ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

TECHNICAL SCIENCES

УДК 536.2.001 Поступило в редакцию 04.04.2022
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-2-144-155 Received 04.04.2022

В. А. Кот

Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

НОВЫЕ ПОДХОДЫ К РАСЧЕТУ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ МЕТОДОМ КАРМАНА–ПОЛЬГАУЗЕНА

(Представлено членом-корреспондентом Н. В. Павлюкевичем)

Аннотация. Представлено несколько эффективных вычислительных схем для расчета задач гидродинамики, обеспечивающих достижение минимальных ошибок определения основных параметров пограничного слоя. Полученный в работе новый трехчленный полином, описывающий профиль скорости в пограничном слое, существенно превосходит по точности все известные, аналогичные по форме, решения. Также предложена схема нахождения достаточно точного решения на основе двух классических полиномов Польгаузена третьей и четвертой степени в виде их полусуммы. Данное решение обладает лучшими аппроксимационными свойствами по сравнению с исходными профилями. Получено высокоточное решение для профиля скорости в виде $F(\zeta) = (1+1{,}135\zeta)(1-\zeta)^3$, причем кривая профиля скорости практически совпадает с точным решением. Ошибка определения напряжения трения составляет $\varepsilon_{\tau_w} = 0{,}0008$ %. Данное решение дает практически точное значение напряжения трения с очень малыми ошибками расчета толщины вытеснения (0,12 %) и формпараметра (0,12 %).

Ключевые слова: метод Кармана–Польгаузена, пограничный слой, уравнение Блазиуса, полиномиальные решения, интегральные методы

Для цитирования. Кот, В. А. Новые подходы к расчету пограничного слоя методом Кармана–Польгаузена / В. А. Кот // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2023. – Т. 67, № 2. – С. 144–155. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-2-144-155

Valery A. Kot

A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

NEW APPROACHES TO CALCULATION OF THE BOUNDARY LAYER BY THE KARMAN–POHLHAUSEN METHOD

(Communicated by Corresponding Member Nikolai V. Pavlyukevich)

Abstract. Several efficient computational schemes, providing the attainment of minimum errors in determining the main parameters of a boundary layer, are presented. The new trinomial polynomial obtained for definition of the velocity profile in the boundary layer much exceeds in accuracy all the known analogous solutions. A scheme of finding a fairly exact solution in the form of the half-sum of the classical Pohlhausen polynomials of the third and fourth degrees is proposed. This solution possesses better approximation properties compared to those of the initial profiles. A high-accuracy solution has been obtained for the velocity profile in the form $F(\zeta) = (1+1.135\zeta)(1-\zeta)^3$, the velocity profile curve being almost coincident with the exact solution. The friction stress error is $\varepsilon_{\tau_w} = 0.0008$ %. This solution yields an almost exact value of friction stress with very small calculation errors of the displacement thickness (0.12 %) and the form parameter (0.12 %).

Keywords: Karman–Pohlhausen method, boundary layer, Blasius equation, polynomial solutions, integral methods

For citation. Kot V. A. New approaches to calculation of the boundary layer by the Karman–Pohlhausen method. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2023, vol. 67, no. 2, pp. 144–155 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-2-144-155

Введение. В начале прошлого века Л. Прандтль [1] заложил основы теории пограничного слоя (ПС), объединив, казалось бы, несовместимые в то время науки: теоретическую гидродинамику и гидравлику. Теория пограничного слоя нашла применение при расчете сопротивления поверхностного трения, которое действует на тело при его движении в жидкости и газе [2]. В настоящую эпоху микроэлектроники теория пограничного слоя вновь приобретает большой научный интерес в связи с изучением течений газа и жидкости в микромасштабном режиме. Сохранив подход Прандтля к пограничным слоям [1] и одновременно автомодельное решение, представленное Блазиусом [3], метод Кармана–Польгаузена, который основан на интеграле импульса и представлен в статьях Кармана [4] и Польгаузена [5], в настоящее время считается одним из основных в теории ПС. Это связано с весьма высокой эффективностью расчета множества важнейших свойств ПС в потоках с низким и высоким числами Рейнольдса. Благодаря своей простоте данный метод входит в основные разделы монографий, посвященных теории ПС [6; 7]. Цель настоящей работы состоит в представлении новых вычислительных схем для динамического пограничного слоя на основе интегрального метода Кармана–Польгаузена.

1. Течение жидкости на плоской пластине. Уравнение Блазиуса. Установившееся плоское течение жидкости с заданным давлением $p(x)$ мимо тонкой пластины описывается уравнениями Навье–Стокса в приближении пограничного слоя [6]

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0,\\ u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=\nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\end{gathered} \tag{1.1}$$

где u и v – компоненты скорости жидкости вдоль координат x и y соответственно; ν – кинематическая вязкость жидкости; ρ – плотность жидкости. Граничными условиями будут

$$\begin{gathered}u(0,x)=0, \qquad \upsilon(0,x)=0,\\ u(x,y)=U(x), \quad y\to\infty,\end{gathered} \tag{1.2}$$

где $U(x)$ – скорость основного потока. Граничные условия (1.2) при $y=0$ основаны на том предположении, что на пластине не допускается проскальзывание и массоперенос, тогда как оставшееся граничное условие означает, что скорость u асимптотически стремится к $U=U(x)$.

Для решения задачи вводится в рассмотрение потенциал $\Psi(x,y)$ (функция тока)

$$u=\frac{\partial\Psi}{\partial y}, \quad v=-\frac{\partial\Psi}{\partial x}.$$

Математическая мотивация введения такой новой переменной заключается в том, что уравнение неразрывности выполняется тождественно и остается лишь одно преобразованное уравнение. При $U=\text{const}$ задача упрощается. С помощью преобразования Блазиуса [3]

$$\eta=y\sqrt{\frac{U}{\nu x}}, \qquad f(\eta)=\frac{[\Psi(y,x)]}{\sqrt{\nu yU}} \;\;\to\;\; \Psi(x,y)=f(\eta)\sqrt{\nu yU} \tag{1.3}$$

математическая модель с частными производными (1.1) сводится к модели для полубесконечной области, описываемой дифференциальным уравнением (уравнение Блазиуса)

$$\begin{gathered}f'''(\eta)+\frac{1}{2}f(\eta)f''(\eta)=0, \quad \eta\ge 0,\\ f(0), \qquad f'(0)=0, \qquad \lim_{\eta\to\infty}f'(\eta)=1.\end{gathered} \tag{1.4}$$

Здесь η и $f(\eta)$ – соответственно безразмерная координата и безразмерная функция тока. Задача (1.4) решена Блазиусом посредством ее описания степенным рядом в асимптотическом приближении при некотором конечном значении параметра η:

$$f(\eta)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\frac{A_k\sigma^{k+1}}{(3k+2)!}\eta^{3k+2}, \tag{1.5}$$

где

$$A_0=A_1=1,\quad A_k=\sum_{r=0}^{k-1}\binom{3k-1}{3r}A_rA_{k-r-1}\quad (k\ge 2).$$

В (1.5) параметр σ является неизвестной второй производной $\sigma = f^{*}(0)$. Компонента скорости u может быть определена из функции тока следующим образом:

$$u=\frac{\partial\Psi}{\partial y}=U\frac{df}{d\eta}\quad\to\quad\frac{u}{U}=f'. \tag{1.6}$$

Несмотря на присутствие в (1.5) знаменателя $(3k+2)!$, ряд (1.6) сходится лишь на конечном интервале $[0, R]$, где $R\approx 5{,}69$ [8]. Данная задача является предметом активных исследований. Ховарт [9] численно решил задачу Блазиуса, определив $\sigma\approx 0{,}33206$. В [10] найдено значение $\sigma\approx 0{,}332057336$. В дальнейшем для параметра σ получено еще более точное значение [см., напр., 11; 12].

Наиболее важными параметрами являются, в частности, коэффициент сопротивления C_f и толщина вытеснения потока δ^*, для которых имеют место соотношения [7]

$$\frac{1}{2}C_f\sqrt{\mathrm{Re}_x}=f''(0),$$

$$\frac{\delta^*}{x}\sqrt{\mathrm{Re}_x}=\int_0^{\infty}\frac{U-u}{U}dy=\int_0^{\infty}(1-f')\,d\eta\approx\int_0^{\alpha}(1-f')\,d\eta,$$

где $\mathrm{Re}_x=Ux/\nu$ – локальное число Рейнольдса; $\alpha=\frac{\delta}{x}\sqrt{\mathrm{Re}_x}$, δ – толщина ПС, которую, в зависимости от степени приближений, можно определить как

$$\delta\approx\eta_1\frac{x}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}.$$

Касательное напряжение трения τ_w определяется формулой

$$C_f=\frac{\tau_w}{\frac{1}{2}\rho U^2}\quad\to\quad\tau_w=\frac{1}{2}C_f\,\rho U^2=f''(0)\frac{\rho U^2}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}. \tag{1.7}$$

Для толщины вытеснения импульса имеем

$$\frac{\Theta}{x}\sqrt{\mathrm{Re}_x}=\int_0^{\infty}\frac{U-u}{U}\frac{u}{U}dy=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}(1-f')f'd\eta\approx\frac{1}{2}\int_0^{\eta_1}(1-f')f'\,d\eta=s\approx 0{,}332057336.... \tag{1.8}$$

Толщина вытеснения потока δ_1 определяется следующим образом:

$$\frac{\delta_1}{x}\sqrt{\mathrm{Re}_x}=\int_0^{\infty}(1-f')\,d\eta\approx 1{,}7208\,. \tag{1.9}$$

С учетом (1.8) и (1.9) находим формпараметр

$$H=\frac{\delta_1}{\Theta}=\int_0^{\infty}(1-f')d\eta\Big/\int_0^{\infty}(1-f')f'd\eta\approx\int_0^{\eta_1}(1-f')d\eta\Big/\int_0^{\eta_1}(1-f')f'd\eta\approx 2{,}59110....$$

2. Некоторые определяющие соотношения и параметры ПС. Как показано Карманом [4] и Польгаузеном [5], при получении решения задачи (1.1), (1.2) можно потребовать выполнения дифференциальных уравнений (1.1) в среднем по толщине ПС. С этой целью берется за основу уравнение импульсов с заменой дифференциальных уравнений (1.1) на интегральное соотношение, которое получается посредством интегрирования исходных уравнений в пределах толщины ПС. Таким интегральным соотношением является [4]

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta}(U-u)u\,dy+\frac{\partial U}{\partial x}\int_0^{\delta}(U-u)\;dy=\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}. \tag{2.1}$$

Введем в рассмотрение безразмерные параметры

$$\zeta=\frac{y}{\delta},\qquad F=F(\zeta)=\frac{u}{U}(\zeta)=\tilde{u}. \tag{2.2}$$

При $\partial U/\partial x=0$ вместо (2.1), с учетом (2.2), имеем интегральное соотношение Кармана

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{\delta}(U-u)u\,dy=\nu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}, \tag{2.3}$$

которому можно придать вид

$$\delta'(x)\delta(x)\int_0^1(1-F)F\,d\zeta=\frac{\nu}{U}F'(0). \tag{2.4}$$

Для толщины ПС имеем

$$\delta=\eta_1\sqrt{\frac{\nu}{U}x}=x\eta_1\sqrt{\frac{\nu}{Ux}}\quad\to\quad\frac{\delta}{x}=\frac{\eta_1}{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}. \tag{2.5}$$

Подстановка (2.5) в (2.4) дает интегральное соотношение

$$\frac{\eta_1{}^2}{2}\int_0^1(1-F)F\,d\zeta=\frac{\eta_1{}^2}{2}\alpha_2=F'(0). \tag{2.6}$$

Введем в рассмотрение параметры α_1 и α_2, а также формпараметр H, определяемые как

$$\alpha_1=\int_0^1(1-F)F\,d\zeta,\quad\alpha_2=\int_0^1(1-F)F\,d\zeta,\quad H=\frac{\delta^*}{\Theta}=\frac{\delta\alpha_1}{\delta\alpha_2}=\frac{\alpha_1}{\alpha_2}. \tag{2.7}$$

Из (2.6) и (2.7) находим

$$\eta_1=\sqrt{2\frac{F'(0)}{\alpha_2}}. \tag{2.8}$$

Следуя Польгаузену и другим авторам, зададим профиль скорости в виде

$$\frac{u}{U}=F(\zeta)=\sum_{k=0}^{N}a_k\zeta^k.$$

Анализ известных простых полиномиальных решений рассматриваемой задачи позволяет более критично подойти к проблеме задания граничных условий на стенке и внешней стороне пограничного слоя, которые впервые были введены Польгаузеном [5]:

$$F(1)=1,\quad\left.\frac{dF}{d\zeta}\right|_{\zeta=1}=F'(1)=0,\quad\left.\frac{d^2F}{d\zeta^2}\right|_{\zeta=1}=F''(1)=0,\quad\left.\frac{d^3F}{d\zeta^3}\right|_{\zeta=1}=F'''(1)=0. \tag{2.9}$$

Граничные условия (2.9) являются частным случаем последовательности

$$\left.\frac{d^nF}{d\zeta^n}\right|_{\zeta=1}=F^{(n)}(1)=0,\quad n=1,2,3,\ldots.$$

Из (1.1) и (1.2) при $U=\mathrm{const}$ $(\omega=du(0,x)/dy)$ имеем граничные условия

$$\begin{gathered}u(0,x)=0,\quad\frac{\partial^2u(0,x)}{\partial y^2}=0,\quad\frac{\partial^3u(0,x)}{\partial y^3}=0,\quad\frac{\partial^4u(0,x)}{\partial y^4}=\frac{1}{\nu}\omega\frac{\partial\omega}{\partial x},\\ \frac{\partial^5u(0,x)}{\partial y^5}=0,\quad\frac{\partial^6u(0,x)}{\partial y^6}=0,\quad\frac{\partial^7u(0)}{\partial y^7}=\frac{\omega}{\nu^2}\left(4\omega\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}-\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2\right),\ldots\end{gathered} \tag{2.10}$$

Выделим в (2.10) особые («нулевые») граничные условия

$$F(0)=0,\quad F''(0)=0,\quad F'''(0)=0.$$

Для внешней стороны ПС ($\zeta=1$) запишем наиболее важные из них:

$$F(1)=1,\quad F'(1)=0,\quad F''(1)=0,\quad F'''(1)=0,\quad F^{(4)}(1)=0.$$

Отталкиваясь от той либо иной конкретной функции $F(\zeta)$, будем далее определять по (2.7) и (2.8) параметры α_1, α_2, H и η_1. Из (1.3), (1.7) и (2.5) получаем преобразование $\zeta\to\eta/\eta_1$, которое позволяет записать искомое решение для профиля скорости в виде, аналогичном по форме решению классической задачи Блазиуса (1.4), т. е.

$$\tilde{u}(\zeta)=F(\zeta)\leftrightarrow f'(\zeta)\quad\to\quad \tilde{u}(\eta)=F(\eta)=F\left(\frac{\eta}{\eta_1}\right)\leftrightarrow f'\left(\frac{\eta}{\eta_1}\right).$$

Для оценки точности приближенных решений используем отклонение $E_{\tilde{u}}$, а также среднеквадратичное отклонение (норму ошибки) L_2, рассчитываемые как

$$E_u(\eta)=\tilde{u}(\eta)-f'(\eta),\quad L_2=\sqrt{\frac{1}{\eta_1}\int_0^{\eta_1}[\tilde{u}(\eta)-f'(\eta)]^2\,\mathrm{d}\eta}.$$

Точность расчета оценим посредством относительных ошибок

$$\varepsilon_{\delta_1}=\left|\frac{\delta_1}{1,7208}-1\right|100\,\%,\quad \varepsilon_H=\left|\frac{H}{2,5911}-1\right|100\,\%,$$
$$\varepsilon_{C_f}=\left|\frac{C_f}{0,6641}-1\right|100\,\%,\quad \varepsilon_{\tau_w}=\varepsilon_{f''(0)}=\left|\frac{f''(0)}{0,332057}-1\right|100\,\%. \tag{2.11}$$

3. Анализ известных полиномиальных решений для ПС. Рассмотрим известные полиномиальные решения для профиля скорости, полученные на основе интегрального соотношения Кармана. Отдельно рассмотрим решения при следующих ограничениях на стенке: 1 – $F''(0)=0$, 2 – $\{F''(0)=0, F'''(0)=0\}$, 3 – $\{F''(0)=0, F'(0)\cong\eta_1 s\}$.

Ограничение $dF^2(0)/d\zeta^2=0$. Для данного ограничения построены все основные классические решения для ПС [5]. В частности, функции $F_1(\zeta)$, $F_2(\zeta)$ и $F_3(\zeta)$ вида

$$F_1(\zeta)=\frac{3}{2}\zeta-\frac{1}{2}\zeta^3, \tag{3.1}$$

$$F_2(\zeta)=2\zeta-2\zeta^3+\zeta^4, \tag{3.2}$$

$$F_3(\zeta)=\frac{5}{2}\zeta-5\zeta^3+5\zeta^4-\frac{3}{2}\zeta^5 \tag{3.3}$$

при разных системах ограничений на внешней стороне ПС (табл. 1) были получены Польгаузеном [5]. Вспомогательные параметры α_1, α_2, $F'(0)$ и η_1 для функций (3.1)–(3.3) представлены в табл. 2.

Как показали графики функций (3.1)–(3.3) (рис. 1, *a*), наилучшему приближению отвечает профиль $F_2(\eta)$ на основе трехчленного полинома четвертой степени, что соответствует «симметричным» ограничениям $F''(0)=F''(1)=0$ (рис. 1, *b*). Как видим, добавление граничного условия $F''(1)=0$ позволило существенно улучшить решение по сравнению с профилем $F_1(\delta)$. Обратим также внимание, что добавление ограничения $F'''(1)=0$ (профиль $F_3(\eta)$) приводит к заметному ухудшению аппроксимации. По всей видимости, это связано с нарушением отмеченной выше согласованности старших нулевых производных в точках $\zeta=0$ и $\zeta=1$. Рассчитанные по (2.11) параметры δ, δ_1, H, τ_w и C_f представлены в табл. 3. Наилучшее приближение к точным значениям τ_w, C_f и H достигается в профиле $F_2(\eta)$.

Ограничения $dF^2(0)/d\zeta^2=0$ и $dF^3(0)/d\zeta^3=0$. В [13] Н. Кёрл ввел в рассмотрение граничное условие $F'''(0)=0$, что дало возможность прийти к полиному

Т а б л и ц а 1. **Граничные условия и отвечающие им профили скорости**

T a b l e 1. **Boundary conditions and corresponding velocity profiles**

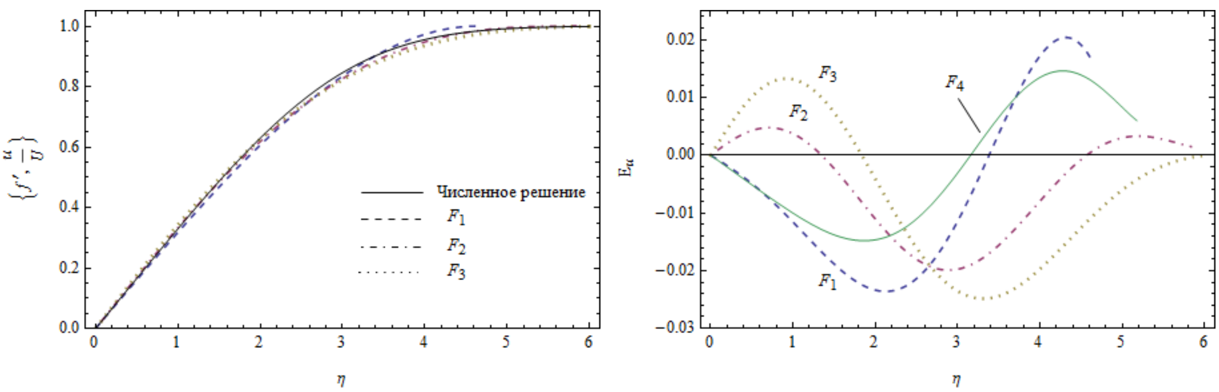
F_n	$\zeta = 0$	$\zeta = 1$	$F(\zeta)$	Источник
F_1	$F = F'' = 0$	$F = 1,\quad F' = 0$	$\frac{3}{2}\zeta - \frac{1}{2}\zeta^3$	[5]
F_2	$F = F'' = 0$	$F = 1,\quad F' = F'' = 0$	$2\zeta - 2\zeta^3 + \zeta^4$	[5]
F_3	$F = F'' = 0$	$F = 1,\quad F' = F'' = F''' = 0$	$\frac{5}{2}\zeta - 5\zeta^3 + 5\zeta^4 - \frac{3}{2}\zeta^5$	[5]
F_4	$F = F'' = F''' = 0$	$F = 1,\quad F' = F'' = 0$	$\frac{5}{3}\zeta - \frac{5}{3}\zeta^4 + \zeta^5$	[13]
F_5	$F = F'' = 0,\quad F' \simeq \eta_1 s$	$F = 1,\quad F' = 0$	$\frac{5}{3}\zeta - \frac{5}{3}\zeta^4 + \zeta^5$	[14]
F_6	$F = F'' = 0$	$F = 1,\quad F' = 0$	$\frac{7}{4}\zeta - \frac{5}{4}\zeta^3 + \frac{1}{2}\zeta^4$	*
F_7	$F = F'' = 0,\quad F' \simeq \eta_1 s$	$F = 1,\quad F' = F'' = 0$	$\frac{9}{5}\zeta - \zeta^3 + \frac{1}{5}\zeta^6$	*
F_8	$F = 0,\quad F' \simeq \eta_1 s$	$F = 1,\quad F' = F'' = 0$	$1 - \left(1 + \frac{227}{200}\zeta\right)(1-\zeta)^3$	*

П р и м е ч а н и е. * – новое решение.
N o t e. * – new solution.

Т а б л и ц а 2. **Вспомогательные параметры**

T a b l e 2. **Subsidiary parameters**

F_n	α_1	α_2	$H = \alpha_1 / \alpha_2$	$F'(0)$	η_1
F_1	3/8	39/280	35/13	3/2	4,6409
F_2	3/10	37/315	189/74	2	5,8355
F_3	1/4	10/99	99/40	5/2	7,0356
F_4	1/3	775/6237	2079/775	5/3	5,1794
F_5	13/20	379/2835	7371/1516	5/3	4,9934
F_6	27/80	1313/10080	3402/1313	7/4	5,1836
F_7	9/28	279/2275	325/124	9/5	5,4180
F_8	1227/4000	170273/1440000	441720/170273	373/200	5,6165



a *b*

Рис. 1. Профили скорости в ПС на основе точного решения (сплошная линия), полиномов $F_1(\eta)$ (штриховая линия), $F_2(\eta)$ (штрихпунктирная линия), $F_3(\eta)$ (пунктирная линия) (*a*) и графики отклонений $E_u(\eta)$ для профилей скорости $F_1(\eta) - F_4(\eta)$ (*b*)

Fig. 1. Velocity profiles in the BL on the basis of the exact solution (full line) and the polynomials $F_1(\eta)$ (dashed line), $F_2(\eta)$ (dash-dotted line), and $F_3(\eta)$ (dotted line) (a) and graphs of the deviation $E_u(\eta)$ for the velocity profiles $F_1(\eta) - F_4(\eta)$ (*b*)

Т а б л и ц а 3. **Основные свойства пограничного слоя, описываемого полиномами $F_1 - F_8$**

T a b l e 3. **Basic properties of the boundary layer described by polynomials $F_1 - F_8$**

F_n	$\tilde{u}(\eta) = \frac{u}{U}(\eta)$	$\frac{\delta^*}{x}\sqrt{\mathrm{Re}_x}$	H	$C_f\sqrt{\mathrm{Re}_x}$	$f''(0)$	L_2
F_1	$\frac{3}{2}\zeta - \frac{1}{2}\zeta^3$	1,7403 1,13 %	2,692 3,90 %	0,6464 9,47 %	0,3232 9,47 %	0,0153
F_2	$2\zeta - 2\zeta^3 + \zeta^4$	1,7506 1,73 %	2,554 1,43 %	0,6854 3,21 %	0,3427 3,21 %	0,0108
F_3	$\frac{5}{2}\zeta - 5\zeta^3 + 5\zeta^4 - \frac{3}{2}\zeta^5$	1,7589 2,21 %	2,475 4,48 %	0,7107 7,02 %	0,3553 7,02 %	0,0152
F_4	$\frac{5}{3}\zeta - \frac{5}{3}\zeta^4 + \zeta^5$	1,7264 0,33 %	2,682 3,51 %	0,6435 3,10 %	0,3217 3,10 %	0,0106
F_5	$\frac{5}{3}\zeta - \zeta^3 + \frac{1}{3}\zeta^4$	4,9934	1,7477 1,56 %	2,618 1,04 %	0,6675 0,51 %	0,0121
F_6	$\frac{7}{4}\zeta - \frac{5}{4}\zeta^3 + \frac{1}{2}\zeta^4$	1,7495 1,66 %	2,591 0 %	0,6752 1,67 %	0,3376 1,67 %	0,0113
F_7	$\frac{9}{5}\zeta - \zeta^3 + \frac{1}{5}\zeta^6$	5,4180	1,7415 1,20 %	2,621 1,16 %	0,6644 0,045 %	0,0094
F_8	$1 - \left(1 + \frac{227}{200}\zeta\right)(1-\zeta)^3$	5,6164	1,7228 0,12 %	2,594 0,12 %	0,6641 0,0008 %	0,0049
Блазиус		1,7208	2,591	0,6641	0,33206	–

$$F_4(\zeta) = \frac{5}{3}\zeta - \frac{5}{3}\zeta^4 + \zeta^5 \tag{3.4}$$

при $\eta_1 = 5{,}1794$. Если сравнить данное решение с решением Польгаузена $F_2(\eta)$ (рис. 1, *a*), то, как это можно видеть из графиков для отклонения E_u (рис. 1, *b*), решение Кёрла (3.4) является несколько лучшим. Это подтверждают рассчитанные параметры ПС (табл. 3).

Ограничения $F''(0) = 0$ и $F' \cong \eta_1 s$. Поскольку значение второй производной $f''(0)$ известно и вычислено с высокой точностью, для аппроксимации профиля скорости многие авторы часто прибегают к заданию заранее известной первой производной скорости потока на стенке $\tilde{u}'(0)$. Здесь речь идет об условии

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{u}(0)}{\mathrm{d}\eta} = f''(0) = 0{,}332057... \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}F(0)}{\mathrm{d}\zeta} = \eta_1 s = \bar{s}, \quad s = 0{,}332057....$$

Данное условие, в частности, использовано авторами работы [14], где получена функция $F_5(\zeta) = \frac{5}{3}\zeta - \zeta^3 + \frac{1}{3}\zeta^4$. Авторы [14] отказались от условия $F''(1)$, посчитав его «нереалистичным». Применив граничные условия $F(0) = F''(0) = 0$, $F'(0) = s$ и $F(1) = 1$ и $F'(1) = 0$, имеем

$$F(\zeta) = a_1\zeta + (4 - 3a_1)\zeta^3 + (2a_1 - 3)\zeta^4.$$

Нахождение коэффициента a_1 авторы работы [14] связали с поиском минимума функции

$$R = \left(\frac{\alpha_1 - \bar{\alpha}_1}{\bar{\alpha}_1}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_2 - \bar{\alpha}_2}{\bar{\alpha}_2}\right)^2 + \left(\frac{a_1 - s\bar{\eta}_1}{s\bar{\eta}_1}\right)^2,$$

где $\bar{\alpha}_1 \approx 0{,}344, \bar{\alpha}_2 \approx 0{,}133,$ $s\bar{\eta}_1 \approx 1{,}660$ $(s \approx 0{,}332, \delta \approx 5)$ [6], а также параметры α_1 и α_2 определяются формулами (2.7). Для нахождения a_1 приравнивается нулю первая производная $\mathrm{d}R / \mathrm{d}a_1 = 0,$ что дает кубическое уравнение с корнем $a_1 \approx 1{,}6794 \approx 5/3.$ Отсюда

$$F_5(\zeta) = \frac{5}{3}\zeta - \zeta^3 + \frac{1}{3}\zeta^4. \tag{3.5}$$

Используя преобразование $\zeta \to \eta/\eta_1$ $(\eta_1 = 4{,}9934)$, имеем следующее решение:

$$F_5(\eta): \quad \tilde{u} = 0{,}33377\eta - 0{,}008032\eta^3 + 0{,}0005362\eta^4. \tag{3.6}$$

График профиля скорости для (3.6) характеризуется лучшим приближением к точному решению по сравнению с функциями $F_2(\eta)$ и $F_4(\eta)$ (рис. 2).

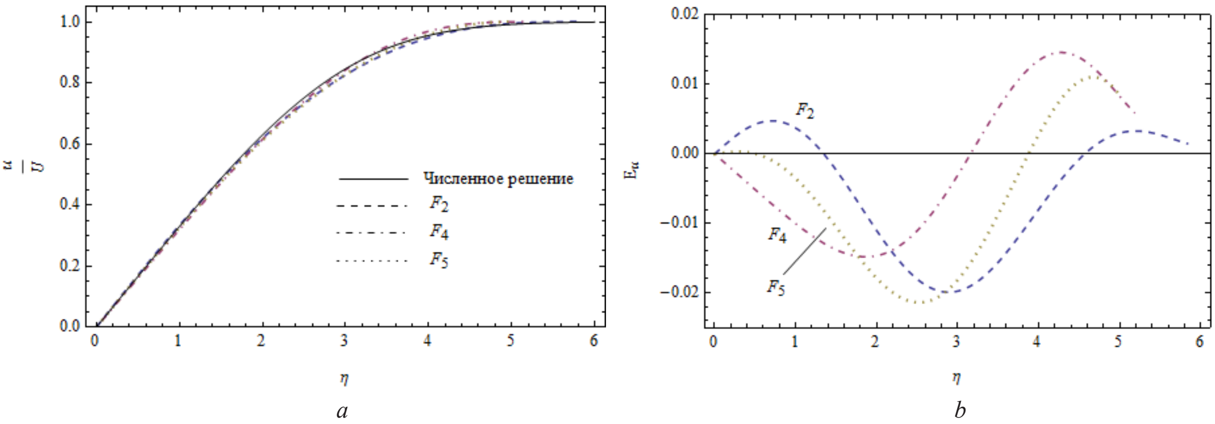


Рис. 2. Профили скорости в ПС на основе точного решения (сплошная линия), полиномов $F_2(\eta)$ (штриховая линия), $F_4(\eta)$ (штрихпунктирная линия), $F_5(\eta)$ (пунктирная линия) (*a*) и графики отклонений $E_u(\eta)$ для профилей скорости $F_2(\eta)$, $F_4(\eta)$ и $F_5(\eta)$ (*b*)

Fig. 2. Velocity profiles in the BL on the basis of the exact solution (full line) and the polynomials $F_2(\eta)$ (dashed line), $F_4(\eta)$ (dash-dotted line), and $F_5(\eta)$ (dotted line) (*a*) and graphs of the deviation $E_u(\eta)$ for the velocity profiles $F_2(\eta)$, $F_4(\eta)$ and $F_5(\eta)$ (*b*)

Отметим, что несмотря на несколько более высокое среднеквадратичное отклонение $L_2 = 0{,}0122$ по сравнению с профилем Польгаузена $F_2(\eta)$ ($L_2 = 0{,}0108$), новый профиль (3.5) имеет существенно более точные параметры $\tau_w = 0{,}3338$ (0,51 %), $C_f = 0{,}6675$ (0,51 %) и $H = 2{,}619$ (1,04 %) (табл. 3).

4. Новое решение для ПС на основе полиномов Польгаузена. Анализ решений Польгаузена на основе полиномов $F_1(\zeta)$ и $F_2(\zeta)$ показывает, что в окрестности точки $\zeta = 0$ имеет место практически «зеркальное» отклонение кривых $F_1(\eta)$ и $F_2(\eta)$ относительно линии, которая отвечает точному профилю скорости (рис. 1, *b*). Это позволяет подойти к рассматриваемой проблеме с позиции нахождения полусуммы $F_1(\zeta)$ и $F_2(\zeta)$ т. е.

$$F_6(\zeta) = \frac{F_1(\zeta) + F_2(\zeta)}{2} \quad \to \quad \begin{Bmatrix} F_6(0) = 0 \\ F_0''(0) = 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} F_6(1) = 1 \\ F_0'(1) = 0 \end{Bmatrix} \quad \leftarrow \quad F_1(\zeta). \tag{4.1}$$

Вполне очевидно, что данный полином $F_6(\zeta)$ автоматически удовлетворяет граничным условиям, которым удовлетворяет полином Польгаузена $F_1(\zeta)$. Подстановка $F_1(\zeta)$ и $F_2(\zeta)$ из (3.1) и (3.2) в (4.1) дает новую функцию

$$F_6(\zeta) = \frac{7}{4}\zeta - \frac{5}{4}\zeta^3 + \frac{1}{2}\zeta^4.$$

Рассчитав на основе (2.8) параметр $\eta_1 = 5{,}1836$ (табл. 2), мы приходим к профилю

$$\tilde{u} = F_6(\eta) = 0{,}3376\eta - 0{,}00897\eta^3 + 0{,}00069\eta^4. \tag{4.2}$$

График отклонения $E_u(\eta)$ для (4.2) представлен на рис. 2, *b*. Как показывают данные расчета (табл. 3), решение (4.2) имеет гораздо лучшие аппроксимационные свойства по сравнению с решениями Польгаузена $F_1(\eta)$ и $F_2(\eta)$. Отмечаем примерно в два раза меньшую относительную ошибку для параметров τ_w и C_f (1,67 %) по сравнению с функцией $F_2(\eta)$ при почти точном определении формпараметра $H = 2{,}591$ (~0 %).

5. Новые решения для ПС на основе граничного условия $dF(0) / d\zeta = \eta_1 s$. В данном разделе наше внимание будет обращено на получение новых высокоточных решений для ПС на основе введения в рассмотрение условия $F'(0) \cong \eta_1 s$, которое эквивалентно $f''(0) \cong 0{,}332057$.

$dF^2(0)\ /\ d\zeta^2 = 0$. Среди простых трехчленных полиномиальных решений особо выделим полиномы $F_2(\zeta) = 2\zeta - 2\zeta^3 + \zeta^4$, $F_4(\zeta) = \frac{5}{3}\zeta - \frac{5}{3}\zeta^3 + \zeta^5$ и $F_5(\zeta) = \frac{5}{3}\zeta - \zeta^3 + \frac{1}{3}\zeta^4$. Сюда же мы отнесем полученный выше полином $F_6(\zeta) = \frac{7}{4}\zeta - \frac{5}{4}\zeta^3 + \frac{1}{2}\zeta^4$. Поскольку авторы работы [14] отталкивались от известных точных значений основных параметров ПС, то можно поставить вопрос: возможно ли более точная аппроксимация ПС посредством трехчленного полинома, исходя только из условия $f''(0) \simeq 0{,}332057$? Для ответа на него запишем искомое решение в виде

$$F(\eta) = a\zeta + b\zeta^3 + c\zeta^p. \tag{5.1}$$

Применив для (5.1) граничные условия $F(1) = 1$, $F'(1) = 0$ и $F''(1) = 0$, находим коэффициенты a, b и c, откуда получаем

$$F(\zeta) = \frac{3p}{2(p-1)}\zeta - \frac{p}{3(p-2)^3}\zeta^3 + \frac{3}{(p-1)(p-3)}\zeta^p. \tag{5.2}$$

Подстановка (5.2) в (2.8) дает параметр

$$\eta_1 = 2\sqrt{\frac{70(8+30p+35p^2+15p^3+2p^4)}{(p-1)(280+318p+169p^2+26p^3)}}.$$

Используя соотношение $F'(0) \cong \eta_1 s$, имеем производную относительной скорости

$$\tilde{u}'(0) = s\eta_1 = 2s\sqrt{\frac{70(8+30p+35p^2+15p^3+2p^4)}{(p-1)(280+318p+169p^2+26p^3)}}. \tag{5.3}$$

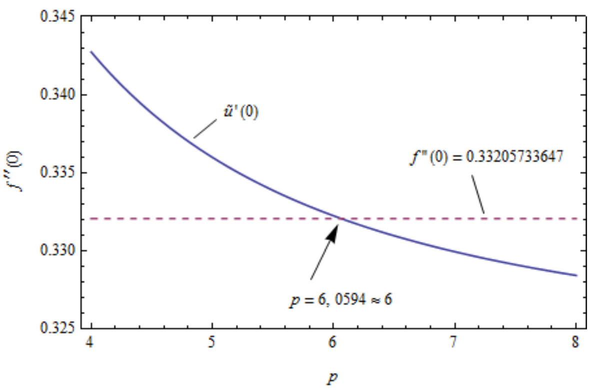
С другой стороны, из (5.2) находим

$$\tilde{u}'(0) = \frac{3p}{2(p-1)}. \tag{5.4}$$

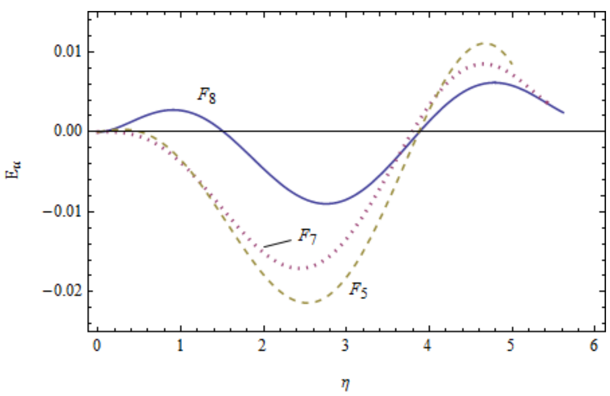
Приравняв правые части (5.3) и (5.4), мы приходим к уравнению

$$\frac{3p}{4}\sqrt{\frac{280+318p+169p^2+26p^3}{70(p-1)(8+30p+35p^2+15p^3+2p^4)}} = s = f''(0). \tag{5.5}$$

График левой части уравнения (5.5) представлен на рис. 3, *a*. Пересечение кривой $f''(0,p)$ с горизонтальной линией $f''(0) = 0{,}332057$ имеет место при значении $p = 6{,}0594$ ($p \approx 6$).



a



b

Рис. 3. График зависимости $f''(0)$ согласно формуле (5.5) (*a*) и графики отклонений $E_u(\eta)$ для профилей скорости $F_5(\eta)$, $F_7(\eta)$ и $F_8(\eta)$ (*b*)

Fig. 3. Graphs of the dependence $f''(0)$ in accordance with formula (5.5) (*a*) and graphs of the deviation $E_u(\eta)$ for the velocity profiles $F_5(\eta)$, $F_7(\eta)$ and $F_8(\eta)$ (*b*)

Подстановка в (5.2) $p \approx 6$ дает полином (табл. 1)

$$F_7(\zeta) = \frac{9}{5}\zeta - \zeta^3 + \frac{1}{5}\zeta^6. \tag{5.6}$$

Из (2.8) находим параметр $\eta_1 \approx 5{,}4180$. Применив преобразование $\zeta \to \eta / \eta_1$, из (5.6) получаем решение

$$\tilde{u}(\eta) = F_7(\eta) = 0{,}33222\eta - 0{,}006287\eta^3 + 7{,}9 \cdot 10^{-6}\eta^6.$$

Простой трехчленный полином (5.6) дает наиболее точное решение из всех известных трехчленных полиномиальных решений (рис. 3, *b*). Рассчитанные на основе (2.11) параметры ПС представлены в табл. 3. Для напряжения трения τ_w имеем ошибку всего 0,045 %, при этом отмечаем малые ошибки для H (1,16 %) и δ_1 (1,20 %).

$dF^2(0) / d\zeta^2 \neq 0$. В [15] М. Саттон предложил решение для ПС в виде функции

$$\tilde{u} = (1 + a\zeta)(1 - \zeta)^3, \tag{5.7}$$

которая удовлетворяет граничным условиям $F(0) = 0,\ F(1) = 1$ и $F'(1) = F''(1) = 0$. М. Саттон заменил граничное условие $F''(0)$ на известное интегральное соотношение энергии [2; 7]. В отличие от автора [15], мы применим лишь одно интегральное соотношение Кармана (2.3). При этом первоначально мы будем исходить из известных точных значений $f''(0)$, δ_1 и H. Для определения коэффициента a подставим (5.7) в (2.7). Отсюда находим

$$H = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{63(5 + a)}{135 + 18a - 5a^2}. \tag{5.8}$$

Для параметра η_1 из (2.8) имеем

$$\eta_1 = \sqrt{2\frac{3 - a}{\frac{1}{14}\left(\frac{3}{2} + \frac{a}{5} - \frac{a^2}{18}\right)}} = 6\sqrt{\frac{70(3 - a)}{135 + 18a - 5a^2}}. \tag{5.9}$$

Из (2.5) и (5.9) получаем

$$\delta_1 \frac{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}{x} = \eta_1 \alpha_1 = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{a}{5}\right)\sqrt{\frac{70(3 - a)}{135 + 18a - 5a^2}}. \tag{5.10}$$

Используя формулы (1.8) и (1.9), находим напряжение трения

$$\tau_w = \frac{F'(0)}{\delta} = \frac{F'(0)}{\eta_1}\frac{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}{x} = \frac{1}{6}\sqrt{\frac{(3 - a)(135 + 18a - 5a^2)}{70}}\frac{\sqrt{\mathrm{Re}_x}}{x}. \tag{5.11}$$

Для расчета коэффициента a используем формулы (2.11) для абсолютных относительных ошибок в отношении параметров H, δ_1 и τ_w. Подстановка в них правых частей (5.8), (5.10) и (5.11) дает

$$\varepsilon_H = \left|\frac{H}{H^*} - 1\right| 100\ \% = \left|\frac{63(5 + a)}{135 + 18a - 5a^2}\frac{1}{2{,}5911} - 1\right| 100\ \%, \tag{5.12}$$

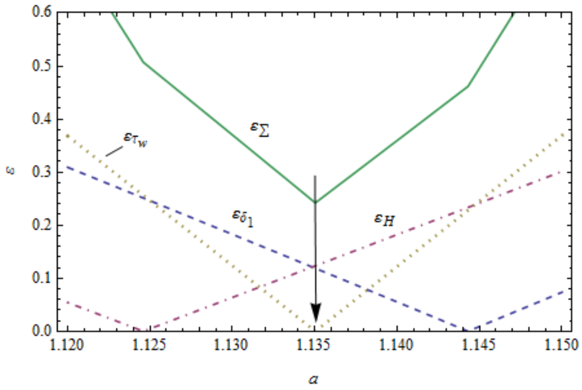
$$\varepsilon_{\tau_w} = \left|\frac{\tau_w}{\tau_w^*} - 1\right| 100\ \% = \left|\frac{1}{6}\sqrt{\frac{(3 - a)(135 + 18a - 5a^2)}{70}}\frac{1}{0{,}332057} - 1\right| 100\ \%, \tag{5.13}$$

$$\varepsilon_{\delta_1} = \left|\frac{\delta_1}{\delta_1^*} - 1\right| 100\ \% = \left|\frac{3}{2}\left(1 - \frac{a}{5}\right)\sqrt{\frac{70(3 - a)}{135 + 18a - 5a^2}}\frac{1}{1{,}72079} - 1\right| 100\ \%. \tag{5.14}$$

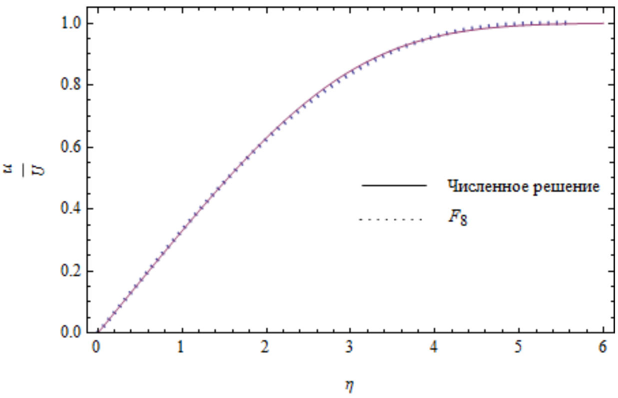
Определим относительную ошибку ε_Σ в виде суммы

$$\varepsilon_\Sigma = \varepsilon_H + \varepsilon_{\delta_1} + \varepsilon_{\tau_w}. \tag{5.15}$$

Для каждой ошибки $\varepsilon_H(a)$, $\varepsilon_{\tau_w}(a)$ и $\varepsilon_{\delta_1}(a)$, задаваемой формулами (5.12)–(5.14), а также функции $\varepsilon_\Sigma(a)$ построены графики (рис. 4, *a*) с определением минимума для ε_Σ согласно (5.15).



a



b

Рис. 4. Графики зависимостей для относительных ошибок (5.15) (*a*) и профили скорости в ПС на основе точного решения (сплошная линия) и полинома $F_8(\eta)$ (пунктирная линия) (*b*)

Fig. 4. Graphs of the relative errors (5.15) (a) and the velocity profiles in the BL on the basis of the exact solution (full line) and the polynomial $F_8(\eta)$ (dotted line) (*b*)

Обратим внимание на очень важную закономерность: функция $\varepsilon_\Sigma(a)$ образует минимум $\varepsilon_\Sigma^{\min} = 0{,}24207$ при одном и том же значении $a = 1{,}13503$, что и минимум $\varepsilon_{\tau_w}^{\min}$ функции $\varepsilon_{\tau_w}(a)$. Отсюда, для получения оптимального профиля нам достаточно исходить лишь только из параметра $\varepsilon_{\tau_w} \equiv \varepsilon_{f''(0)}$, который отвечает второй производной $f''(0)$. Используя профиль (5.7) и вычисленное значение $a = 1{,}135$, получаем

$$F_8(\zeta) = (1 + 1{,}135\zeta)(1-\zeta)^3.$$

По формуле (5.9) находим $\eta_1 \approx 5{,}6165$. Используя $\zeta \to \eta/\eta_1$, приходим к профилю скорости

$$\tilde{u} = F_8(\eta) = 1 - (1 + 0{,}202\eta)(1 - 0{,}178\eta)^3. \tag{5.16}$$

Кривая профиля скорости (5.16) почти полностью совпадает с кривой для точного решения (рис. 4, *b*). Графики отклонения $E_u(\eta)$ для «оптимального» решения $F_5(\eta)$ [14], полученного выше полинома $F_5(\eta)$ и решения $F_8(\eta)$ в виде (5.16), представлены на рис. 3, *b*. Решение в виде (5.16) существенно превосходит по свойствам решение на основе полинома $F_5(\eta)$. Из (5.16) определим производную $\tilde{u}'(0) = f''(0) = 0{,}33206$ с ошибкой 0,0008 %. Такую же ошибку имеем для напряжения трения $\varepsilon_{\tau_w} = 0{,}0008$ % (табл. 3). Также отмечаем очень малые относительные ошибки для параметров δ_1 (0,12 %) и H (0,12 %).

Заключение. Предложена схема нахождения двух достаточно точных решений на основе полиномов Польгаузена F_1 и F_2 в виде $F_6(\zeta) = \frac{1}{2}(F_1(\zeta) + F_2(\zeta))$. Решение $F_6(\zeta)$ обладает существенно лучшими аппроксимационными свойствами по сравнению с профилями $F_1(\zeta)$ и $F_2(\zeta)$. Для параметров τ_w и C_f получена примерно в два раза меньшая ошибка по сравнению с $F_2(\eta)$ при практически точном определении формпараметра $H = 2{,}591$. Получено высокоточное решение для профиля скорости в формальном представлении Саттона $F(\zeta) = (1 + a\zeta)(1-\zeta)^3$ в виде полинома $F_8(\zeta) = (1 + 1{,}135\zeta)(1-\zeta)^3$ $(\eta_1 \approx 5{,}6165)$. Кривая профиля скорости для $F_8(\zeta)$ практически полностью совпадает с численным решением. Данное решение дает вторую производную $f''(0) = 0{,}33206$, что практически полностью совпадает с точным решением. Ошибки для параметров δ_1 и H составляют всего 0,12 %.

Список использованных источников

1. Prandtl, L. Über flüssigkeits bewegungen bei sehr kleiner reibung / L. Prandtl // III Internationalen Mathematiker Kongresses. – Leiprig, 1904. – P. 484–491.

2. Stewartson, K. The Theory of Laminar Boundary Layers in Incompressible Fluids / K. Stewartson. – Oxford University Press, 1964. – 191 p.

3. Blasius, H. Grenzschichten in flüssigkeiten mit kleiner reibung / H. Blasius // J. Appl. Math. Mech. – 1908. – Vol. 56. – P. 1–37.

4. Karman, T. V. Über laminare und turbulente feibung / T. V. Karman // J. Appl. Math. Mech. – 1921. – Vol. 1, N 4.– P. 233–252. https://doi.org/10.1002/zamm.19210010401

5. Pohlhausen, K. Zur näherungs weisen integration der differential gleichung der laminaren grenzschicht / K. Pohlhausen // J. Appl. Math. Mech. – 1921. – Vol. 1, N 4. – P. 252–290. https://doi.org/10.1002/zamm.19210010402

6. White, F. M. Viscous Fluid Flow / F. M. White. – New York, 2006. – 652 p.

7. Schlichting, H. Boundary-Layer Theory / H. Schlichting, K. Gersten. – Berlin, 2017. https://doi.org/10.1007/978-3-662-52919-5

8. Shanks, D. The Blasius and Weyl constants in boundary-layer theory / D. Shanks // Phys. Rev. – 1953. – Vol. 90, N 2. – P. 377.

9. Howarth, L. On the solution of the laminar boundary layer equations / L. Howarth // Proc. London Math Soc A. – 1938. – Vol. 164, N 919. – P. 547–579. https://doi.org/10.1098/rspa.1938.0037

10. Asaithambi, A. Solution of the Falkner–Skan equation by recursive evaluation of Taylor coefficients / A. Asaithambi // J. Comput. Appl. Math. – 2005. – Vol. 176, N 1. – P. 203–214. https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.07.013

11. Robin, W. Some new approximate analytical representations of the Blasius function global / W. Robin // Journal of Mathematics. – 2015. – Vol. 2, N 2. – P. 150–155.

12. Lal, S. A. An accurate taylors series solution with high radius of convergence for the Blasius function and parameters of asymptotic variation / S. A. Lal, P. M. Neeraj // J. Applied Fluid Mechanics. – 2014. – Vol. 7, N 4. – P. 557–564. https://doi.org/10.36884/jafm.7.04.21339

13. Curle, N. The laminar boundary layer equation / N. Curle. – Clarendon Press, 1962. – 162 p.

14. Majdalani, J. On the Karman momentum-integral approach and the Pohlhausen paradox / J. Majdalani, Li-J. Xuan // Physics of Fluids. – 2020. – Vol. 32, N 12. – Art. 123605. https://doi.org/10.1063/5.0036786

15. Sutton, M. A. An approximate solution of the boundary layer equations for a flat plate / M. A. Sutton // The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Sciences. – 1937. – Vol. 23, N 158. – P. 1146–1152. https://doi.org/10.1080/14786443708561882

References

1. Prandtl L. Über flüssigkeits bewegungen bei sehr kleiner reibung. *III Internationalen Mathematiker Kongresses, Heidelberg, 8-13 August 1904*. Leipzig, 1904, pp. 484–491 (in German).

2. Stewartson K. *The Theory of Laminar Boundary Layers in Incompressible Fluids*. Oxford University Press, 1964. 191 p.

3. Blasius H. Grenzschichten in flüssigkeiten mit kleiner reibung. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1908, vol. 56, pp. 1–37 (in German).

4. Karman T. V. Über laminare und turbulente Reibung. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1921, vol. 1, no. 4, pp. 233–252 (in German). https://doi.org/10.1002/zamm.19210010401

5. Pohlhausen K. Zur näherungsweisen integration der differentialgleichung der laminaren grenzschicht. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1921, vol. 1, no. 4, pp. 252–290 (in German). https://doi.org/10.1002/zamm.19210010402

6. White F. M. *Viscous Fluid Flow*. New York, 2006. 652 p.

7. Schlichting H., Gersten K. *Boundary-Layer Theory*. Berlin, 2017. https://doi.org/10.1007/978-3-662-52919-5

8. Shanks D. The Blasius and Weyl constants in boundary-layer theory. *Physical Review*, 1953, vol. 90, no. 377.

9. Howarth L. On the solution of the laminar boundary layer equations. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A – Mathematical and Physical Sciences*, 1938, vol. 164, no. 919, pp. 547–579. https://doi.org/10.1098/rspa.1938.0037

10. Asaithambi A. Solution of the Falkner–Skan equation by recursive evaluation of Taylor coefficients. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2005, vol. 176, no. 1, pp. 203–214. https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.07.013

11. Robin W. Some new approximate analytical representations of the Blasius function global. *Journal of Mathematics*, 2015, vol. 2, no. 2, pp. 150–155.

12. Lal S. A., Neeraj P. M. An accurate Taylors series solution with high radius of convergence for the Blasius function and parameters of asymptotic variation. *Journal of Applied Fluid Mechanics*, 2014, vol. 7, no. 4, pp. 557–564. https://doi.org/10.36884/jafm.7.04.21339

13. Curle N. *The laminar boundary layer equation*. Clarendon Press, 1962. 162 p.

14. Majdalani J., Xuuan Li-J. On the Karman momentum-integral approach and the Pohlhausen paradox. *Physics of Fluids*, 2020, vol. 32, no. 12, art. 123605. https://doi.org/10.1063/5.0036786

15. Sutton M. A. An approximate solution of the boundary layer equations for a flat plate. *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Sciences*, 1937, vol. 23, no. 158, pp. 1146–1152. https://doi.org/10.1080/14786443708561882

Информация об авторе

Кот Валерий Андреевич – канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник. Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: valery.kot@hmti.ac.by.

Information about the author

Kot Valery A. – Ph. D. (Engineering), Senior researcher. A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: valery.kot@hmti.ac.by.