ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 519.63
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-5-366-372

Поступило в редакцию 05.06.2023
Received 05.06.2023

Д. А. Щадинский

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ РАЗРУШЕНИЯ РЕШЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ ДИФФУЗИИ И В ИХ АППРОКСИМАЦИЯХ

(Представлено членом-корреспондентом П. П. Матусом)

Аннотация. Найдены достаточные условия разрушения решения и верхняя оценка времени разрушения решения для задач Неймана и Дирихле для уравнения реакции диффузии с градиентной нелинейностью, которые получены на основе теорем сравнения, неравенства Йенсена и законов сохранения. Используя аналогичную технику доказательства для разностного случая, была построена разностная схема, аппроксимирующая ранее упомянутую задачу Неймана, для которой получены достаточные условия разрушения решения и оценка времени разрушения решения, согласованные с соответствующими условиями и оценками для дифференциального случая.

Ключевые слова: теоремы сравнения, разрушение решения, дискретные аналоги теорем сравнения, уравнения реакции диффузии

Для цитирования. Щадинский, Д. А. Теоремы сравнения в задачах разрушения решения для уравнения реакции диффузии и в их аппроксимациях / Д. А. Щадинский // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2023. – Т. 67, № 5. – С. 366–372. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-5-366-372

Denis A. Schadinskii

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

COMPARISON THEOREM IN BLOW-UP PROBLEMS FOR REACTION DIFFUSION EQUATIONS AND FOR THEIR APPROXIMATIONS

(Communicated by Corresponding Member Piotr P. Matus)

Abstract. In this paper, blow-up sufficient conditions and upper bound of blow-up time for solution of Neumann and Dirichlet problems for reaction diffusion equations with non-linear gradient have been obtained. These equations have been found from the comparison of theorems, Jensen's inequality and conservations laws. By using a similar proof approach for the finite-difference case, the finite-difference scheme was constructed, approximating the above-mentioned Neumann problem, for which sufficient conditions and upper bound of blow-up time, consistent with appropriate conditions and bound for the appropriate differential problem, have been obtained.

Keywords: comparison theorems, blow-up, discrete analogue of comparison theorems, reaction diffusion equations

For citation. Schadinskii D. A. Comparison theorem in blow-up problems for reaction diffusion equations and for their approximations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2023, vol. 67, no. 5, pp. 366–372 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-5-366-372

Введение. Теоремы сравнения играют важную роль при изучении поведения решения задач с явлением разрушения решения как в дифференциальных задачах, так и в разностных схемах. Неравенство Йенсена и теоремы сравнения широко применяются для получения достаточных условий возникновения разрушения решения и верхней оценки времени разрушения в задачах параболического типа [1; 2] и их аппроксимаций [3; 4]. В сообщении рассматриваются задачи Дирихле и Неймана для нелинейного уравнения реакции диффузии, которые имеют приложения в физике, химии и биологии для случая разрушения решения [5; 6] и были подробно исследованы в течение последних нескольких лет в контексте явления разрушения решения [7–9]. В [4] были сформулированы некоторые дискретные аналоги теорем сравнения и основанные на них и теореме Йенсена достаточные условия разрушения решения.

В пункте 1 рассматриваются задачи Неймана и Дирихле для нелинейного уравнения реакции диффузии и приведены условия возникновения разрушения решения и верхняя оценка времени разрушения, полученные на основе неравенстве Йенсена, теорем сравнения и законов сохранения. В пункте 2 доказываются условия возникновения разрушения решения и верхняя оценка времени разрушения для неявной разностной схемы, которая аппроксимирует задачу Неймана для нелинейного уравнения реакции диффузии, а также формулируется один из дискретных аналогов теорем сравнения.

1. Условия разрушения решения задач для уравнения реакции диффузии. В этом пункте рассматривается следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial g(u)}{\partial t}=\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(p\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right|^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+k(t)f(u),\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T),\tag{1}$$

где $\overline{\Omega}$ – ограниченное связное множество в $\Re^m$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Функция $g\in C(\Re^+)$ и $g'(s)>0$ для всех $s>0$, функция p – положительная в $\Re^+$ и $p\in C(\Re^+)$, функция k – положительная в $\Re^+$ и $k\in C(\Re^+)$, функция f – неотрицательная и $f\in C(\Re^+)$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{dw}{dt}=k(t)\varphi(w),\quad t\in(0,T'),\tag{2}$$

$$w(0)=w_0,\tag{3}$$

где $\varphi(w)$ – непрерывная положительная функция на интервале $[w_0,\infty)$; $w(t)\in C[0,T')\cap C^1(0,T')$ и $k(t)$ – непрерывная положительная функция на интервале $\Re^+$.

У т в е р ж д е н и е 1. *Если существует $t_b<\infty$, которое удовлетворяет равенству*

$$\int_{w_0}^{\infty}\frac{dw}{\varphi(w)}=\int_0^{t_b}k(\xi)d\xi,$$

где $k(t)$ и $\varphi(u)$ – функции из задачи (2), (3), тогда решение задачи (2), (3) разрушается за конечное время t_b, т. е. $\lim\limits_{t\to t_b}w(t)=\infty$.

Т е о р е м а 1 [4]. *Пусть $v(t)$ – верхнее решение задачи (2), (3), которое удовлетворяет следующему неравенству:*

$$\frac{dv}{dt}\ge k(t)\varphi(v),\quad t\in(0,T'),$$

$$v(0)=w_0,$$

где $k(t)$ и $\varphi(u)$ – функции из задачи (2), (3). Тогда следующие неравенства выполнены

$$v(t)\ge w(t),\quad t\in(0,T_2'),$$

где $(0,T_2')$ – общий интервал существования функций $w(t)$ и $v(t)$.

1.1. Задача Дирихле. Рассмотрим следующую задачу Дирихле для уравнения реакции диффузии (1) при $p(w)=w^n$, $k(t)=1$:

$$\frac{\partial g(u)}{\partial t}=\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^{2n+1}\right)+f(u),\quad (x,t)\in\Omega\times(0,T),\tag{4}$$

$$u(x,t)=0,\quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\tag{5}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad x\in\bar{\Omega}, \tag{6}$$

где функция $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ и $u_0(x)\ge 0, x\in\bar{\Omega}$. Из принципа максимума для параболических уравнений [10] следует, что решение задачи неотрицательно для всех $x\in\bar{\Omega}$ и $t\in[0,T)$.

Введем норму $\|v\|^2=(v,v)$ и первообразную функцию $F(u)=\int f(w)dw$.

Л е м м а 1. *Для задачи (4)–(6) выполнен следующий закон сохранения*

$$E(t)=E(0),$$

где

$$E(t)=\int_0^t\left(g'(u),\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dt+\frac{1}{2n+2}\sum_{\alpha=1}^m\left\|\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{n+1}\right\|^2-(F(u),1).$$

Т е о р е м а 2. *Предположим, что существует такая первообразная $F(u)$ функции $f(u)$, для которой выполнены следующие условия:*

1. Функция

$$G(v)=mes\,\Omega\, f\left(\Phi^{-1}\left(\frac{1}{mes\,\Omega}v\right)\right)\Phi^{-1}\left(\frac{1}{mes\,\Omega}v\right)+mes\,\Omega\, F\left(\Phi^{-1}\left(\frac{1}{mes\,\Omega}v\right)\right),$$

выпуклая для $v\ge v_0$, где $\Phi(u)=\int g'(w)w\,dw$.

2. Существует $T_1<\infty$, которое удовлетворяет равенству

$$\int_{v_0}^{\infty}\frac{dw}{G(w)-E(0)}=T_1,$$

где

$$v_0=v(0)=\int_\Omega \Phi(u(x,0))dx.$$

3. Следущее неравенство выполнено

$$E(0)<\min_{v\ge v_0}G(v).$$

Тогда решение задачи (1), (5), (6) разрушается за конечное время, т. е.

$$\lim_{t\to T_b}\sup_{x\in\Omega}u(x,t)=\infty,$$

и более того, $T_b\le T_1$.

1.2. Задача Неймана. В этом пункте рассматривается следующая задача Неймана для уравнения реакции диффузии (1):

$$\sum_{\alpha=1}^m p\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right|^2\right)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}=0, \quad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{7}$$

$$u(x,0)=u_0(x), \quad x\in\bar{\Omega}, \tag{8}$$

где функция $u_0\in C(\bar{\Omega})$ и $u_0(x)\ge 0, x\in\bar{\Omega}$.

Т е о р е м а 3. *Предположим, что следующие условия выполнены:*

1. Функция

$$\varphi(v)=mes\,\Omega\, f\left(g^{-1}\left(\frac{1}{mes\,\Omega}v\right)\right),$$

выпуклая.

2. Существует $T_1 < \infty$, *которое удовлетворяет уравнению*

$$\int_{v_0}^{\infty} \frac{dw}{\varphi(w)} = \int_0^{T_1} k(t)dt,$$

где

$$v_0 = v(0) = \int_{\Omega} g(u(x,0))dx.$$

Тогда решение задачи (1), (7), (8) разрушается за конечное время, т. е.

$$\lim_{t \to T_b} \sup_{x \in \Omega} u(x,t) = \infty,$$

и более того, $T_b \le T_1$.

2. Условия разрушения решения разностных схем.

2.1. Понятие разрушения решения в разностных схемах. Предположим что имеется разностная схема *J*, которая определена на сетке $\omega = \omega_\tau \times \omega_h$, где $\omega_\tau = \{t_n \mid t_{n+1} > t_n, n = \overline{0, N}\}$ – временная сетка и ω_h – некоторая пространственная сетка. Пусть y_n – решение разностной схемы *J* на сетке ω_h в момент времени t_n.

О п р е д е л е н и е. Разностная схема *J* «допускает» разрушение решения в норме $\|\cdot\|_{\omega_h}$, если существует временная последовательность $\{t_n \mid t_n = t_{n-1} + \tau_n\}_{n=1}^{\infty}$, которая стремится к некоторому конечному числу, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_{hb} < \infty$ и решение разностной схемы, заданной на этой последовательности, стремится к беспонечности в норме $\|\cdot\|_{\omega_h}$, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} \| y_n \|_{\omega_h} = \infty.$$

У т в е р ж д е н и е 2. *Предположим что* $w(t)$ *– непрерывная функция, для которой выполнено уравнение*

$$\lim_{t \to t_b} w(t) = \infty$$

и для любого решения задачи J выполнено неравенство

$$\| y^n \|_{\omega_h} \ge w(t_n), \quad t_n \in \omega_\tau.$$

Тогда J *«допускает» разрушение решения, кроме того* $t_{hb} \le t_b$.

2.2. Дискретный аналог теоремы сравнения. Дискретные аналоги теорем сравнения [4] очень важны в изучении поведения решения, устойчивости и определения условий разрушения решения разностных схем. Далее формулируется один из возможных дискретных аналогов теоремы сравнения дифференциальной задачи (2), (3).

Т е о р е м а 4. *Предположим, что следующие условия выполнены:*

$$\frac{\beta_\tau^{n+1} - \beta_\tau^n}{\tau_n} \ge k(t_{n+1})\varphi(\beta_\tau^{n+1}), \quad n = 0, 1..., N-1,$$

$$\beta_\tau^0 \ge v_0,$$

где β_τ^n *– сеточная функция, которая определена на временной сетке* $\omega_\tau = \{t_n \mid t_{n+1} = t_n + \tau_n, n = \overline{0, N}\}$, *функции* $k(t)$ *и* $\varphi(u)$ *взяты из задачи (2), (3). Пусть выполнено следующее неравенство:*

$$\int_0^{t_N} k(t)dt < \int_{v_0}^{\infty} \frac{d\xi}{\varphi(\xi)}.$$

Тогда выполнены следующие неравенства:

$$\beta_\tau^n \ge w(t_n), \quad n = 1, 2, ..., N,$$

где $w(t)$ *– решение задачи (2), (3).*

2.3. Разрушение решения разностной схемы. В этом пункте расматривается неявная разностная схема и доказываются условия, при которых решение разностной схемы «допускает» разрушение решения. Определим множества

$$\bar{\Omega} = \{x = (x_1, ..., x_m) \mid \quad 0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \quad \alpha = \overline{1, m}\},$$

$$\Omega = \{x = (x_1, ..., x_m) \mid \quad 0 < x_\alpha < l_\alpha, \quad \alpha = \overline{1, m}\}, \quad \partial\Omega = \bar{\Omega} / \Omega.$$

В области Ω введем сетку

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau, \quad \omega = \omega_h \times \omega_\tau, \quad \gamma_h = \bar{\omega}_h / \omega_h, \quad \bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{0\},$$

где

$$\bar{\omega}_\tau = \{t_n \mid t_{n+1} = t_n + \tau_n, \quad \tau_n > 0, \quad n = \overline{0, N_0 - 1}, \quad t_{N_0} = T\},$$

$$\bar{\omega}_h = \left\{x_i = \left(x_1^{(i_1)}, ..., x_m^{(i_m)}\right) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, m}\right\},$$

$$\omega_h = \left\{x_i = \left(x_1^{(i_1)}, ..., x_m^{(i_m)}\right) \mid x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, \quad i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}, \quad \alpha = \overline{1, m}\right\},$$

$$\gamma_\alpha^0 = \left\{x_i = \left(x_1^{(i_1)}, ..., x_m^{(i_m)}\right) \mid x \in \bar{\omega}, \quad x_\alpha^{(i_\alpha)} = 0\right\},$$

$$\gamma_\alpha^N = \left\{x_i = \left(x_1^{(i_1)}, ..., x_m^{(i_m)}\right) \mid x \in \bar{\omega}, \quad x_\alpha^{(i_\alpha)} = (N_\alpha - 1) h_\alpha\right\},$$

с постоянными шагами по пространству $h_1, h_2, ..., h_m$ и шагом по времени τ_n. Введем меру сетки $mes\,\omega_h = \prod_{\alpha=1}^{m} l_\alpha$.

Рассмотрим разностную схему, которая аппроксимирует задачу (1), (7), (8)

$$g(y)_t = \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha(\hat{y}) + k(t_{n+1}) f(\hat{y}), \quad (x, t) \in \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau, \tag{9}$$

$$A_\alpha(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{h_\alpha} D(y_{x_\alpha}), & x \in \gamma_\alpha^0; \\ D(y_{x_\alpha})_{\bar{x}_\alpha}, & x \in \omega_h; \qquad \alpha = 1, ..., m, \\ -\dfrac{2}{h_\alpha} D(y_{\bar{x}_\alpha}), & x \in \gamma_\alpha^N; \end{cases} \tag{10}$$

$$y^0 = y_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \tag{11}$$

где

$$D(u) = p(u^2) u.$$

Т е о р е м а 5. *Предположим, что следующие условия выполнены:*

1. Функция

$$\varphi(v) = mes\,\omega_h\, f\left(g^{-1}\left(\frac{1}{mes\,\omega_h} v\right)\right)$$

выпуклая.

2. Существует $T_1 < \infty$, *которая удовлетворяет уравнению*

$$\int_{v_0}^{\infty} \frac{dw}{\varphi(w)} = \int_0^{T_1} k(t) dt,$$

где

$$v_0 = \sum_{\omega_h} s g(y_0), \quad s = \prod_{\alpha=1}^{m} h_\alpha,$$

Тогда решение задачи (9)–(11) «допускает» разрушения решения, т. е. существует такая последовательность $\{t_n \mid t_n = t_{n-1} + \tau_n\}_{n=1}^{\infty}$, *что*

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\omega_h} y^n = \infty,$$

и кроме того $\lim_{n\to\infty} t_n = T_{hb} \le T_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Просуммируем уравнение (9) на ω_h

$$\sum_{\omega_h} g(y)_t = \sum_{\omega_h} \sum_{\alpha=1}^{m} A_\alpha(y^{n+1}) + k(t_{n+1}) \sum_{\omega_h} f(y^{n+1}), \quad n = 0, ..., N-1.$$

Используя уравнения (10) получим

$$\sum_{\omega_h} g(y)_t = k(t_{n+1}) \sum_{\omega_h} f(y^{n+1}), \quad n = 0, ..., N-1. \tag{12}$$

Умножая (12) на $s = \prod_{\alpha=1}^{m} h_\alpha$, имеем

$$s \sum_{\omega_h} g(y)_t = k(t_{n+1}) mes\,\omega_h \sum_{\omega_h} \frac{s}{mes\,\omega_h} f(g^{-1}(g(y^{n+1}))), \quad n = 0,..., N-1.$$

Пусть $v = \sum_{\omega_h} sg(y)$ и применяя неравенство Йенсена к этому уравнению, получаем следующую задачу:

$$v_t \ge k(t_{n+1}) \varphi(v^{n+1}), \quad n = 0, ..., N-1,$$

$$v_0 = \sum_{\omega_h} sg(y_0).$$

Из теоремы 4 следует неравенство

$$v^n \ge w(t_n), \quad n = 0, ..., N-1.$$

Поскольку выполнено условие 2 теоремы, то $\lim_{t\to T_1} w(t) = \infty$. Тогда из утверждения 2 следует, что задача (9)–(11) «допускает» разрушение решения, т. е. существует такая последовательность $\{t_n \mid t_n = t_{n-1} + \tau_n\}_{n=1}^{\infty}$, что

$$\lim_{n\to\infty} v^n = \infty,$$

кроме того, $\lim_{n\to\infty} t_n = T_{hb} \le T_1$. Следовательно,

$$\infty = \lim_{n\to\infty} v^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{\omega_h} sg(y^n) \le mes\,\omega_h \lim_{n\to\infty} \max_{\omega_h} g(y^n) = mes\,\omega_h \lim_{n\to\infty} g\left(\max_{\omega_h} y^n\right).$$

Так как функция $g(u)$ непрерывно возрастающая, верно следующее равенство

$$\lim_{n\to\infty} \max_{\omega_h} y^n = \infty.$$

Список использованных источников

1. Blow-up in quasilinear parabolic equations / A. A. Samarskii [et al.]. – Berlin, 1995. – 560 p. https://doi.org/10.1515/9783110889864

2. Matus, P. P. On the Role of Conservation Laws and Input Data in the Generation of Peaking Modes in Quasilinear Multidimensional Parabolic Equations with Nonlinear Source and in their Approximations / P. P. Matus, N. G. Churbanova, D. A. Shchadinskii // Differ. Equ. – 2016. – Vol. 52, N 7. – P. 942–950. https://doi.org/10.1134/s0012266116070120

3. Matus, P. P. On the role of conservation laws in the problem on the occurrence of unstable solutions for quasilinear parabolic equations and their approximations / P. P. Matus // Differ. Equ. – 2013. – Vol. 49, N 7. – P. 883–894. https://doi.org/10.1134/S0012266113070100

4. Discrete Analogs of the Comparison Theorem and Two-Sided Estimates of Solution of Parabolic Equations / P. Matus [et al.] // Appl. Math. Inf. Sci. – 2016. – Vol. 10, N 1. – P. 83–92. https://doi.org/10.18576/amis/100108

5. Bandle, C. Blow-up in diffusion equations: A survey / C. Bandle, H. Brunner // J. Comput. Appl. Math. – 1998. – Vol. 97, N 1–2. – P. 3–22. https://doi.org/10.1016/s0377-0427(98)00100-9

6. Straughan, B. Explosive Instabilities in Mechanics / B. Straughan. – Berlin, 1998. – 197 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-58807-5

7. Ding, J. Blow-up and global solutions for a class of nonlinear reaction diffusion equations under Dirichlet boundary conditions / J. Ding, H. Hu // J. Math. Anal. Appl. – 2016. – Vol. 433, N 2. – P. 1718–1735. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.08.046

8. Payne, L. E. Blow-up phenomena for some nonlinear parabolic problems / L. E. Payne, G. A. Philippin, P. W. Schaefer // Nonlinear Anal., Theory, Methods, Appl. – 2008. – Vol. 69, N 10. – P. 3495–3502. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.09.035

9. Mu, C. Blow-up phenomena for a doubly degenerate equation with positive initial energy / C. Mu, R. Zeng, B. Chen // Nonlinear Anal., Theory, Methods, Appl. – 2010. – Vol. 72, N 2. – P. 782–793. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.07.020

10. Protter, M. H. Maximum Principles in Differential Equations / M. H. Protter, H. F. Weinberger. – Prentice Hall, 1967. – 261 p.

References

1. Samarskii A. A., Galaktionov V. A., Kurdyumov S. P., Mikhailov A. P. *Blow-up in quasilinear parabolic equations*. Berlin, 1995. 560 p. https://doi.org/10.1515/9783110889864

2. Matus P. P., Churbanova N. G., Shchadinskii D. A. On the Role of Conservation Laws and Input Data in the Generation of Peaking Modes in Quasilinear Multidimensional Parabolic Equations with Nonlinear Source and in their Approximations. *Differential Equations*, 2016, vol. 52, no. 7, pp. 942–950. https://doi.org/10.1134/s0012266116070120

3. Matus P. P. On the role of conservation laws in the problem on the occurrence of unstable solutions for quasilinear parabolic equations and their approximations. *Differential Equations*, 2013, vol. 49, no. 7, pp. 883–894. https://doi.org/10.1134/s0012266113070100

4. Matus P., Kozera R., Paradzinska A., Schadinskii D. Discrete Analogs of the Comparison Theorem and Two-Sided Estimates of Solution of Parabolic Equations. *Applied Mathematics & Information Sciences*, 2016, vol. 10, no. 1, pp. 83–92. https://doi.org/10.18576/amis/100108

5. Bandle C., Brunner H. Blow-up in diffusion equations: A survey. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 1998, vol. 97, no. 1–2, pp. 3–22. https://doi.org/10.1016/s0377-0427(98)00100-9

6. Straughan B. *Explosive Instabilities in Mechanics*. Berlin, 1998. 197 p. https://doi.org/10.1007/978-3-642-58807-5

7. Ding J., Hu H. Blow-up and global solutions for a class of nonlinear reaction diffusion equations under Dirichlet boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2016, vol. 433, no. 2, pp. 1718–1735. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.08.046

8. Payne L. E., Philippin G. A., Schaefer P. W. Blow-up phenomena for some nonlinear parabolic problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2008, vol. 69, no. 10, pp. 3495–3502. https://doi.org/10.1016/j.na.2007.09.035

9. Mu C., Zeng R., Chen B. Blow-up phenomena for a doubly degenerate equation with positive initial energy. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2010, vol. 72, no. 2, pp. 782–793. https://doi.org/10.1016/j.na.2009.07.020

10. Protter M. H., Weinberger H. F. *Maximum Principles in Differential Equations*. New Jersey, 1967. 261 p.

Информация об авторе

Щадинский Денис Александрович – мл. науч. сотрудник, магистр физ.-мат. наук. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: schadinskii@gmail.com.

Information about the author

Schadinskii Denis A. – Junior Researcher, Master (Physics and Mathematics). Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: schadinskii@gmail.com.