r(K)$ и $3 \leq l \leq r - 3$ и $s - a_r \geq p + 1$ при $G = C_r(K)$. Пусть*

$$N = \begin{cases} s - 2d - 3 & \textit{при } s = 2p + d \textit{ или } s = 3p + d < 4p - 4,\ 0 < d < p - 1,\ G = A_r(K), \\ s - 3 & \textit{в других случаях при } G = A_r(K), \\ s - a_r - p - 1 & \textit{при } G = C_r(K). \end{cases}$$

*Тогда в ограничении $M \mid H$ имеется не менее $N$ композиционных факторов вида $M_{i1} \otimes M_{i2}$, где $M_{i1}$ – $p$-большой $H_1$-модуль, а $M_{i2}$ – неприводимый $H_2$-модуль с $\omega(M_{i2}) \notin \Delta$, $1 \leq i \leq N$.*

Эта теорема позволяет получить нижние оценки числа блоков Жордана максимальной размерности в образах унипотентных элементов из подгруппы $H_1$ в соответствующих неприводимых представлениях.

С л е д с т в и е 1. *В условиях теоремы 1 пусть $\varphi$ – представление группы $G$, реализующееся в модуле $M$, и, кроме того, $r - l \geq 7$ для $G = C_r(K)$. Тогда для любого унипотентного элемента $x \in H_1$ образ $\varphi(x)$ имеет не менее $N(r - l - 1)^3 / 4$ блоков Жордана максимальной размерности, равной порядку этого элемента, при $G = A_r(K)$ и не менее $2N(r - l)^3$ блоков Жордана максимальной размерности при $G = C_r(K)$.*

Используя информацию о замыканиях классов сопряженных унипотентных элементов группы $G$ в топологии Зарисского, удается распространить эти оценки на определенные унипотентные элементы, не лежащие в собственных подсистемных подгруппах.

С л е д с т в и е 2. *Пусть представление $\varphi$ удовлетворяет условиям следствия 1 и $G = A_r(K)$. Если $5 \leq p^t \leq r - 6$, то $\varphi(z)$ имеет не менее $N(r - p^t - 1)^3 / 4$ блоков Жордана размерности $p^{t+1}$ для любого элемента $z \in G$ порядка $p^{t+1}$. При $r \geq 11$ образ $\varphi(z)$ имеет не менее $N(r - 6)^3 / 4$ блоков Жордана размерностей $p$ и 9 соответственно для элементов $z \in G$ порядка $p$ и элементов порядка 9 при $p = 3$.*

С л е д с т в и е 3. *Пусть представление $\varphi$ удовлетворяет условиям следствия 1 и $G = C_r(K)$. Если $3 \leq (p^t + 1) / 2 \leq r - 7$, то $\varphi(z)$ имеет не менее $2N(r - (p^t + 1) / 2)^3$ блоков Жордана размерности $p^{t+1}$ для любого элемента $z \in G$ порядка $p^{t+1}$. При $r \geq 10$ образ $\varphi(z)$ имеет не менее $2N(r - 7)^3$ блоков Жордана размерностей $p$ и 9 соответственно для элементов $z \in G$ порядка $p$ и элементов порядка 9 при $p = 3$.*

**О доказательствах результатов.** Приведем сначала несколько общих утверждений, используемых для доказательства основных результатов и справедливых для обеих групп.

Т е о р е м а 2 ([10, теорема 1]). *Пусть $G = A_r(K)$ или $C_r(K)$. Тогда образ унипотентного элемента в p-большом представлении группы G имеет не менее двух блоков Жордана размерности, равной порядку этого элемента.*

Ниже $\mathrm{cl}(g)$ и $\overline{\mathrm{cl}(g)}$ – класс сопряженных элементов, содержащий элемент $g$, и его замыкание в топологии Зарисского.

Л е м м а 1 ([11, лемма 2.14]). *Пусть Γ – полупростая алгебраическая группа, $g$, $h \in \Gamma$ – унипотентные элементы, $h \in \overline{\mathrm{cl}(g)}$, φ – рациональное представление группы Γ. Предположим, что $d_\varphi(g) = d_\varphi(h)$. Тогда элемент $\varphi(g)$ имеет не меньше блоков Жордана максимальной размерности, чем $\varphi(h)$.*

Л е м м а 2. *Пусть $G = A_r(K)$ или $C_r(K)$, $s \in \mathbb{Z}^+$, $x \in G$ – элемент, имеющий в стандартной реализации группы G один блок размерности $p^s + 1$ и тривиальные блоки. Тогда $x \in \overline{\mathrm{cl}(g)}$, если $g \in G$ и $|g| = |x|$.*

Лемма 2 известна и легко следует из описания классов сопряженных унипотентных элементов группы $G$.

Введем еще несколько обозначений. Пусть $\alpha_i$ $(1 \le i \le r)$ – простые корни группы $G$, $\mathfrak{X}_\alpha$ – корневая подгруппа, ассоциированная с корнем α, $G(\beta_1, \ldots, \beta_k) \subset G$ – подгруппа, порожденная подгруппами $\mathfrak{X}_{\pm\beta_1}, \ldots, \mathfrak{X}_{\pm\beta_k}$, $G(i_1, \ldots, i_k) = G(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k})$, $\mathbf{X}(M)$ – множество весов модуля $M$, $M_\lambda$ – весовое подпространство веса λ. Используются также «смешанные» обозначения $G(i_1, \ldots, i_k, \beta, i_{k+1}, \ldots, i_t)$. Известно, что все подсистемные подгруппы, изоморфные $H$, сопряжены. Поэтому для поиска искомых факторов можно выбрать любую из них.

При $G = A_r(K)$ положим $t = r - k$ при $l = 2k$ и $t = r - k - 1$ при $l = 2k + 1$, $H_1 = G(1, \ldots, k, \alpha_{k+1} + \ldots + \alpha_{t+1}, t + 2, \ldots, r)$, $H_2 = G(k + 2, \ldots, t)$. Легко видеть, что $H_1 \cong A_l(K)$, $H_2 \cong A_{r-l-1}(K)$. Пусть $M$ – модуль, удовлетворяющий условиям теоремы 1, $U_H$ – подгруппа, порожденная всеми корневыми подгруппами группы $H$, ассоциированными с положительными корнями. Если $m \in M$ – ненулевой весовой вектор, инвариантный относительно $U_H$, то пусть $F(m)$ – неприводимый $H$-модуль, изоморфный фактор-модулю модуля $KHm$ по его единственному максимальному подмодулю. Для фиксированных чисел $a$ и $b$ обозначим символом $\mathbf{X}(M)_{a,b}$ множество весов модуля $M$ вида $\omega(M) - a\alpha_{k+1} - b\alpha_{t+1} - \sum_{i \ne k+1, t+1} c_i \alpha_i$. Положим $M_{a,b} = \oplus M_\lambda \mid \lambda \in \mathbf{X}(M)_{a,b}$. Строится множество Σ, состоящее из $N$ различных пар $(a, b)$ со следующими свойствами: для любой пары $(a, b) \in \Sigma$ существует ненулевой весовой вектор $m_{a,b} \in M_{a,b}$, инвариантный относительно $U_H$; модуль $F(m_{a,b}) \cong F_1 \otimes F_2$, где $F_1$ – $p$-большой $H_1$-модуль, $F_2$ – неприводимый $H_2$-модуль с $\omega(F_2) \notin \Delta$; при этом различным парам соответствуют неизоморфные модули $F(m_{a,b})$. Отсюда следует утверждение теоремы для $A_r(K)$.

При построении множества Σ существенно используется следующая лемма.

Л е м м а 3. *1) Пусть $k + 1 \le i \le t + 1$, $a_i > 0$, $b \in \mathbb{Z}^+$, $0 < b \le a_i$. Положим $\lambda(k + 1, k + 1, b) = \omega(M) - b\alpha_{k+1}$. При $i > k + 1$ положим $c_i = b$, $c_j = a_j + c_{j+1}$ при $k + 1 \le j < i$ и $\lambda(k+1, i, b) = \omega(M) - \sum_{j=k+1}^{i} c_j \alpha_j$.*

*2) Пусть $1 \le i \le k + 1$, $a_i > 0$, $b$ $\mathbb{Z}^+$, $0 < b \le a_i$. Определим вес $\lambda(k + 1, k + 1, b)$, как в пункте 1). При $i < k + 1$ положим $c_i = b$, $c_j = a_j + c_{j-1}$ при $i < j \le k + 1$ и $\lambda(k+1, i, b) = \omega(M) - \sum_{j=i}^{k+1} c_j \alpha_j$.*

*3) Пусть $1 \le i < k + 1 < j < t + 1$, $a_i > 0$, $a_j > 0$, $b, d \in \mathbb{Z}^+$, $0 < b \le a_i$, $0 < d \le a_j$. Положим $c_i = b$, $c_f = a_f + c_{f-1}$ при $i < f \le k$, $c_j = d$, $c_f = a_f + c_{f+1}$ при $j > f \ge k + 2$, $c_{k+1} = a_{k+1} + c_k + c_{k+2}$ и $\lambda(k+1, i, j, b, d) = \omega(M) - \sum_{f=i}^{j} c_f \alpha_f$.*

*4) Пусть $t + 1 \le i \le r$, $a_i > 0$, $b \in \mathbb{Z}^+$, $0 < b \le a_i$. Положим $\lambda(t + 1, t + 1, b) = \omega(M) - b\alpha_{t+1}$. При $i > t + 1$ положим $c_i = b$, $c_j = a_j + c_{j+1}$ при $t + 1 \le j < i$ и $\lambda(t+1, i, b) = \omega(M) - \sum_{j=t+1}^{i} c_j \alpha_j$.*

*5) Пусть $k + 1 < i < t + 1 < j \le r$, $a_i > 0$, $a_j > 0$, $b, d \in \mathbb{Z}^+$, $0 < b \le a_i$, $0 < d \le a_j$. Положим $c_i = b$, $c_f = a_f + c_{f-1}$ при $i < f \le t$, $c_j = d$, $c_f = a_f + c_{f+1}$ при $j > f \ge t + 2$, $c_{t+1} = a_{t+1} + c_t + c_{t+2}$ и $\lambda(t+1, i, j, b, d) = \omega(M) - \sum_{f=i}^{j} c_f \alpha_f$.*

*Пусть $\lambda = \lambda(m, n, b)$ или $\lambda = \lambda(m, n, s, b, d)$ удовлетворяет условиям одного из пунктов 1)–5). Тогда $\lambda \in \mathbf{X}(M)$ и подпространство $M_\lambda$ состоит из векторов, инвариантных относительно $U_H$.*

Следствие 1 для специальных линейных групп вытекает из теоремы 2 и формулы (1). Для доказательства следствия 2 используем леммы 1 и 2.

Далее пусть $G = C_r(K)$. Положим $H_1 = G(1, \ldots, l-1, 2\alpha_l + 2\alpha_{l+1} + \ldots + 2\alpha_{r-1} + \alpha_r)$, $H_2 = G(l+1, \ldots, r)$. Используем обозначения $U_H$ и $F(m)$, как выше. Пусть $M$ – модуль, удовлетворяющий условиям теоремы 1. Для фиксированного $a \in \mathbb{Z}^+$ обозначим символом $\mathbf{X}(M)_a$ множество весов модуля $M$ вида $\omega(M) - a\alpha_l - \sum_{i \neq l} c_i\alpha_i$. Положим $M_a = \oplus M_\lambda \mid \lambda \in \mathbf{X}(M)_a$. В доказательстве для симплектических групп подпространства $M_a$ играют такую же роль, что и подпространства $M_{a,b}$ для специальных линейных групп. Строится множество $\Sigma_2$, состоящее из $N$ различных чисел $a$ со следующими свойствами: для любого $a \in \Sigma_2$ существует ненулевой весовой вектор $m_a \in M_a$, инвариантный относительно $U_H$; модуль $F(m_a) \cong F_1 \otimes F_2$, где $F_1$ – $p$-большой $H_1$-модуль; $F_2$ – неприводимый $H_2$-модуль с $\omega(F_2) \notin \Delta$; при этом $F(m_a) \ncong F(m_c)$ при $a \neq c$. Отсюда следует утверждение теоремы 1.

При построении множества $\Sigma_2$ существенно используется следующая лемма.

Л е м м а 4. *1) Пусть $l \leq i < r$, $a_i > 0$, $b \in \mathbb{Z}^+$, $0 < b \leq a_i$. Положим $\lambda = \lambda(l, l, b) = \omega(M) - b\alpha_l$. При $i > l$ положим $c_i = b$, $c_j = a_j + c_{j+1}$ при $l \leq j < i$ и $\lambda(l, i, b) = \omega(M) - \sum_{j=l}^{i} c_j\alpha_j$.*

*2) Пусть $1 \leq i \leq l$, $a_i > 0$, $b \in \mathbb{Z}^+$, $0 < b \leq a_i$. Определим вес $\lambda(l, l, b)$, как в пункте 1). При $i < l$ положим $c_i = b$, $c_j = a_j + c_{j-1}$ при $i < j \leq l$ и $\lambda(l, i, b) = \omega(M) - \sum_{j=l}^{i} c_j\alpha_j$.*

*3) Пусть $1 \leq i < l < j < r$, $a_i > 0$, $a_j > 0$, $b, d \in \mathbb{Z}^+$, $0 < b \leq a_i$, $0 < d \leq a_j$. Положим $c_i = b$, $c_f = a_f + c_{f-1}$ при $i < f < l$, $c_j = d$, $c_f = a_f + c_{f+1}$ при $j > f > l$, $c_l = a_l + c_{l-1} + c_{l+1}$ и $\lambda(l, i, b) = \omega(M) - \sum_{j=l}^{i} c_j\alpha_j$.*

*Пусть $\lambda = \lambda(l, i, b)$ или $\lambda = \lambda(l, i, j, b, d)$ удовлетворяет условиям одного из пунктов 1)–3). Тогда $\lambda \in \mathbf{X}(M)$ и подпространство $M_\lambda$ состоит из векторов, инвариантных относительно $U_H$.*

Следствие 1 для симплектических групп вытекает из теоремы 2 и формулы (1). Чтобы доказать следствие 3, используем леммы 1 и 2.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке БРФФИ (проект № Ф21-054).

**Acknowledgements.** The research is supported by the BRFFR (project No F21-054).

## Список использованных источников

1. Seitz, G. M. The maximal subgroups of classical algebraic groups / G. M. Seitz // Memoirs of the AMS. – 1987. – Vol. 67, N 365. https://doi.org/10.1090/memo/0365

2. Testerman, D. M. Irreducible subgroups of exceptional algebraic groups / D. M. Testerman // Memoirs of the AMS. – 1988. – Vol. 75, N 390. https://doi.org/10.1090/memo/0390

3. Ghandour, S. Irreducible disconnected subgroups of exceptional algebraic groups / S. Ghandour // J. Algebra. – 2010. – Vol. 323, N 10. – P. 2671–2709. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2010.02.018

4. Irreducible almost simple subgroups of classical algebraic groups / T. Burness [et al.] // Memoirs of the AMS. – 2015. – Vol. 236, N 1114. https://doi.org/10.1090/memo/1114

5. Burness, T. Irreducible geometric subgroups of classical algebraic groups / T. Burness, S. Ghandour, D. Testerman // Memoirs of the AMS. – 2015. – Vol. 239, N 1130. https://doi.org/10.1090/memo/1130

6. Cavallin, M. A new family of irreducible subgroups of the orthogonal algebraic groups / M. Cavallin, D. M. Testerman // Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B. – 2019. – Vol. 6, N 2. – P. 45–79. https://doi.org/10.1090/btran/28

7. Liebeck, M. Distinguished unipotent elements and multiplicity-free subgroups of simple algebraic groups / M. Liebeck, G. Seitz, D. Testerman // Pacific J. Mathematics. – 2015. – Vol. 279, N 1–2. – P. 357–382. https://doi.org/10.2140/pjm.2015.279.357

8. Korhonen, M. Reductive overgroups of distinguished unipotent elements in simple algebraic groups: Ph. D. Thesis / M. Korhonen. – Lausanne, 2017. – 241 p. https://doi.org/10.5075/epfl-thesis-8362

9. Lubeck, F. Small degree representations of finite Chevalley groups in defining characteristic / F. Lubeck // LMS J. Comput. Math. – 2001. – Vol. 4. – P. 135–169. https://doi.org/10.1112/S1461157000000838

10. Супруненко, И. Д. О поведении унипотентных элементов в представлениях классических групп с большими старшими весами / И. Д. Супруненко // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 5. – С. 11–15.

11. Suprunenko, I. D. Special composition factors in restrictions of representations of special linear and symplectic groups to subsystem subgroups with two simple components / I. D. Suprunenko // Тр. Ин-та математики. – 2018. – Т. 26, № 1. – С. 115–133.

## References

1. Seitz G. M. The maximal subgroups of classical algebraic groups. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 1987, vol. 67, no. 365. https://doi.org/10.1090/memo/0365

2. Testerman D. M. Irreducible subgroups of exceptional algebraic groups. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 1988, vol. 75, no. 390. https://doi.org/10.1090/memo/0390

3. Ghandour S. Irreducible disconnected subgroups of exceptional algebraic groups. *Journal of Algebra*, 2010, vol. 323, no. 10, pp. 2671–2709. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2010.02.018

4. Burness T., Ghandour S., Marion C., Testerman D. Irreducible almost simple subgroups of classical algebraic groups. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 2015, vol. 236, no. 1114. https://doi.org/10.1090/memo/1114

5. Burness T., Ghandour S., Testerman D. Irreducible geometric subgroups of classical algebraic groups. *Memoirs of the American Mathematical Society*, 2016, vol. 239, no. 1130. https://doi.org/10.1090/memo/1130

6. Cavallin M., Testerman D. A new family of irreducible subgroups of the orthogonal algebraic groups. *Transactions of the American Mathematical Society, Series B*, 2019, vol. 6, no. 2, pp. 45–79. https://doi.org/10.1090/btran/28

7. Liebeck M., Seitz G., Testerman D. Distinguished unipotent elements and multiplicity-free subgroups of simple algebraic groups. *Pacific Journal of Mathematics*, 2015, vol. 279, no. 1–2, pp. 357–382. https://doi.org/10.2140/pjm.2015.279.357

8. Korhonen M. *Reductive overgroups of distinguished unipotent elements in simple algebraic groups.* Ph. D. Thesis. Lausanne, 2017. 241 p. https://doi.org/10.5075/epfl-thesis-8362

9. Lubeck F. Small degree representations of finite Chevalley groups in defining characteristic. *LMS Journal of Computation and Mathematics*, 2001, vol. 4, pp. 135–169. https://doi.org/10.1112/S1461157000000838

10. Suprunenko I. D. On the behaviour of unipotent elements in representations of classical groups with large highest weights. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2005, vol. 49, no. 5, pp. 11–15 (in Russian).

11. Suprunenko I. D. Special composition factors in restrictions of representations of special linear and symplectic groups to subsystem subgroups with two simple components. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2018, vol. 26, no. 1, pp. 115–133.

## Информация об авторах

*Супруненко Ирина Дмитриевна* – д-р физ.-мат. наук.

*Бусел Татьяна Сергеевна* – канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: tbusel@gmail.com.

*Осиновская Анна Александровна* – канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: anna@im.bas-net.by.

## Information about the authors

*Suprunenko Irina D.* – D. Sc. (Physics and Mathematics).

*Busel Tatsiana S.* – Ph. D. (Physics and Mathematics), Researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tbusel@gmail.com.

*Osinovskaya Anna A.* – Ph. D. (Physics and Mathematics), Researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: anna@im.bas-net.by.