

ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 511.42
<https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-4-271-278>

Поступило в редакцию 31.03.2023
Received 31.03.2023

В. И. Берник, Д. В. Васильев, Н. И. Калоша, Ж. И. Пантелеева

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

**МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ
И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ КОЛИЧЕСТВА МНОГОЧЛЕНОВ
С ЗАДАНЫМИ ДИСКРИМИНАНТАМИ,
ДЕЛЯЩИМИСЯ НА БОЛЬШУЮ СТЕПЕНЬ ПРОСТОГО ЧИСЛА**

(Представлено академиком Ю. С. Хариным)

Аннотация. Дискриминанты многочленов характеризуют распределение корней полиномов на комплексной плоскости. В последние годы для целочисленных многочленов найдены точные оценки для количества многочленов заданной степени и высоты. Метод получения оценок основан на теоремах Минковского в геометрии чисел и метрической теории диофантовых приближений. Предложен новый метод, позволяющий получать оценки сверху для количества многочленов с ограниченными дискриминантами в архимедовой и неархимедовой метриках. В методе обобщены идеи Х. Давенпорта, Б. Фолькмана и В. Спринджук, позволившие им получить существенные продвижения при решении проблемы Малера.

Ключевые слова: дискриминанты целочисленных многочленов, диофантовы приближения, мера Лебега, степень и высота алгебраического числа, проблема Малера

Для цитирования. Метрическая теория диофантовых приближений и асимптотические оценки для количества многочленов с заданными дискриминантами, делящимися на большую степень простого числа / В. И. Берник [и др.] // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2023. – Т. 67, № 4. – С. 271–278. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-4-271-278>

Vasili I. Bernik, Denis V. Vasilyev, Nikolay I. Kalosha, Zhanna I. Panteleeva

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

**METRIC THEORY OF DIOPHANTINE APPROXIMATION AND ASYMPTOTIC ESTIMATES
FOR THE NUMBER OF POLYNOMIALS WITH GIVEN DISCRIMINANTS DIVISIBLE
BY A LARGE POWER OF A PRIME NUMBER**

(Communicated by Academician Yuriy S. Kharin)

Abstract. Discriminants of polynomials characterize the distribution of roots of polynomials in the complex plane. In recent years, for integer polynomials, exact lower-bound estimates have been obtained for the number of polynomials of a given degree and height. The method of obtaining these estimates is based on Minkowski's theorems in the geometry of numbers and the metric theory of Diophantine approximation. A new method is proposed and allows one to obtain upper-bound estimates for the number of polynomials with bounded discriminants in Archimedean and non-Archimedean metrics. The method generalizes the ideas of H. Davenport, B. Volkman, and V. Sprindzuk that allowed them to obtain significant advances in solving Mahler's problem.

Keywords: discriminants of integer polynomials, diophantine approximation, Lebesgue measure, degree and height of an algebraic number, Mahler's problem

For citation. Bernik V. I., Vasilyev D. V., Kalosha N. I., Panteleeva Zh. I. Metric theory of diophantine approximation and asymptotic estimates for the number of polynomials with given discriminants divisible by a large power of a prime number. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2023, vol. 67, no. 4, pp. 271–278 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-4-271-278>

Введение. Теория диофантовых приближений позволяет заменять действительные числа на близкие к ним рациональные числа, а трансцендентные числа на близкие к ним алгебраические числа. В 1932 г. К. Малер [1] ввел классификацию действительных и комплексных чисел на основе разрешимости неравенства

$$|P(x)| < H^{-w(x)} \quad (1)$$

в полиномах $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами степени $\deg P = n$ и высоты $H = H(P) = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$. От величины $w(x)$ зависит, в какой класс попадет действительное число x . Сам Малер доказал, что при $w > 4n$ мера Лебега μ_1 множества $\mathcal{L}_n(w)$, для которых неравенство (1) имеет бесконечное число решений, равна нулю. Его гипотеза состояла в том, что

$$\mu_1 \mathcal{L}_n(w) = 0, \quad w > n,$$

для действительных x и

$$\mu_2 \mathcal{L}_n(w) = 0, \quad w > \frac{n-1}{2},$$

для комплексных z , где μ_2 – мера Лебега на комплексной плоскости $\mathbb{C}^2$.

Гипотезу Малера доказал В. Г. Спринджук. Он опубликовал свое доказательство в [1], где обобщил проблему Малера на поле p -адических чисел и поле формальных степенных рядов, а также сформулировал несколько гипотез для невырожденных кривых [2] и совместных диофантовых приближений [3]. Для любого n эта задача решена в 1998 г. Д. Клейнбоком и Г. Маргулисом [4]. Вторую гипотезу доказал первый из авторов данной статьи [5]. В обзорной статье 1980 г. В. Спринджук [6] поставил гипотезу о разрешимости системы неравенств

$$|P(x)| < H^{-w_1}, \quad |P(z)| < H^{-w_2}, \quad |P(\omega)| < H^{-w_3}, \quad w_i \geq 0, \quad w_1 + 2w_2 + w_3 > n - 2 \quad (2)$$

для (x, z, ω) из пространства $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ действительных, комплексных и p -адических чисел. Эта задача решена в [5]. Значительный вклад в теорию диофантовых приближений внес также академик Й. П. Кубилюс [7].

Подобные неравенства можно рассматривать с более общими правыми частями, как в теореме Хинчина [8]. Такая задача была решена отдельно для действительных [9; 10], комплексных [11] и p -адических чисел [12].

Основу всех доказательств составляют обобщения леммы Гельфонда о разрешимости неравенств (2) для трансцендентных чисел x, z, ω . В [13] при дополнительных условиях на поведение полиномов $P(x)$ на интервалах $I_i \subset \mathbb{R}$ была доказана следующая лемма.

Л е м м а 1 [9]. Пусть полиномы $P_1(t)$ и $P_2(t)$ степени n и высоты $H(P_i) \leq Q$, $i = 1, 2$, на отрезке I , $\mu_1 I = Q^{-\eta}$, $\eta \geq 0$, удовлетворяют неравенству

$$\max_{t \in I} (|P_1(t)|, |P_2(t)|) < Q^{-\tau}.$$

Тогда при любом $\delta > 0$ и $Q > Q_0(\delta)$ выполняется неравенство

$$\tau + 1 + 2 \max(\tau + 1 - \eta, 0) < 2n + \delta. \quad (3)$$

Для системы неравенств лемма 1 была обобщена в [14].

В данной работе доказывается более общее утверждение, чем лемма 1, и более точное, чем [14]. Кроме того, мы показываем, как это утверждение может быть применено для получения оценок сверху количества полиномов с заданными дискриминантами.

Решаемые задачи будут рассматриваться в классе полиномов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(t) \in \mathbb{Z}[t]: \deg P \leq n, H(P) \leq Q\}. \quad (4)$$

Во всех классических проблемах метрической теории диофантовых приближений, таких как проблема Малера, проблема Бейкер–Шмидта, проблема Малера–Спринджук, можно перейти к подклассам $\mathcal{P}_n(Q)$. Далее $c_1 = c_1(n)$, $c_2, \dots$ – величины, зависящие от n и не зависящие от H и Q . Символ $\ll$ – символ Виноградова: запись $A \ll B$ означает что $A < dB$, где d не зависит от A и B .

Введем подклассы полиномов

$$\mathcal{P}_n(Q, \bar{v}, H) = \{P(t) \in \mathcal{P}_n(Q), \bar{v} = (v_1, v_2)\},$$

обладающие дополнительными свойствами.

1. Класс $\mathcal{P}_n(Q, \bar{v}, H)$ состоит из неприводимых полиномов $P(t)$, $\frac{Q}{2} \leq H(P) \leq Q$.

2. Старшие коэффициенты a_n полиномов $P(t)$ удовлетворяют условию

$$|a_n| \gg H, \quad |a_n|_p \gg 1,$$

где $|a|_p$ – p -адическая норма a . Определяется она просто: для простого числа p находим представление a в виде $a = p^l a_1$ с максимальным натуральным числом l , т. е. p^l делит a , но p^{l+1} не делит a . Тогда $a = p^l a_1$, $(a_1, p) = 1$ и определяем $|a|_p = p^{-l}$.

Будем обозначать меру Хаара в $\mathbb{Q}_p$ через μ_3 .

В силу леммы Спринджук [1] это приводит к неравенствам $|\alpha_j| \ll 1$, $1 \leq j \leq n$, $|\gamma_i|_p \ll 1$ для комплексных корней α_j полинома $P(t)$ и p -адических корней $P(\omega)$ в алгебраическом замыкании поля $\mathbb{Q}_p$.

3. Корни α_i , γ_j упорядочены следующим образом:

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \leq |\alpha_1 - \alpha_3| \leq \dots \leq |\alpha_1 - \alpha_n|,$$

$$|\gamma_1 - \gamma_2|_p \leq |\gamma_1 - \gamma_3|_p \leq \dots \leq |\gamma_1 - \gamma_n|_p.$$

Проведем классификацию многочленов и их корней как это сделано в [1; 2]. Возьмем достаточно малое число ε_1 и $T = \left\lceil \varepsilon_1^{-1} \right\rceil + 1$. Положим

$$|\alpha_1 - \alpha_j| = H^{-\rho_j}, \quad j = 2, \dots, n, \quad \frac{l_j - 1}{T} \leq \rho_j < \frac{l_j}{T},$$

$$|\gamma_1 - \gamma_i|_p = H^{-\theta_i}, \quad i = 2, \dots, n, \quad \frac{s_i - 1}{T} \leq \theta_i < \frac{s_i}{T},$$

$$p_j = T^{-1} \sum_{i=j+1}^n l_i, \quad q_j = T^{-1} \sum_{i=j+1}^n s_i.$$

Нетрудно доказать, что количество значений векторов $(\bar{l}, \bar{s}) = (l_2, \dots, l_n, s_2, \dots, s_n)$ конечно, зависит только от n и не зависит от H и Q . Поэтому все подклассы $\mathcal{P}_n(Q, \bar{v}, H)$ можно перебрать по очереди. Далее считаем, что $P(t) \in \mathcal{P}_n(Q, \bar{v}, H)$.

Т е о р е м а 1. Пусть $P_1(t)$, $P_2(t)$ не имеют общих корней ни в $\mathbb{C}$, ни в $\mathbb{Q}_p$ и пусть в прямоугольнике $I \times K$, $\mu_1 I = Q^{-\eta_1}$, $\mu_3 K = Q^{-\eta_2}$, $\eta_i \geq 0$, выполняются неравенства

$$\max_{x \in I} (|P_1(x)|, |P_2(x)|) < Q^{-\tau_1}, \quad \tau_1 \geq 0,$$

$$\max_{\omega \in K} (|P_1(\omega)|_p, |P_2(\omega)|_p) < Q^{-\tau_2}, \quad \tau_2 \geq 0,$$

$$\tau_1 + 1 - p_1 > l_2 T^{-1}, \quad \tau_2 - q_1 > s_2 T^{-1}.$$

Тогда при любом $\delta > 0$ и $Q > Q_0(\delta)$ справедливо неравенство

$$\tau_1 + 1 + \tau_2 + 2 \sum_{k_1=1}^n \max(\tau_1 + 1 - k_1 \eta_1, 0) + 2 \sum_{k_2=1}^n \max(\tau_2 - k_2 \eta_2, 0) < 2n + \delta.$$

Доказательство. Для доказательства нам потребуются следующие леммы.

Лемма 2 [2]. Если α_1 – ближайший корень к x многочлена $P(x)$, то

$$|x - \alpha_1| < \begin{cases} n |P(x)| |P'(x)|^{-1}, \\ 2^n |P(x)| |P'(\alpha_1)|^{-1}, \\ 2^n (|P(x)| |\alpha_1 - \alpha_2| |P'(x)|^{-1})^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Лемма 3 [2]. Если γ_1 – ближайший к ω корень многочлена $P(\omega)$, то

$$|\omega - \gamma_1|_p < \begin{cases} |P(\omega)|_p |P'(\omega)|_p^{-1}, \\ |P(\omega)|_p |P'(\gamma_1)|_p^{-1}, \\ (|P(\omega)|_p |P'(\gamma_1)|_p^{-1} |\gamma_1 - \gamma_2|_p)^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Пусть α_1 – ближайший к x корень, а γ_1 – ближайший к ω корень. Тогда используя первые неравенства лемм 2 и 3 получим

$$Q^{-\eta_1} \leq |x - \alpha_1| \ll Q^{-\tau_1 - 1 + p_1 + c_1 \varepsilon_1}, \quad Q^{-\eta_2} \leq |\omega - \gamma_1|_p \ll Q^{-\tau_1 + q_1 + c_2 \varepsilon_1}.$$

Из третьих неравенств лемм 2 и 3 имеем

$$Q^{-\eta_1 j} \leq |x - \alpha_1|^j \ll Q^{-\tau_1 - 1 + p_j + c_3 \varepsilon_1}, \quad Q^{-\eta_2 j} \leq |\omega - \gamma_1|_p^j \ll Q^{-\tau_2 + q_j + c_4 \varepsilon_1}.$$

Рассмотрим произведение результатов многочленов $P_1(t)$ и $P(t)$

$$\begin{aligned} 1 &\leq |R(P_1, P_2)| |R(P_1, P_2)|_p = \\ &= |a_n(P_1)|^{\deg P_2} |a_n(P_2)|^{\deg P_1} \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |\alpha_i - \beta_j| |a_n(P_1)|_p^{\deg P_2} |a_n(P_2)|_p^{\deg P_1} \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |\gamma_i - \xi_j|_p \ll \\ &\ll Q^{2n} \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |\alpha_i - \beta_j| \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} |\gamma_i - \xi_j|_p. \end{aligned}$$

Оценим модули разностей

$$|\alpha_1 - \beta_1| \leq |x - \alpha_1| + |x - \beta_1| \ll Q^{-\tau_1 - 1 + p_1 + c_5 \varepsilon_1}, \quad |\gamma_1 - \xi_1|_p \leq |x - \gamma_1|_p + |x - \xi_1|_p \ll Q^{-\tau_2 + q_1 + c_6 \varepsilon_1},$$

$$\prod_{j=2}^n |\alpha_1 - \beta_j| \leq \prod_{j=2}^n (|\alpha_1 - \beta_1| + |\beta_1 - \beta_j|) \ll Q^{-p_1 + c_7 \varepsilon_1},$$

$$\prod_{j=2}^n |\gamma_1 - \xi_j|_p \leq \prod_{j=2}^n (|\gamma_1 - \xi_1|_p + |\xi_1 - \xi_j|_p) \ll Q^{-q_1 + c_8 \varepsilon_1}.$$

Аналогично получим

$$\prod_{j=2}^n |\beta_1 - \alpha_j| \ll Q^{p_1 + c_9 \varepsilon_1}, \quad \prod_{j=2}^n |\xi_1 - \gamma_j|_p \ll Q^{-q_1 + c_{10} \varepsilon_1},$$

$$\prod_{j=2}^n |\alpha_j - \beta_j| \leq \prod_{j=2}^n (|\alpha_1 - \alpha_j| + |\alpha_1 - \beta_1| + |\beta_1 - \beta_j|) \ll Q^{-p_1 + c_{11}\varepsilon_1},$$

$$\prod_{j=2}^n |\gamma_j - \xi_j|_p \leq \prod_{j=2}^n (|\gamma_1 - \gamma_j|_p + |\gamma_1 - \xi_1|_p + |\xi_1 - \xi_j|_p) \ll Q^{-q_1 + c_{12}\varepsilon_1}.$$

Для оставшихся произведений имеем оценки:

$$\prod_{\substack{i,j>2 \\ i \neq j}}^n |\alpha_i - \beta_j| \leq \prod_{\substack{i,j>2 \\ i \neq j}}^n (|\alpha_1 - \alpha_i| + |\alpha_1 - \beta_1| + |\beta_1 - \beta_j|) \ll Q^{-2 \sum_{i=2}^{n-1} p_i + c_{13}\varepsilon_1},$$

$$\prod_{\substack{i,j>2 \\ i \neq j}}^n |\gamma_i - \xi_j|_p \leq \prod_{\substack{i,j>2 \\ i \neq j}}^n (|\gamma_1 - \gamma_i|_p + |\gamma_1 - \xi_1|_p + |\xi_1 - \xi_j|_p) \ll Q^{-2 \sum_{i=2}^{n-1} q_i + c_{14}\varepsilon_1}.$$

Тогда выполняется следующая оценка результата $R(P_1, P_2)$ многочленов $P_1(t)$ и $P_2(t)$:

$$1 \leq |R(P_1, P_2)| \ll Q^{2n - \tau_1 - 1 + p_1 - \tau_2 + q_1 - p_1 - q_1 - p_1 - q_1 - p_1 - q_1 - 2 \sum_{i=2}^{n-1} p_i - 2 \sum_{i=2}^{n-1} q_i + c_{15}\varepsilon_1} \ll$$

$$\ll Q^{2n - \tau_1 - 1 - \tau_2 - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \max(p_i, 0) - 2 \sum_{i=1}^{n-1} \max(q_i, 0) + c_{15}\varepsilon_1}.$$
(5)

Из (5) получим

$$\tau_1 + 1 + \tau_2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \max(p_i, 0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \max(q_i, 0) < 2n + \delta_1.$$

Так как

$$p_j > \tau_1 + 1 - \eta_1 j - c_{16}\varepsilon_1, \quad q_j > \tau_2 - \eta_2 j - c_{17}\varepsilon_1,$$

$$\text{то } \tau_1 + 1 + \tau_2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \max(\tau_1 + 1 - \eta_1 k_1, 0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \max(\tau_2 - \eta_2 k_2, 0) < 2n + \delta.$$

Теорема 1 доказана.

Покажем, как можно применить теорему 1 для получения оценок сверху для количества целочисленных многочленов из класса полиномов $\mathcal{P}_n(Q)$ степени $\deg P \leq n$ и высоты H . При этом дискриминанты полиномов не превосходят заданной границы и делятся на большую степень некоторого простого числа p . Для полинома $P(t) \in \mathcal{P}_n(Q)$ пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – корни $P(t)$ из поля комплексных чисел $\mathbb{C}$ – алгебраического замыкания $\mathbb{R}$, и $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ – корни $P(\omega)$ из поля p -адических чисел $\mathbb{Q}_p$ или его алгебраического замыкания $\overline{\mathbb{Q}_p}$. Для целого числа a пусть $|a|$ – абсолютная величина (архимедова норма a). Согласно известной теореме Островского [2; 15] указанные нормирования $|a|$ и $|a|_p$ исчерпывают все нормы поля рациональных чисел. Очевидно, что произведение по всем этим двум нормам

$$\prod_v a_v = |a_1| \geq 1.$$

Дискриминантом полинома $P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0 \in \mathcal{P}_n(Q)$ называется число

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Для $\bar{v} = (v_1, v_2)$, $v_i \geq 0$, $i = 1, 2$, и натурального числа Q обозначим через

$$\mathcal{P}_n(Q, \bar{v}) = \{P(t) \in \mathcal{P}_n(Q), |D(P)| \leq Q^{2n-2-2v_1}, |D(P)|_p \leq Q^{-2v_2}\}.$$

Т е о р е м а 2. При $0 \leq v_1 + v_2 \leq 2$ и любом $\varepsilon_2 > 0$ справедливо асимптотическое неравенство

$$\#\mathcal{P}_n(Q, \bar{v}) \ll Q^{n+1-(v_1+v_2)+\varepsilon_2}, \quad 0 \leq v_1 + v_2 \leq 2. \quad (6)$$

Доказательство теоремы 2.

В случае $\bar{v} = (v_1, 0)$ оценки снизу и сверху для $\#\mathcal{P}_n(Q, \bar{v})$, использующиеся в диофантовых приближениях, получены в [13; 15].

Для значений $P^{(j)}(\alpha_1)$, $P^{(j)}(\gamma_1)$, $1 \leq j \leq n$, и расстояний между корнями полиномов в $\mathbb{R}$ и $\mathbb{Q}_p$ введем ε -сети [2].

Предположим, что выполняется противоположное (6) неравенство. Тогда существует прямоугольник

$$\Pi = J_1 \times K_1, \quad J_1 \subset \mathbb{R}, \quad K_1 \subset \mathbb{Q}_p, \quad \mu_1 J_1 = Q^{-l_2 T^{-1}}, \quad \mu_2 K_1 = Q^{-s_2 T^{-1}}, \quad \mu \Pi = Q^{-l_2 T^{-1} - s_2 T^{-1}},$$

в котором количество многочленов $\#\mathcal{P}_n(Q, \bar{v}, \Pi)$ удовлетворяет неравенству

$$\#\mathcal{P}_n(Q, \bar{v}, \Pi) \ll Q^{n+1-(v_1+v_2-l_2 T^{-1}-s_2 T^{-1})+\varepsilon_2} = K_1, \quad K = [K_1].$$

Разложим каждый многочлен $P(t) \in \mathcal{P}_n(Q, \bar{v}, \Pi)$ в точках α_1 и γ_1 в ряд Тейлора на $J_1 \times K_1$.

$$P(x) = P(\alpha_1) + P'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \frac{1}{2}P''(\alpha_1)(x - \alpha_1)^2 + \dots, \quad (7)$$

$$P(\omega) = P(\gamma_1) + P'(\gamma_1)(\omega - \gamma_1) + \frac{1}{2}P''(\gamma_1)(\omega - \gamma_1)^2 + \dots \quad (8)$$

Поскольку

$$|x - \alpha_1| \ll H^{-l_2 T^{-1}}, \quad |\omega - \gamma_1|_p \ll H^{-s_2 T^{-1}}, \quad (9)$$

$$|P^{(j)}(\alpha_1)(x - \alpha_1)^j| \ll H^{1-pj-jl_2 T^{-1}+(n-1)\varepsilon_1}, \quad |P^{(j)}(\gamma_1)(\omega - \gamma_1)^j|_p \ll H^{-qj-js_2 T^{-1}+(n-1)\varepsilon_1},$$

то из (7)–(9) следует

$$|P(x)| \ll Q^{1-p_1-l_2 T^{-1}+(n-1)\varepsilon_1}, \quad |P(\omega)|_p \ll Q^{-q_1-s_2 T^{-1}+(n-1)\varepsilon_1}.$$

Положим

$$m = v_1 + v_2 + l_2 T^{-1} + s_2 T^{-1} - 1 = [m] + \{m\},$$

где $[a]$ и $\{a\}$ – целая и дробная части действительного числа a , и будем считать, что $\{m\} \leq \varepsilon_2$. Применим принцип ящиков Дирихле к полиномам

$$R_{j+1}(x) = P_{j+1}(x) - P_1(x), \quad R_{j+1}(\omega) = P_{j+1}(\omega) - P_1(\omega). \quad (10)$$

Тогда найдутся не менее $0,5Q^{\varepsilon_2}$ полиномов, у которых совпадают коэффициенты при $t^n, t^{n-1}, \dots, t^{n-[m]+1}$. Из (9) и (10) следует, что верна система неравенств

$$|R_j(t)| \ll Q^{1-p_1-l_2 T^{-1}-q_1-s_2 T^{-1}+(n-1)\varepsilon_1}, \quad \deg R_j(t) \leq v_1 + v_2 + l_2 T^{-1} + s_2 T^{-1} - 1 + (n-1)\varepsilon_2 \geq 2.$$

Если среди $0,5Q^e$ многочленов $R_j(t)$ окажется хотя бы два без общих корней, то применим к ним теорему 1 и получим противоречие. Если таких многочленов нет, то полиномы $R_j(t)$ будут приводимы и раскладываются на линейные множители, так как по (6) они имеют степень не более 2. Для линейных множителей теорема 2 устанавливается без труда. Если $\varepsilon_2 < \{m\} < 1$, то несколько увеличим $\mu_1 I$ и $\mu_3 K$, чтобы для новых $\Pi' = I_1 \times K$ получить $\varepsilon_2(\Pi') \leq \varepsilon_2$.

Доказательство теоремы 2 приведено в схематическом виде.

Список использованных источников

1. Спринджук, В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск, 1967. – 181 с.
2. Metric Diophantine approximation: the Khintchine–Groshev theorem for nondegenerate manifolds / V. V. Beresnevich [et al.] // *Mosc. Math. J.* – 2002. – Vol. 2, N 2. – P. 203–225. <https://doi.org/10.17323/1609-4514-2002-2-2-203-225>
3. Бударина, Н. В. Метрическая теория совместных диофантовых приближений в $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l \times \mathbb{Q}_p^m$ / Н. В. Бударина // Чебышевский сб. – 2011. – Т. 12, № 1. – С. 17–50.
4. Kleinbock, D. Y. Flows on Homogeneous Spaces and Diophantine Approximation on Manifolds / D. Y. Kleinbock, G. A. Margulis // *Annals of Mathematics*. – 1998. – Vol. 148, N 1. – P. 339–360. <https://doi.org/10.2307/120997>
5. Берник, В. И. Метрическая теорема о совместном приближении нуля значениями целочисленных многочленов / В. И. Берник // Изв. АН СССР, сер. математ. – 1980. – Т. 44, № 1. – С. 24–45.
6. Спринджук, В. Г. Достижения и проблемы теории диофантовых приближений / В. Г. Спринджук // Успехи мат. наук. – 1980. – Т. 35, № 4. – С. 3–68.
7. Вклад Йонаса Кубилиуса в метрическую теорию диофантовых приближений зависимых переменных / В. В. Бересневич [и др.] // Журн. БГУ. Математика. Информатика. – 2021. – № 3. – С. 34–50.
8. Khintchine, A. Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen / A. Khintchine // *Mathematische Annalen*. – 1924. – Vol. 92, N 1–2. – P. 115–125. <https://doi.org/10.1007/bf01448437>
9. Bernik, V. I. The exact order of approximating zero by values of integral polynomials / V. I. Bernik // *Acta Arith.* – 1989. – Vol. 53, N 1. – P. 17–28.
10. Beresnevich, V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. Beresnevich // *Acta Arith.* – 1999. – Vol. 90, N 2. – P. 97–112. <https://doi.org/10.4064/aa-90-2-97-112>
11. Берник, В. И. Теорема Хинчиновского типа для целочисленных полиномов от комплексной переменной / В. И. Берник, Д. В. Васильев // Тр. Ин-та математики. – 1999. – № 3. – С. 10–20.
12. Beresnevich, V. V. On approximation of p -adic numbers by p -adic algebraic numbers / V. V. Beresnevich, V. I. Bernik, E. I. Kovalevskaya // *J. Number Theory*. – 2005. – Vol. 111, N 1. – P. 33–56. <https://doi.org/10.1016/j.jnt.2004.09.007>
13. Берник, В. И. Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник // *Acta Arith.* – 1983. – Vol. 42, N 3. – P. 219–253.
14. Берник, В. И. Приближение нуля значениями целочисленных полиномов в пространстве $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$ / В. И. Берник, Н. И. Калоша // Вест. Нац. акад. наук Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2004. – № 1. – С. 121–123.
15. Bernik, V. I. Metric Diophantine approximation on manifolds / V. I. Bernik, M. M. Dodson // *Cambridge Tracts in Mathematics*. – 1999. – N 137. – 172 p. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511565991>

References

1. Sprindzhuk V. G. *Mahler's problem in metric number theory*. Minsk, 1967. 181 p. (in Russian).
2. Beresnevich V. V., Bernik V. I., Kleinbock D. Y., Margulis G. A. Metric Diophantine approximation: the Khintchine–Groshev theorem for nondegenerate manifolds. *Moscow Mathematical Journal*, 2002, vol. 2, no. 2, pp. 203–225. <https://doi.org/10.17323/1609-4514-2002-2-2-203-225>
3. Budarina N. V. Metric theory of joint diophantine approximations in $\mathbb{R}^k \times \mathbb{C}^l \times \mathbb{Q}_p^m$. *Chebyshevskii sbornik = Chebyshev collection*, 2011, vol. 12, no. 1, pp. 17–50 (in Russian).
4. Kleinbock D. Y., Margulis G. A. Flows on Homogeneous Spaces and Diophantine Approximation on Manifolds. *Annals of Mathematics*, 1998, vol. 148, no. 1, pp. 339–360. <https://doi.org/10.2307/120997>
5. Bernik V. I. A Metric theorem on the simultaneous approximation of a zero by the values of integral polynomials. *Mathematics of the USSR – Izvestiya*, 1981, vol. 16, no. 1, pp. 21–40. <https://doi.org/10.1070/im1981v016n01abeh001292>
6. Sprindzhuk V. G. Achievements and problems in diophantine approximation theory. *Russian Mathematical Surveys*, 1980, vol. 35, no. 4, pp. 1–80. <https://doi.org/10.1070/rm1980v035n04abeh001861>
7. Beresnevich V. V., Bernik V. I., Götze F., Zaslavskiy E. V., Kalosha N. I. Contribution of Jonas Kubilius to the metric theory of Diophantine approximation of dependent variables. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2021, no. 3, pp. 34–50 (in Russian).
8. Khintchine A. Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen. *Mathematische Annalen*, 1924, vol. 92, no. 1–2, pp. 115–125 (in German). <https://doi.org/10.1007/bf01448437>
9. Bernik V. I. The exact order of approximating zero by values of integral polynomials. *Acta Arithmetica*, 1989, vol. 53, no. 1, pp. 17–28.

10. Beresnevich V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers. *Acta Arithmetica*, 1999, vol. 90, no. 2, pp. 97–112. <https://doi.org/10.4064/aa-90-2-97-112>
11. Bernik V. I., Vasiliev D. V. A Hinchin type theorem for integer polynomials in a complex variable. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 1999, no. 3, pp. 10–20 (in Russian).
12. Beresnevich V. V., Bernik V. I., Kovalevskaya E. I. On approximation of p -adic numbers by p -adic algebraic numbers. *Journal of Number Theory*, 2005, vol. 111, no. 1, pp. 33–56. <https://doi.org/10.1016/j.jnt.2004.09.007>
13. Bernik V. I. Application of Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximation. *Acta Arithmetica*, 1983, vol. 42, no. 3, pp. 219–253 (in Russian).
14. Bernik V. I., Kalosha N. I. Approximations of zero by the values of integer polynomials in space $\mathbb{R} \times \mathbb{C} \times \mathbb{Q}_p$. *Vestsi Natsyional'nei akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2004, no. 1, pp. 121–123 (in Russian).
15. Bernik V. I., Dodson M. M. *Metric Diophantine Approximation on Manifolds*. Cambridge Tracts in Mathematics, 1999, no. 137. 172 p. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511565991>

Информация об авторах

Берник Василий Иванович – д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: bernik.vasili@mail.ru.

Васильев Денис Владимирович – канд. физ.-мат. наук. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vasilyev@im.bas-net.by.

Калоса Николай Иванович – канд. физ.-мат. наук. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kalosha@im.bas-net.by.

Пантелеева Жанна Ивановна – аспирант. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: janna-85@list.ru.

Information about the authors

Bernik Vasily I. – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: bernik.vasili@mail.ru.

Vasilyev Denis V. – Ph. D. (Physics and Mathematics). Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vasilyev@im.bas-net.by.

Kalosha Nikolay I. – Ph. D. (Physics and Mathematics). Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kalosha@im.bas-net.by.

Panteleeva Zhanna I. – Postgraduate Student. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: janna-85@list.ru.