Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **июль–август** **Том 59 № 4**

УДК 511.42

Ф. ГЁТЦЕ[1], А. Г. ГУСАКОВА[2]

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ЧИСЛА В КОРОТКИХ ИНТЕРВАЛАХ

(Представлено членом-корреспондентом Ю. С. Хариным)

[1]Университет г. Билефельда, Германия
goetze@math.uni-bielefeld.de
[2]Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
gusakova.anna.0@gmail.com

В работе рассмотрено распределение алгебраических чисел ограниченной степени и высоты. В частности, найдены оценки снизу для количества алгебраических чисел α степени, не превосходящей n, и высоты, не превосходящей Q, в интервалах I длины порядка $Q^{-3/2}$ при фиксированном n и Q, стремящемся к бесконечности.

Ключевые слова: алгебраические числа, многочлен с целыми коэффициентами, результант, мера Лебега.

F. GOETZE, H. G. HUSAKOVA

ALGEBRAIC NUMBERS IN SHORT INTERVALS

[1]Bielefeld University, Gemany
goetze@math.uni-bielefeld.de
[2]Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
gusakova.anna.0@gmail.com

In this article we consider the distribution of algebraic numbers in very short intervals. The concept of a type of a short intervals is introduced. Depending on the type of the interval the estimations for the number of algebraic numbers within the interval are found.

Keywords: algebraic numbers, polynomial with integer coefficients, resultant, Lebesgue measure.

В течение последних лет было получено несколько новых результатов, связанных с распределением алгебраических чисел и некоторых функций от алгебраических чисел (таких как дискриминант, результант, расстояние между сопряжёнными алгебраическими числами). Результаты, представленные в данном сообщении, относятся к распределению алгебраических чисел.

Введём некоторые обозначения. Пусть имеется многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, $\deg P = n$, где $a_j \in \mathbb{Z}$. Величину $H(P) = \max\limits_{0 \le j \le n} |a_j|$ назовём высотой многочлена $P(x)$. Определим класс многочленов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(x) \in \mathbb{Z}[x], \deg P \le n, H(P) \le Q\}.$$

Высотой алгебраического числа α будем называть высоту его минимального многочлена $H(\alpha) = H(P)$.

Пусть задано некоторое число $Q > Q_0(n)$, где $Q_0(n)$ – достаточно большая величина, зависящая только от n, и некоторая величина $0 < \gamma \le 1$. Будем рассматривать интервалы $I \subset \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ длины $|I| = Q^{-1-\gamma}$. Выбор интервала $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ несущественен и сделан для упрощения получения оценок.

В 2014 г. В. И. Берником и Ф. Гётце были доказаны следующие теоремы.

Т е о р е м а 1. *Для любого Q существует промежуток I длины* $|I| = \frac{1}{2}Q^{-1}$, *внутри которого нет действительных алгебраических чисел* α *степени* $\deg\alpha = n \geq 1$ *и* $H(\alpha) \leq Q$.

Теорему 1 нетрудно доказать различными способами. В работе [1] предложен один из них.

Т е о р е м а 2. *Множество действительных алгебраических чисел* α, $\deg\alpha = n$ *с функцией* $N(\alpha) = (H(\alpha))^{n+1}$ *образует регулярную систему на интервале I при любом* $T \geq T_0(A_n, N, I) = c_1(n)|I|^{-n-1}$, *если* $N(\alpha) \leq T$.

Из теоремы 2, в частности, следует [1], что при достаточно большой величине $c_2(n)$ любой интервал I длины $|I| \geq c_2(n)Q^{-1}$ содержит не менее, чем $c_3(n)Q^{n+1}|I|$ действительных алгебраических чисел α степени $\deg\alpha \leq n$ и высоты $H(\alpha) \leq Q$.

С другой стороны известно [2; 3], что количество действительных алгебраических чисел α степени $\deg\alpha \leq n$ и высоты $H(\alpha) \leq Q$ не менее, чем $c_4(n)Q^{n+1}$.

В данном сообщении мы исследуем распределение действительных алгебраических чисел в интервалах I при $\gamma \geq 0$. Из вышесказанного следует, что необходимо наложить некоторые дополнительные условия на интервал I.

О п р е д е л е н и е. *Назовём интервал I длины* $|I| = c_5(n)Q^{-1-\gamma}$ *интервалом типа* (Q, γ), $0 \leq \gamma < 1$, *если для всех рациональных чисел* $\frac{p}{q}$, $|q| \leq 2Q^{\gamma}$, *выполняется неравенство*

$$|qd - p| > c_5(n)Q^{-1}, \tag{1}$$

где d – центр интервала I.

Неравенство (1), в частности, означает, что интервал I, $|I| = c_5(n)Q^{-1-\gamma}$, не содержит рациональных чисел $\frac{p}{q}$ с условием $|q| \leq 2Q^{\gamma}$.

Т е о р е м а 3. *Для любых натуральных Q и n, и любого* $\gamma_1 < \frac{1}{n}$ *интервал I,* $|I| = 2^{-2n+1}(n+1)^{-1}Q^{-1-\gamma_1 n}$, *с центром в рациональной точке* $\frac{p}{q}$ *такой, что* $|p| \leq |q|$ *и* $1 \leq q \leq Q^{\gamma_1}$, *не содержит действительных алгебраических чисел* α *степени* $2 \leq \deg\alpha \leq n$ *и высоты* $H(\alpha) \leq Q$.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуется следующая лемма [4].

Л е м м а 1. *Для любого множества различных корней* $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}$, $1 \leq s \leq n$, *многочлена* $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ *справедливо неравенство* $\prod_{j=1}^{s} |\alpha_{i_j}| \leq (n+1)2^n H(P)|a_n|^{-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Рассмотрим интервал I, удовлетворяющий условию теоремы, и пусть он содержит некоторое алгебраическое число $\alpha \in I$ высоты $H(\alpha) \leq Q$ с минимальным многочленом $P_1(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$, $k \leq n$. Рассмотрим результант многочленов P_1 и $P_2 = qx - p$. Так как данные многочлены не имеют общих корней, то

$$1 \leq |R(P_1, P_2)| = q^k a_k |\alpha_1 - p/q| \prod_{j=2}^{k} |\alpha_j - p/q|, \tag{2}$$

$$\prod_{j=2}^{k} |\alpha_j - p/q| \leq \prod_{j=2}^{k} \left(|\alpha_j| + |p/q|\right).$$

Используя лемму 1 оценим данное произведение следующим образом:

$$\prod_{j=2}^{k} \left(|\alpha_j| + |p/q|\right) \leq \sum_{i=0}^{k-1} (k+1)2^k H(P)|a_k|^{-1} C_{k-1}^{i} |p/q|^{i} = (k+1)2^k \frac{H(P)}{|a_k|} \sum_{i=0}^{k-1} C_{k-1}^{i} |p/q|^{i}.$$

Откуда имеем

$$\prod_{j=2}^{k} |\alpha_j - p/q| \leq (k+1)2^k \frac{H(P)}{|a_k|} \left(1 + |p/q|\right)^{k-1} < (k+1)2^{2k-1} \frac{H(P)}{|a_k|}.$$

Таким образом, используя полученную оценку, равенство $|I| = 2^{-2n+1}(n+1)^{-1}Q^{-1-\gamma_1 n}$ и $k \leq n$, из (2) имеем

$$1 \le 0,5 q^k \,|a_k|\, 2^{-2n+1}(n+1)^{-1} Q^{-1-\gamma_1 n} \prod_{j=2}^{k} \left|\alpha_j - p/q\right|,$$

$$1 < 0,5 q^k \,|a_k|\, 2^{-2n+1}(n+1)^{-1} Q^{-1-\gamma_1 n} (k+1) 2^{2k-1} \frac{H(P)}{|a_k|} \le 0,5 q^k Q^{-1-\gamma_1 n} H(P),$$

$$1 < 0,5 q^k Q^{-1-\gamma_1 n} H(P) \le 0,5 Q^{\gamma_1 k} Q^{-1-\gamma_1 n} Q \le 0,5.$$

Данное неравенство противоречиво. Следовательно, интервал I не содержит алгебраических чисел α высоты $H(\alpha) \le Q$ и степени $\deg\alpha \le n$. □

Теорема 3, в частности, показывает, что при $\gamma_1 n = 0,5$ существует интервал I, $|I| = c_6(n) Q^{-3/2}$, который не содержит алгебраических чисел степени, не превосходящей n, и высоты, не превосходящей Q. Но что происходит в интревалах I, $|I| > c_6(n) Q^{-3/2}$? Ответ на этот вопрос даёт теорема 4.

Т е о р е м а 4. *При любых натуральных n и $Q > Q_0(n)$ и некоторой величине $c_7(n)$ любой интервал I типа $(Q, 0,5)$, $|I| \ge c_7(n) Q^{-3/2}$, содержит не менее, чем $c_8(n) Q^{n+1} |I|$ действительных алгебраических чисел α степени $\deg\alpha \le n$ и высоты $H(\alpha) \le Q$.*

Доказательство теоремы 4 основывается на следующей теореме 5.

Т е о р е м а 5. *Обозначим через $L_n = L_n(Q, \delta_0(n), I)$ множество точек x интервала I, $|I| \ge c_7(n) Q^{-3/2}$ типа $(Q, 0,5)$, для которых система неравенств*

$$\begin{cases} |P(x)| < 4Q^{-n}, \\ |P'(x)| < \delta_0(n) Q \end{cases} \tag{3}$$

имеет решение в многочленах $P \in \mathcal{P}_n(Q)$. Тогда при достаточно малом $\delta_0(n)$ и некоторой $c_7(n)$ имеем $\mu L_n(Q, \delta_0(n), I) < \frac{1}{4}|I|$.

Перед доказательством теоремы 5 сформулируем вспомогательную лемму. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – корни многочлена $P(x)$. С каждым корнем α_i будем связывать множество

$$S(\alpha_i) = \{x \in \mathbb{R} : |x - \alpha_i| = \min_{1 \le j \le n} |x - \alpha_j|\}.$$

Более того, мы будем полагать, что $i = 1$ и

$$|\alpha_1 - \alpha_2| \le |\alpha_1 - \alpha_3| \le \ldots \le |\alpha_1 - \alpha_n|.$$

Л е м м а 2. *Пусть $x \in S(\alpha_1)$, тогда*

$$|x - \alpha_1| \le 2^{n-1} \frac{|P(x)|}{|P'(\alpha_1)|}.$$

Доказательство леммы 2 можно найти в [5; 6].

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 5. Для доказательства теоремы 5 будем разбивать интервал изменения модуля производной на меньшие интервалы и рассматривать систему (3) на каждом из них. Количество таких интервалов равно некоторой величине $s = s(n)$, зависящей лишь от степени многочлена.

Несложно убедиться, что при $2n^{3/2} Q^{-(n-1)/2} < |P'(x)| < \delta_0 Q$ величины $|P'(x)|$ и $|P'(\alpha_1)|$ имеют один порядок малости, а именно, $\frac{1}{2}|P'(x)| > |P'(\alpha_1)|$ и $|P'(\alpha_1)| < 2|P'(x)|$. В связи с этим в системе (3) будем рассматривать $|P'(\alpha_1)|$ вместо $|P'(x)|$.

П р е д л о ж е н и е 1. *Рассмотрим систему неравенств*

$$\begin{cases} |P(x)| < 4Q^{-n}, \\ \delta_1(n) Q^{1/2} < |P'(\alpha_1)| < 2\delta_0(n) Q. \end{cases} \tag{4}$$

Обозначим через $L_{n,1}$ множество $x \in I$, для которых система неравенств (4) имеет решение в полиномах $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, тогда при достаточно малой величине $\delta_0(n)$, любом $Q > Q_0(n)$ и $\delta_0(n) > \delta_1(n)$ имеем $\mu L_{n,1} < \frac{1}{4s}|I|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим интервалы

$$\begin{gathered}\sigma(P) := \{x \in I : |x - \alpha_1| < 2^{n+1} Q^{-n} |P'(\alpha_1)|^{-1}\},\\ \sigma_1(P) := \{x \in I : |x - \alpha_1| < c_9(n) Q^{-1} |P'(\alpha_1)|^{-1}, c_9(n) > 1\}.\end{gathered} \tag{5}$$

По лемме 2 множество решений системы неравенств (4) содержится в объединении интервалов $\bigcup\limits_{P \in \mathcal{P}_n(Q)} \sigma(P)$. Длины интервалов $\sigma(P)$ и $\sigma_1(P)$ связаны следующим соотношением:

$$\mu\sigma(P) \le 2^{n+1} c_9^{-1}(n) Q^{-n+1} \mu\sigma_1(P). \tag{6}$$

Зафиксируем вектор $\mathbf{b}_1 = (a_n, ..., a_2)$, и обозначим через $\mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_1)$ подкласс многочленов $\mathcal{P}_n(Q)$ с одним и тем же вектором коэффицинтов $\mathbf{b}_1$. Количество различных векторов $\mathbf{b}_1$ может быть оценено как

$$\#\mathbf{b}_1 = (2Q+1)^{n-1} \le 2^n Q^{n-1}. \tag{7}$$

Используем метод существенных и несущественных областей, который ввёл Спринджук [5]. Интервал $\sigma_1(P_1)$ назовем существенным, если для любого $P_2 \in \mathcal{P}_n(Q)$ выполняется

$$\mu(\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)) < \frac{1}{2}\mu\sigma_1(P_1).$$

В противном случае интревал $\sigma_1(P)$ назовём несущественным.

В случае существенных интервалов $\sigma_1(P)$ справедлива оценка $\sum\limits_{P \in \mathcal{P}_n(Q, b_1)} \mu\sigma_1(P) \le 2|I|$, тогда из (6) и (7) следует, что при $c_9(n) = 2^{2n+4} s$

$$\sum_{\mathbf{b}_1} \sum_{P \in \mathcal{P}_n(Q, b_1)} \mu\sigma(P) < 2^{n+1} c_9^{-1}(n) Q^{-n+1} 2^n Q^{n-1} |I| = 2^{2n+1} c_9^{-1}(n) |I| = \frac{1}{8s}|I|. \tag{8}$$

В случае несущественных интервалов рассмотрим два многочена $P_1(x), P_2(x) \in \mathcal{P}_n(Q, \mathbf{b}_1)$ таких, что $\mu(\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)) \ge \frac{1}{2}\mu\sigma_1(P_1)$. Так как коэффициенты $a_n, ..., a_2$ у многочленов $P_1(x), P_2(x)$ совпадают, то их разность $S(x) = P_1(x) - P_2(x) = ax + b$ является линейным многочленом и $S'(x) = P_1'(x) - P_2'(x) = a$. Оценим $|S(x)|$ и $|S'(x)|$. Разложим многочлены $P_i(x), i = 1, 2$, по формуле Тэйлора с остаточным членом в форме Лагранжа на интервале $\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)$:

$$P_i(x) = P_i'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \frac{1}{2} P_i''(\xi_1)(x - \alpha_1)^2, \xi_1 \in (x, \alpha_1).$$

Используя (4) и (5) получим, что

$$|P_i(x)| < c_9(n) Q^{-1} + \frac{1}{2} \cdot 2n^2 Q c_9^2(n) Q^{-2} |P_i'(\alpha_1)|^{-2} < 2c_9(n) Q^{-1}.$$

Разложим многочлены $P_i'(x), i = 1, 2$, по формуле Тэйлора с остаточным членом в форме Лагранжа на интервале $\sigma_1(P_1) \cap \sigma_1(P_2)$:

$$P_i'(x) = P_i'(\alpha_1) + P_i''(\xi_2)(x - \alpha_1), \xi_2 \in (x, \alpha_1).$$

Используя (4) и (5) получим, что

$$|P_i'(x)| < |P_i'(\alpha_1)| + \frac{1}{2} n^2 Q c_9(n) Q^{-1} |P_i'(\alpha_1)|^{-1} < 2|P_i'(\alpha_1)| < 4\delta_0(n) Q.$$

Используя данные оценки, имеем систему неравенств

$$\begin{cases} |ax + b| < 4c_9(n) Q^{-1}, \\ |a| < 8\delta_0(n) Q. \end{cases} \tag{9}$$

По лемме 2 мера множества тех $x \in I$, для которых система неравенств (9) выполняется при фиксированных a и b может быть оценена как

$$J(a,b) = \{x \in I, |x - a/b| < 4c_9(n)Q^{-1}|a|^{-1}\},$$

$$|J(a,b)| < 8c_9(n)Q^{-1}|a|^{-1}.$$

Из определения следует, что $|a| > Q^{1/2}$, и тогда $|J(a,b)| < |I|$. Рассмотрим интервалы

$$J(a_i, b_i, c_{10}(n)) = \{x \in I : |x - b_i/a_i| < c_{10}(n)Q^{-1}|a_i|^{-1}\}, i = 1, 2,$$

и найдём значение $c_{10}(n) > 8c_9(n)$, при котором данные интервалы не пересекаются. Пусть существует точка $x_0 \in J(a_1, b_1, c_{10}(n)) \cap J(a_2, b_2, c_{10}(n))$. В таком случае,

$$\frac{1}{|a_1||a_2|} \le |b_1/a_1 - b_2/a_2| \le |x_0 - b_1/a_1| + |x_0 - b_2/a_2| < c_{10}(n)Q^{-1}\left(|a_1|^{-1} + |a_2|^{-1}\right).$$

При $c_{10}(n) = 2^{-4}\delta_0^{-1}(n)$ данное неравенство не выполняется и справедливо

$$\sum_{a,b} J(a, b, c_{10}(n)) < |I|. \tag{10}$$

Оценим меру множества решений системы (9). Так как меры множеств $J(a,b)$ и $J(a,b,c_{10}(n))$ связаны соотношением $|J(a,b)| = 4c_9(n)c_{10}^{-1}(n)|J(a,b,c_{10}(n))|$, то из (10) следует, что при $\delta_0(n) = 2^{-2n-16}s^{-2}$ справедливо

$$\sum_{a,b}|J(a,b)| \le 2^3 c_9(n)2^{-1}c_{10}^{-1}(n)\sum_{a,b}|J(a,b,c_{10}(n))| < \frac{1}{8s}|I|. \tag{11}$$

Таким образом, из (8) и (11) имеем $\mu L_{n,1} < \frac{1}{8s}|I| + \frac{1}{8s}|I| = \frac{1}{4s}|I|$. □

Аналогичное утверждение справедливо и в случае

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-n}, \\ Q^{-1/2} < |P'(\alpha_1)| < \delta_1(n)Q^{1/2}, \end{cases}$$

где $\delta_1(n)$ – некоторая достаточно малая величина. Рассмотрение данной системы сводится к рассмотрению системы неравенств для многочлена $S(x)$, $\deg S \le 2$:

$$\begin{cases} |S(x)| < 4n^2c_{11}^2(n)Q^{-n}, \\ |S'(x)| < 8n^2c_{11}(n)\delta_1 Q^{1/2}. \end{cases} \tag{12}$$

Рассмотрим более общее утверждение и докажем его с помощью метода математической индукции. Индукцию будем проводить по степени многочлена k и в качестве базы индукции используем системы (9) и (12) для многочленов первой и второй степени.

П р е д л о ж е н и е 2. *Рассмотрим систему неравенств*

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-n}, \\ Q^{-(k-1)/2} < |P'(\alpha_1)| < Q^{-(k-2)/2}, \end{cases} \tag{13}$$

где $2 < k < n$. *Обозначим через* $L_{n,k}$ *множество* $x \in I$, *для которых система неравенств (13) имеет решение в многочленах* $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, *тогда при* $Q > Q_0(n)$ *имеем* $\mu L_{n,k} < \frac{1}{4s}|I|$.

Случай $k = n$ необходимо рассматривать при помощи другого метода.

П р е д л о ж е н и е 3. *Рассмотрим систему неравенств*

$$\begin{cases} |P(x)| < Q^{-n}, \\ n^{3/2}Q^{-(n-1)/2} < |P'(\alpha_1)| < Q^{-(n-2)/2}. \end{cases} \tag{14}$$

Обозначим через $L_{n,n}$ *множество* $x \in I$, *для которых система неравенств (14) имеет решение в многочленах* $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, *тогда при* $Q > Q_0(n)$ *имеем* $\mu L_{n,n} < \frac{1}{4s}|I|$.

Доказательство предложения 3 представляет собой часть доказательства проблемы Малера (классы второго рода) [5]. По аналогичной схеме рассматривается случай $|P'(x)| < n^{3/2}Q^{-(n-1)/2}$.

Таким образом, меру множества решений системы (3) оценим как

$$\mu L_n \leq \bigcup_{i=0}^{s(n)} \mu L_{n,i} < \frac{1}{4}|I|. \square$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 4. Доказательство теоремы 4 проведём с использованием результатов теоремы 5. Рассмотрим множество $B_1 = I \setminus L_n$. Из теоремы 5 следует, что

$$\mu B_1 \geq \frac{3}{4}|I|$$

при $Q > Q_0(n)$. Рассмотрим точку $x_1 \in B_1$. Существует многочлен $P_1(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, удовлетворяющий системе неравенств

$$\begin{cases} |P_1(x_1)| < Q^{-n}, \\ |P_1'(x_1)| \geq \delta_0(n)Q. \end{cases} \tag{15}$$

Существует действительный корень β_1 многочлена $P_1(x)$, такой что $x_1 \in S(\beta_1)$ и

$$|x_1 - \beta_1| < n\delta_0^{-1}(n)Q^{-n-1}. \tag{16}$$

Обозначим через I_1 множество тех $x \in B_1$, которые удовлетворяют неравенству (16). В таком случае

$$|I_1| = 2n\delta_0^{-1}(n)Q^{-n-1}.$$

Аналогично рассмотим точку $x_2 \in B_2 = B_1 \setminus I_1$. Существует многочлен $P_2(x) \in \mathcal{P}_n(Q)$, удовлетворяющий системе неравенств (15). Определим множество

$$I_2 = \{x \in B_2 \cap S(\beta_2) : |x - \beta_2| < n\delta_0^{-1}(n)Q^{-n-1}\},$$

тогда $|I_2| = 2n\delta_0^{-1}(n)Q^{-n-1}$.

Построение точек $\beta_i, 1 \leq i \leq t$, можно продолжать до тех пор, пока интервалы I_i не покроют всё множество B_1. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{t}|I_i| = 2tn\delta_0^{-1}(n)Q^{-n-1} \geq \mu B_1 \geq \frac{3}{4}|I|,$$

и

$$t \geq c_8(n)Q^{n+1}|I|. \square$$

Работа А. Г. Гусаковой выполнена при поддержке БРФФИ (грант Ф13К-155).

Список использованной литературы

1. *Берник, В. И.* Распределение действительных алгебраических чисел произвольной степени в коротких интервалах / В. И. Берник, Ф. Гётце // Изв. РАН. Сер. матем. – 2014. – Т. 79, № 1. – С. 21–42.

2. *Beresnevich, V.* On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. Beresnevich // Acta Arith. – 1999. Vol. 90, N 2. – P. 97–112.

3. *Baker, A.* Diophantine approximation and Hausdorff dimension / A. Baker, W. Schmidt // Proc. London Math. Soc. – 1970. – Vol. 21, N 3. – P. 1–11.

4. *Фельдман, Н. И.* Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел. I. Аппроксимация логарифмов алгебраических чисел / Н. И. Фельдман // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1951. – Т. 15, № 1. – С. 53–74.

5. *Спринджук, В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск, 1967.

6. *Берник, В. И.* Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник // Acta Arith. – 1983. – Т. 42, N 3. – P. 219–253.

Поступило в редакцию 27.04.2015