Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **июль–август** **Том 59 № 4**

УДК 517.548.5 + 519.65

Член-корреспондент Л. А. ЯНОВИЧ[1], *М. В. ИГНАТЕНКО*[2]

О НЕКОТОРЫХ АНАЛОГАХ ФОРМУЛ СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ МАТРИЧНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

[1]*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*
yanovich@im.bas-net.by
[2]*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*
ignatenkomv@bsu.by

Построены аналоги интерполяционных сплайнов для функций матричной переменной на множествах матриц с обычным, йордановым, адамаровым умножением и умножением по Фробениусу. Некоторые из полученных формул содержат дифференциалы Гато интерполируемой функции.

Ключевые слова: интерполирование, функции от матриц, йорданово и адамарово умножение матриц, интерполяционные формулы.

L. A. YANOVICH[1], *M. V. IGNATENKO*[2]

SOME ANALOGS OF SPLINE-INTERPOLATION FORMULAS FOR FUNCTIONS OF MATRIX VARIABLE

[1]*Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*
yanovich@im.bas-net.by
[2]*Belarusian State University, Minsk, Belarus*
ignatenkomv@bsu.by

Analogs of interpolation splines for functions of matrix variable, defined on sets of matrices with the ordinary, Jordan, Hadamard and Frobenius multiplication, has been constructed. Some of the obtained formulas contain Gateaux differentials of the interpolated function.

Keywords: interpolation, functions of matrix, Jordan and Hadamard multiplication matrix, interpolation formulas.

Введение. Сплайн-функции, заданные на отрезке $[a,b]$, по определению – это функции, которые на каждом частичном отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ разбиения $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ отрезка $[a,b]$ являются многочленами некоторых фиксированных степеней относительно алгебраической или другой системы функций и имеют на $[a,b]$ заданный порядок гладкости. К этому классу функций иногда относятся множество кусочно-постоянных и кусочно-непрерывных на $[a,b]$ функций с точками разрыва первого рода. Сплайны обладают хорошими аппроксимативными свойствами. Они – не только удобное средство приближения сложных кривых, но и важный инструмент решения разнообразных задач вычислительной математики [1–3].

В работе приведены формулы, которые являются некоторым матричным аналогом классических интерполяционных сплайнов. Построен ряд матричных вариантов интерполяционных сплайнов для функций, определённых на множествах матриц с обычным, йордановым, адамаровым умножением и умножением по Фробениусу. Некоторые из полученных формул содержат дифференциалы Гато интерполируемой функции. Применение отдельных формул рассмотрено на примерах.

Пусть $X = \{A\}$ – множество квадратных матриц фиксированной размерности, $X = \bigcup_{i=0}^{n} \mathfrak{M}_i$ – некоторое его разбиение, $A_i, A_{i+1} \in \mathfrak{M}_i$ – узлы интерполирования, следующая пара узлов A_{i+1}, A_{i+2} принадлежит множеству $\mathfrak{M}_{i+1}$ (точка A_{i+1} является предельной для множеств $\mathfrak{M}_i$ и $\mathfrak{M}_{i+1}$) и матрицы $A_{i+1} - A_i$ $(i = 0, 1, ..., n-1)$ обратимы.

Об одном варианте сплайнов третьей степени. Будем считать, что для оператора $F(A)$ существует дифференциал Гато $\delta F[A;h]$ в узлах A_i и A_{i+1} (A_i, A_{i+1}, $h \in \mathfrak{M}_i$). Введём обозначения

$$\Phi_{0i}(A) = (I-t)^2(I+2t) = I - 3t^2 + 2t^3,\ \ \Phi_{1i}(A) = t^2(3I-2t) = 3t^2 - 2t^3,$$

$$\Phi_{2i}(A) = (A_{i+1}-A_i)t(I-t)^2 = (A_{i+1}-A_i)[t - 2t^2 + t^3],$$

$$\Phi_{3i}(A) = (A_{i+1}-A_i)t^2(t-I) = (A_{i+1}-A_i)(t^3 - t^2),$$

где $t \equiv t(A) = (A-A_i)(A_{i+1}-A_i)^{-1}$. Заметим, что $t(A_i)=0$, $t(A_{i+1}) = I$.

Рассмотрим на множестве $\mathfrak{M}_i$ матричный многочлен

$$S_{3i}(A) \equiv S_i(A) = \Phi_{0i}(A)F(A_i) + \Phi_{1i}(A)F(A_{i+1}) + \delta F[A_i;\Phi_{2i}(A)] + \delta F[A_{i+1};\Phi_{3i}(A)]. \tag{1}$$

Нетрудно проверить, что $\Phi_{0i}(A_i) = \Phi_{1i}(A_{i+1}) = I;$ $\Phi_{0i}(A_{i+1}) = \Phi_{1i}(A_i) = \Phi_{2i}(A_i) = \Phi_{2i}(A_{i+1}) = \Phi_{3i}(A_i) = \Phi_{3i}(A_{i+1}) = 0$.

Дифференциал Гато от $F(A) = t^m(A)$ по направлению h для $m=1,2,3$ вычисляется по формулам: если $m=1$, то $\delta F[A;h] = h[A_{i+1}-A_i]^{-1}$; если $m=2$, то $\delta F[A;h] = th(A_{i+1}-A_i)^{-1} + h(A_{i+1}-A_i)^{-1}t$; при $m=3$ имеем $\delta F[A;h] = t^2h(A_{i+1}-A_i)^{-1} + th(A_{i+1}-A_i)^{-1}t + h(A_{i+1}-A_i)^{-1}t^2$.

Далее нам понадобятся также значения дифференциала Гато фундаментальных многочленов $\Phi_{\nu i}(A)$ для $\nu = 0,1,2,3$ в точках A_i и A_{i+1}. Для их вычисления применим формулы, приведённые выше для функций $t^m(A)$ $\ (m=1,2,3)$.

В случае $\Phi_{0i}(A)$ дифференциал $\delta\Phi_{0i}[A;h] = -3[th(A_{i+1}-A_i)^{-1} + h(A_{i+1}-A_i)^{-1}t] + 2[t^2h(A_{i+1}-A_i)^{-1} + th(A_{i+1}-A_i)^{-1}t + h(A_{i+1}-A_i)^{-1}t^2]$. Откуда, учитывая, что $t(A_i)=0$ и $t(A_{i+1})=1$, получаем равенства $\delta\Phi_{0i}[A_i;h]=0$ и $\delta\Phi_{0i}[A_{i+1};h]=0$.

Для фундаментального многочлена $\Phi_{1i}(A)$ имеет место соотношение $\delta\Phi_{1i}[A;h] = 3[th(A_{i+1}-A_i)^{-1} + h(A_{i+1}-A_i)^{-1}t] - 2t^2h(A_{i+1}-A_i)^{-1} - 2th(A_{i+1}-A_i)^{-1}t - 2h(A_{i+1}-A_i)^{-1}t^2$. Откуда следует, что $\delta\Phi_{1i}(A_i)=0$, $\delta\Phi_{1i}(A_{i+1})=0$.

Для многочлена $\Phi_{2i}(A)$ справедливы равенства

$$\delta\Phi_{2i}[A;h] = (A_{i+1}-A_i)\{h(A_{i+1}-A_i)^{-1} - 2th(A_{i+1}-A_i)^{-1} -$$

$$2h(A_{i+1}-A_i)^{-1}t + t^2h(A_{i+1}-A_i)^{-1} + th(A_{i+1}-A_i)^{-1}t + h(A_{i+1}-A_i)^{-1}t^2\},$$

$$\delta\Phi_{2i}[A_i;h] = (A_{i+1}-A_i)h(A_{i+1}-A_i)^{-1},\ \ \delta\Phi_{2i}[A_{i+1};h] = 0.$$

Аналогично для многочлена $\Phi_{3i}(A)$ будут иметь место соотношения

$$\delta\Phi_{3i}[A;h] = (A_{i+1}-A_i)\times$$

$$\{-th(A_{i+1}-A_i)^{-1} - h(A_{i+1}-A_i)^{-1}t + t^2h(A_{i+1}-A_i)^{-1} + th(A_{i+1}-A_i)^{-1}t + h(A_{i+1}-A_i)^{-1}t^2\},$$

$$\delta\Phi_{3i}[A_i;h] = 0,\ \ \delta\Phi_{3i}[A_{i+1};h] = (A_{i+1}-A_i)h(A_{i+1}-A_i)^{-1}.$$

Когда матрицы h и $(A_{i+1}-A_i)$ коммутируют, тогда для матричного многочлена третьей степени (1) выполняются интерполяционные условия $S_{3i}(A_i) = F(A_i)$, $S_{3i}(A_{i+1}) = F(A_{i+1})$, $\delta S_{3i}[A_i;h] = \delta F[A_i;h]$, $\delta S_{3i}[A_{i+1};h] = \delta F[A_{i+1};h]$.

При $h = I$ имеем $\delta\Phi_{2i}[A_i;I] = \Phi_{2i}{}'(A_i) = I$, а также $\delta\Phi_{3i}[A_{i+1};I] = \Phi_{3i}{}'(A_{i+1}) = I$, и, следовательно, для многочлена (1) будут выполняться следующие интерполяционные условия:

$$S_i(A_i) = F(A_i),\ \ S_i(A_{i+1}) = F(A_{i+1}),\ \ S_i{}'(A_i) = F'(A_i),\ \ S_i{}'(A_{i+1}) = F'(A_{i+1}),$$

где $S'(A) = \delta S[A;I]$, $F'(A) = \delta F[A;I]$. С учетом этого, формулу (1) для данного случая перепишем в виде

$$S_{3i}(A) = \Phi_{0i}(A)F(A_i) + \Phi_{1i}(A)F(A_{i+1}) + \Phi_{2i}(A)F'(A_i) + \Phi_{3i}(A)F'(A_{i+1}). \tag{2}$$

Интерполяционная формула (2) точна для матричных многочленов вида

$$P_3(A) = \Phi_{0i}(A)B + \Phi_{1i}(A)C + \Phi_{2i}(A)D + \Phi_{3i}(A)G,$$

где B, C, D и G – произвольные матрицы, так как имеют место равенства $P_3(A_i) = B$, $P_3(A_{i+1}) = C$, $P_3{}'(A_i) = D$, $P_3{}'(A_{i+1}) = G$.

Пусть выбирается несколько пар узлов вида (A_i, A_{i+1}), (A_{i+1}, A_{i+2}), (A_{i+2}, A_{i+3}) соответственно из множеств $\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{M}_{i+1}$, $\mathfrak{M}_{i+2}$ и т. д. Тогда $S_i(A_{i+1}) = S_{i+1}(A_{i+1})$, $S'_i(A_{i+1}) = S'_{i+1}(A_{i+1})$ для $i = 0, 1, ..., m-1$.

Рассмотрим ещё одну аналогичную (1) формулу, являющуюся в указанном выше смысле матричным аналогом кубических сплайнов:

$$S_{3i}(F; A) \equiv S_i(A) = \Phi_{0i}(A)F(A_i) + \Phi_{1i}(A)F(A_{i+1}) + \delta F[A_i, \tilde{\Phi}_{2i}(A)] + \delta F[A_{i+1}, \tilde{\Phi}_{3i}(A)], \qquad (3)$$

где $\Phi_{0i}(A) = I - 3t^2 + 2t^3$, $\Phi_{1i}(A) = 3t^2 - 2t^3$, $\tilde{\Phi}_{2i}(A) = (t - 2t^2 + t^3)(A_{i+1} - A_i)$, $\tilde{\Phi}_{3i}(A) = (t^3 - t^2)(A_{i+1} - A_i)$. Здесь функции $\Phi_{0i}(A)$ и $\Phi_{1i}(A)$ те же, что и в формуле (1), а функции $\tilde{\Phi}_{2i}(A)$ и $\tilde{\Phi}_{3i}(A)$ отличаются от ранее используемых $\Phi_{2i}(A)$ и $\Phi_{3i}(A)$ только перестановкой сомножителей. Но в этом случае, как видно из дальнейшего, уже не требуется перестановочности матриц h и $A_{i+1} - A_i$.

В (3), как и раньше, $t = (A - A_i)(A_{i+1} - A_i)^{-1}$, а для дифференциалов фундаментальных многочленов $\tilde{\Phi}_{2i}(A)$ и $\tilde{\Phi}_{3i}(A)$ в узлах A_i и A_{i+1} имеют место равенства $\delta\tilde{\Phi}_{2i}[A_i; h] = h$, $\delta\tilde{\Phi}_{2i}[A_{i+1}; h] = 0$, $\delta\tilde{\Phi}_{3i}[A_i; h] = 0$, $\delta\tilde{\Phi}_{3i}[A_{i+1}; h] = h$.

Итак, $S_i(A_i) = F(A_i)$, $S_i(A_{i+1}) = F(A_{i+1})$; $\delta S_i[A_i; h] = \delta F[A_i; h]$, $\delta S_i[A_{i+1}; h] = \delta F[A_{i+1}; h]$. Если взять следующую пару узлов A_{i+1}, A_{i+2} из $\mathfrak{M}_{i+1}$, тогда для матричных многочленов $S_i(A)$ и $S_{i+1}(A)$ имеют место соотношения $S_i(F; A_{i+1}) = S_{i+1}(F; A_{i+1})$, $\delta S_i(A_{i+1}; h) = \delta S_{i+1}(A_{i+1}; h)$ $(i = 0, 1, ..., m-1)$.

Формулы (1)–(3) в соответствии с выполнением для них указанных выше интерполяционных условий и принятой здесь гладкостью оператора $F(A)$ являются матричными аналогами кубических эрмитовых сплайнов дефекта 2 на множестве X.

Приведём варианты интерполяционных сплайнов для матричнозначных функций скалярного аргумента вида $F(x) = A[a_{ij}(x)]$, где $A[a_{ij}(x)]$ – функциональная квадратная матрица, заданная на отрезке $[a, b]$. Пусть узлы интерполирования x_k совпадают с точками разбиения $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ отрезка $[a, b]$.

Рассмотрим матричный вариант эрмитова кубического сплайна $S_{3,2}(A; x) = S_{3i}(x)$, где $x_i \le x < x_{i+1}$, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $i = 0, 1, ..., n-1$. В этом случае на промежутке $[x_i, x_{i+1}]$ сплайн $S_{3i}(x)$ является алгебраическим многочленом третьей степени относительно переменной x с матричными коэффициентами.

В явном виде сплайн $S_{3i}(x)$ задаётся следующей формулой:

$$S_{3i}(x) = \frac{1}{h_i^3}(x_{i+1} - x)^2[h_i + 2(x - x_i)]A(x_i) + \frac{1}{h_i^3}(x - x_i)^2[3h_i - 2(x - x_i)]A(x_{i+1}) +$$
$$\frac{1}{h_i^2}(x - x_i)(x - x_{i+1})^2 A'(x_i) + \frac{1}{h_i^2}(x - x_i)^2(x - x_{i+1})A'(x_{i+1}) \quad (x \in [x_i, x_{i+1}], i = 0, 1, ..., n-1).$$

Для него выполняются интерполяционные условия $S_{3i}(x_i) = A(x_i)$, $S'_{3i}(x_i) = A'(x_i)$, $S_{3i}(x_{i+1}) = A(x_{i+1})$, $S'_{3i}(x_{i+1}) = A'(x_{i+1})$ $(i = 0, 1, ..., n-1)$. Таким образом, $S_{3,2}(A; x)$ является для матрицы $A(x)$ эрмитовым кубическим матричным сплайном дефекта 2.

Непрерывные кусочно-линейные алгебраические и кусочно-тригонометрические сплайны для функциональных матриц. Рассмотрим далее кусочно-линейные на X матричные функции. Пусть A_i и A_{i+1} – матрицы из множества $\mathfrak{M}_i$. Для формулы линейной интерполяции

$$L_{1i}(F; A) = F(A_i) + \int_0^1 \delta F[A_i + \tau(A_{i+1} - A_i); A - A_i]d\tau,$$

как известно, справедливы равенства $L_{1i}(F; A_i) = F(A_i)$, $L_{1i}(F; A_{i+1}) = F(A_{i+1})$. Аналогично для следующей пары узлов A_{i+1} и A_{i+2}, принадлежащих множеству $\mathfrak{M}_{i+1}$, будем иметь $L_{1i+1}(F; A) = F(A_{i+1}) + \int_0^1 \delta F[A_{i+1} + \tau(A_{i+2} - A_{i+1}); A - A_{i+1}]d\tau$. Так как $L_{1i+1}(F; A_{i+1}) = F(A_{i+1})$, $L_{1i+1}(F; A_{i+2}) = F(A_{i+2})$, то приходим к соотношениям $L_{1i}(F; A_{i+1}) = L_{1i+1}(F; A_{i+1}) = F(A_{i+1})$.

Тогда кусочно-линейная интерполяционная формула $L_1(A)=\sum_{i=0}^{n}\chi_{\mathfrak{M}_i}(A)L_{1i}(F;A)$, где $\chi_{\mathfrak{M}}(A)=\begin{cases} I,\ A\in\mathfrak{M};\\ 0,\ A\,\overline{\in}\,\mathfrak{M},\end{cases}$ задает функцию, непрерывную на $X=\bigcup_{i=0}^{n}\mathfrak{M}_i$.

Для формулы линейной интерполяции

$$\tilde{L}_{1i}(F;A)=F(A_i)+$$

$$[A(a)-A_i(a)][A_{i+1}(a)-A_i(a)]^{-1}[F(\sigma_i)-F(A_i)]+\int_0^1\delta F[\sigma_{0i}+\tau(A_{i+1}-\sigma_{0i});H]d\tau,$$

где $\sigma_{0i}\equiv\sigma_{0i}(t)=A_i(t)+A_{i+1}(a)-A_i(a)$, $H=H(t)=A(t)-A_i(t)-A(a)+A_i(a)$, также выполняются интерполяционные условия $\tilde{L}_{1i}(F;A_i)=F(A_i)$, $\tilde{L}_{1i}(F;A_{i+1})=F(A_{i+1})$. Следовательно, $\tilde{L}_1(A)=\sum_{i=0}^{n}\chi_{\mathfrak{M}_i}(A)\tilde{L}_{1i}(F;A)$, где, как и ранее, $\chi_{\mathfrak{M}}(A)=\begin{cases} I,\ A\in\mathfrak{M};\\ 0,\ A\,\overline{\in}\,\mathfrak{M},\end{cases}$ является непрерывной алгебраической кусочно-линейной интерполяционной на $X=\bigcup_{i=0}^{n}\mathfrak{M}_i$ функцией.

Рассмотрим далее тригонометрический многочлен первой степени

$$S_{1i}(x)=\frac{\sin\frac{1}{2}(x-\tilde{x}_i)\sin\frac{1}{2}(x-x_{i+1})}{\sin\frac{1}{2}(x_i-\tilde{x}_i)\sin\frac{1}{2}(x_i-x_{i+1})}A(x_i)+$$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(x-x_i)\sin\frac{1}{2}(x-x_{i+1})}{\sin\frac{1}{2}(\tilde{x}_i-x_i)\sin\frac{1}{2}(\tilde{x}_i-x_{i+1})}A(\tilde{x}_i)+\frac{\sin\frac{1}{2}(x-x_i)\sin\frac{1}{2}(x-\tilde{x}_i)}{\sin\frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)\sin\frac{1}{2}(x_{i+1}-\tilde{x}_i)}A(x_{i+1}),$$

где x_i – точки разбиения $0=x_0<x_1<...<x_n\le 2\pi$ отрезка $[0,2\pi]$ на интервалы $[x_i,x_{i+1}]$, $x\in[x_i,x_{i+1}]$, $\tilde{x}_i$ – любая внутренняя точка из $[x_i,x_{i+1}]$, $A(x)$ – заданная на $[0,2\pi]$ матрица. В этом случае функциональная матрица $S_{1,1}(A;x)=S_{1i}(x)$ $(x\in[x_i,x_{i+1}],\ i=0,1,...,n-1)$, определённая на всем отрезке $[0,2\pi]$, является непрерывной, и для неё выполняются интерполяционные условия $S_{1,1}(A;x_i)=A(x_i)$, $S_{1,1}(A;\tilde{x}_i)=A(\tilde{x}_i)$ и $S_{1,1}(A;x_{i+1})=A(x_{i+1})$.

Рассмотрим далее тригонометрический многочлен для функции $F(x)$, $x\in[x_i,\ x_{i+1}]$, вида

$$T_{i2}(x)=l_{i0}(x)F(x_i)+l_{i1}(x)F(x_{i+1})+l_{i2}(x)F'(x_i)+l_{i3}(x)F'(x_{i+1}),\tag{4}$$

где $l_{i0}(x)=\dfrac{\sin^2\frac{1}{2}(x-x_{i+1})\sin^2\frac{1}{2}(x-2x_i+x_{i+1})}{\sin^4\frac{1}{2}(x_i-x_{i+1})}$, $l_{i1}(x)=\dfrac{\sin^2\frac{1}{2}(x-x_i)\sin^2\frac{1}{2}(x-2x_{i+1}+x_i)}{\sin^4\frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)}$,

$$l_{i2}(x)=\frac{2\sin\frac{1}{2}(x-x_i)\sin^2\frac{1}{2}(x-x_{i+1})}{\sin^2\frac{1}{2}(x_i-x_{i+1})},\quad l_{i3}(x)=\frac{2\sin^2\frac{1}{2}(x-x_i)\sin\frac{1}{2}(x-x_{i+1})}{\sin^2\frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)},\quad x_i\ne x_{i+1},$$

для которого выполняются интерполяционные условия $T_{2i}(x_i)=F(x_i)$, $T_{2i}(x_{i+1})=F(x_{i+1})$, $T'_{2i}(x_i)=F'(x_i)$ и $T'_{2i}(x_{i+1})=F'(x_{i+1})$.

Пусть узлы $A_i=x_iI$, $A_{i+1}=x_{i+1}I$ – скалярные матрицы. Тогда матричный вариант тригонометрического многочлена (4) имеет вид

$$T_{i2}(A)=l_{i0}(A)F(A_i)+l_{i1}(A)F(A_{i+1})+l_{i2}(A)F'(A_i)+l_{i3}(A)F'(A_{i+1}),\tag{5}$$

где фундаментальные многочлены задаются равенствами

$$l_{i0}(A)=\frac{\sin^2\frac{1}{2}(A-x_{i+1}I)\sin^2\frac{1}{2}(A-(2x_i-x_{i+1})I)}{\sin^4\frac{1}{2}(x_i-x_{i+1})},\quad l_{i2}(A)=\frac{2\sin\frac{1}{2}(A-x_iI)\sin^2\frac{1}{2}(A-x_{i+1}I)}{\sin^2\frac{1}{2}(x_i-x_{i+1})},\quad (6)$$

$$l_{i1}(A)=\frac{\sin^2\frac{1}{2}(A-x_iI)\sin^2\frac{1}{2}(A-(2x_{i+1}-x_i)I)}{\sin^4\frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)},\quad l_{i3}(A)=\frac{2\sin^2\frac{1}{2}(A-x_iI)\sin\frac{1}{2}(A-x_{i+1}I)}{\sin^2\frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)}.\quad (7)$$

Здесь, как обычно, полагаем, что $l'_{ik}(A)=l'_{ik}(z)\big|_{z=A}$ $(k=0,1,2,3)$ и производная $F'(A)=F'(z)\big|_{z=A}$. Интерполяционные условия $T_{2i}(A_j)=F(A_j)$ и $T_{2i}{}'(A_j)=F'(A_j)$ $(j=i,i+1)$, естественно, выполняются.

Например, для матричной функции $F(A)=\sin A$ получим, что

$$T_{i2}(A)=l_{i0}(A)\sin x_i+l_{i1}(A)\sin x_{i+1}+l_{i2}(A)\cos x_i+l_{i3}(A)\cos x_{i+1},$$

где фундаментальные многочлены $l_{i0}(A)$, $l_{i1}(A)$, $l_{i2}(A)$ и $l_{i3}(A)$ задаются формулами (6) и (7).

Формулы сплайн-интерполирования на множествах матриц с обычным и йордановым умножением. Пусть, как и ранее, X – некоторое множество квадратных матриц, $X=\bigcup_{i=0}^{m}\mathfrak{M}_i$ – его разбиение, матрицы A_i и A_{i+1} принадлежат множеству $\mathfrak{M}_i$ $(i=0,1,...,m-1)$ и известны значения функции $F(A)$ в точках A_i. Тогда для многочлена

$$L_{m1}(F;A)=\sum_{i=0}^{m}L_{1i}(A)\chi_{\mathfrak{M}_i}(A),\quad (8)$$

где $L_{1i}(A)=F(A_i)+[F(A_{i+1})-F(A_i)]\circ\{[A_{i+1}-A_i]^{-1}(A-A_i)\}$, $\chi_{\mathfrak{M}_i}(A_j)=\delta_{ij}I$, выполняются интерполяционные условия $L_{m1}(F;A_i)=F(A_i)$, $(i=0,1,...,m)$. В формуле $L_{1i}(A)$ сначала вычисляется матрица в фигурных скобках.

Эти условия выполняются и для формулы (8), где

$$L_{1i}(A)=F(A_i)+(A-A_i)\circ B+[F(A_{i+1})-F(A_i)-(A_{i+1}-A_i)\circ B]\circ\{(A_{i+1}-A_i)^{-1}\circ(A-A_i)\},$$

символ «$\circ$» означает произведение матриц по Йордану, т. е. $A\circ B=\frac{1}{2}(AB+BA)$; в выше написанном выражении матрица B – произвольно заданная. Здесь сначала вычисляются матрицы в квадратных и фигурных скобках, а потом их йорданово произведение.

Приведём далее несколько интерполяционных формул для заданной на X функции $F(A)$, которые на каждом подмножестве $\mathfrak{M}_i$ будут матричными многочленами степени n_i. Пусть на $\mathfrak{M}_i$ выбраны узлы $A_j^{(i)}$ $(j=0,1,...,n_i)$ такие, что матрицы $A_{j+1}^{(i)}-A_j^{(i)}$ обратимы. Обозначим через $l_{ki}(A)$ произведение вида

$$l_{ki}(A)=(A-A_0^{(i)})(A-A_1^{(i)})\cdots(A-A_{k-1}^{(i)})(A-A_{k+1}^{(i)})\cdots(A-A_{n_i}^{(i)}),$$

где $0\le k\le n_i$, и умножение матриц может пониматься как обычное или как йорданово. В последнем случае в силу неассоциативности умножения по Йордану следует определить порядок выполнения этой операции.

Для матричного многочлена $S_{n_i}(A)=\sum_{k=0}^{n_i}F(A_k^{(i)})\circ\{l_{ki}^{-1}(A_k^{(i)})\circ l_{ki}(A)\}$ имеют место соотношения $S_{n_i}(A_\nu^{(i)})=F(A_\nu^{(i)})$ $(\nu=0,1,...,n_i)$ и, соответственно, для

$$L_n(A)=\sum_{i=0}^{m}S_{n_i}(A)\chi_{\mathfrak{M}_i}(A)\quad (9)$$

будут справедливы равенства

$$L_n(A_j^{(i)})=F(A_j^{(i)})\ \ (j=0,1,...,n_i;\ i=0,1,...,m).\quad (10)$$

Так как матричный алгебраический многочлен $\tilde{S}_{n_i}(A)=\sum_{k=0}^{n_i} F(A_k^{(i)})\circ l_{ki}(A)$, где $l_{ki}(A)=\prod_{j=0,j\neq k}^{n_i}\{(A-A_\nu^{(i)})\circ(A_k^{(i)}-A_j^{(i)})^{-1}\}$, удовлетворяет также условиям $\tilde{S}_{n_i}(A_\nu^{(i)})=F(A_\nu^{(i)})$ $(\nu=0,1,...,n_i)$, причём произведение матриц, указанных в фигурных скобках, может пониматься как обычное, так и йорданово, то в этом случае для аналогичной (9) функции $\tilde{L}_n(A)=\sum_{i=0}^{m}\tilde{S}_{n_i}(A)\chi_{\mathfrak{M}_i}(A)$ будут выполняться интерполяционные условия (10).

При тех же узлах интерполирования $A_j^{(i)}$ и таком же разбиении множества X на основе формулы (1) получим, что для функции $L_n(A)=\sum_{i=0}^{m}S_i(A)\chi_{\mathfrak{M}_i}(A)$, где $S_i(A)$ задаётся равенством (1), будут справедливы соотношения $L_n(A_j^{(i)})=F(A_j^{(i)})$, $\delta L_n[A_j^{(i)};h]=\delta F[A_j^{(i)};h]$ $(j=0,1,...,n_i;$ $i=0,1,...,m)$.

Рассмотрим аналог формулы (2) на множестве матриц с использованием йорданова умножения. Пусть $\tau\equiv\tau(A)=(A-A_i)\circ(A_{i+1}-A_i)^{-1}$, где, как и ранее, $\circ$ – обозначение йорданова умножения квадратных матриц. Введём обозначения

$$\tilde{\Phi}_{0i}(A)=I-3\tau^2(A)+2\tau^3(A),\ \ \tilde{\Phi}_{1i}(A)=3\tau^2(A)-2\tau^3(A),$$

$$\tilde{\Phi}_{2i}(A)=(A_{i+1}-A_i)\circ[\tau(A)-2\tau^2(A)+\tau^3(A)],\ \tilde{\Phi}_{3i}\left(A\right)=(A_{i+1}-A_i)\circ[\tau^3(A)-\tau^2(A)].$$

Так как $\tau(A_i)=0$ и $\tau(A_{i+1})=1$, то $\tilde{\Phi}_{1i}(A_i)=\tilde{\Phi}_{2i}(A_i)=\tilde{\Phi}_{3i}(A_i)=\tilde{\Phi}_{0i}(A_{i+1})=\tilde{\Phi}_{2i}(A_{i+1})=\tilde{\Phi}_{3i}(A_{i+1})=0$, а $\tilde{\Phi}_{0i}(A_i)=\tilde{\Phi}_{1i}(A_{i+1})=I$.

Дифференциалы Гато функций $\tau(A)$, $\tau^2(A)$ и $\tau^3(A)$ задаются соответственно формулами $\delta\tau[A;h]=(A_{i+1}-A_i)^{-1}\circ h$, $\delta\tau^2[A;h]=\tau[h\circ(A_{i+1}-A_i)^{-1}]+[h\circ(A_{i+1}-A_i)^{-1}]\tau$, $\delta\tau^3[A;h]=\tau^2[h\circ(A_{i+1}-A_i)^{-1}]+\tau[h\circ(A_{i+1}-A_i)^{-1}]\tau+[h\circ(A_{i+1}-A_i)^{-1}]\tau^2$.

Заметим, что умножение сомножителей в равенствах (6) и (7) для матричных фундаментальных многочленов формулы (5) может быть также и йордановым.

Матричные аналоги сплайнов на множествах матриц с адамаровым умножением. Умножение по Адамару матриц $A=[a_{ij}]$ и $B=[b_{ij}]$ одинаковой размерности выполняется по правилу $AB=[a_{ij}b_{ij}]$. Роль единичной матрицы играет матрица той же размерности, все элементы которой равны единице. В связи с этим одним из подклассов матриц, на котором естественно рассмотреть задачу интерполяции функций от матриц, является множество матриц с ненулевыми элементами и, соответственно, для каждой матрицы $A=[a_{ij}]$ из этого множества обратная к ней по Адамару $\overset{\bullet}{A^{-1}}$ будет $\overset{\bullet}{A^{-1}}=\left[\dfrac{1}{a_{ij}}\right]$.

Для квадратных матриц $A=[a_{ij}]$ с ненулевыми элементами на главной диагонали будем рассматривать еще один аналог обратной матрицы, обозначаемой, как $A^{(-1)}$ и имеющей вид $A^{(-1)}=\mathrm{diag}\left[\dfrac{1}{a_{ii}}\right]$. Очевидно, что в этом случае $AA^{(-1)}=I$, где I – обычная единичная матрица.

Пусть оператор $F:X\to X$, где X – множество матриц фиксированной размерности. В качестве узлов $A_i=\left[a_{\nu k}^{(i)}\right]$ и $A_{i+1}=\left[a_{\nu k}^{(i+1)}\right]$, принадлежащих множеству $\mathfrak{M}_i$, выбираются такие матрицы, что $a_{\nu k}^{(i+1)}-a_{\nu k}^{(i)}\neq 0$ для $\nu=0,1,...,p;k=0,1,...,q$, в случае, когда узлы A_i, A_{i+1}, как и матрицы $A=[a_{\nu k}]$, являются $p\times q$-матрицами из X. Тогда для формулы линейной интерполяции

$$L_{1i}(A)=F(A_i)\cdot\left[\frac{a_{\nu k}-a_{\nu k}^{(i+1)}}{a_{\nu k}^{(i)}-a_{\nu k}^{(i+1)}}\right]+F(A_{i+1})\cdot\left[\frac{a_{\nu k}-a_{\nu k}^{(i)}}{a_{\nu k}^{(i+1)}-a_{\nu k}^{(i)}}\right],\tag{11}$$

где символ «$\cdot$» означает операцию умножения по Адамару, выполняются равенства $L_{1i}(A_i)=F(A_i)$, $L_{1i}(A_{i+1})=F(A_{i+1})$.

Формула (11) в другом варианте может быть записана в матричном виде $L_{1i}(A) = F(A_i)\cdot(A_i - A_{i+1})^{-1}\cdot(A - A_{i+1}) + F(A_{i+1})\cdot(A_{i+1} - A_i)^{-1}\cdot(A - A_i)$, при этом A, A_i, $A_{i+1} \in \mathfrak{M}_i$ $(i = 0, 1, ..., m)$.

Имеет смысл привести также формулу линейной интерполяции

$$L_{1i}(A) = F(A_i)[(A_i - A_{i+1})^{(-1)}\cdot(A - A_{i+1})] + F(A_{i+1})[(A_{i+1} - A_i)^{(-1)}\cdot(A - A_i)]$$

или в случае квадратных матриц в варианте

$$L_{1i}(A) = F(A_i)\mathrm{diag}\left[\frac{a_{\nu\nu} - a_{\nu\nu}^{(i+1)}}{a_{\nu\nu}^{(i)} - a_{\nu\nu}^{(i+1)}}\right] + F(A_{i+1})\mathrm{diag}\left[\frac{a_{\nu\nu} - a_{\nu\nu}^{(i)}}{a_{\nu\nu}^{(i+1)} - a_{\nu\nu}^{(i)}}\right]. \quad (12)$$

Рассмотрим интерполяционные алгебраические многочлены произвольной степени. Обозначим через $Z_{ki}(A)$ выражение вида

$$Z_{ki}(A) = (A - A_i)\cdot(A - A_{i+1})\cdot\ldots\cdot(A - A_{k-1})\cdot(A - A_{k+1})\cdot\ldots\cdot(A - A_{n_i})$$

и предположим, что матрица $Z_{ki}(A_k)$ $(k = 0, 1, ..., n_i)$ не имеет нулевых элементов. Тогда для многочлена n_i-степени $L_{in_i}(A) = \sum_{k=0}^{n_i} F(A_k)\cdot Z_{ki}^{-1}(A_k)\cdot Z_{ki}(A)$ выполняются равенства $L_{in_i}(A_j) = F(A_j)$ для $j = 0, 1, ..., n_i$. В случае $n_i = 2$ эта формула интерполирования примет вид

$$L_{i2}(A) = F(A_i)\cdot\left[\frac{\left(a_{\nu k} - a_{\nu k}^{(i+1)}\right)\left(a_{\nu k} - a_{\nu k}^{(i+2)}\right)}{\left(a_{\nu k}^{(i)} - a_{\nu k}^{(i+1)}\right)\left(a_{\nu k}^{(i)} - a_{\nu k}^{(i+2)}\right)}\right] +$$

$$F(A_{i+1})\cdot\left[\frac{\left(a_{\nu k} - a_{\nu k}^{(i)}\right)\left(a_{\nu k} - a_{\nu k}^{(i+2)}\right)}{\left(a_{\nu k}^{(i+1)} - a_{\nu k}^{(i)}\right)\left(a_{\nu k}^{(i+1)} - a_{\nu k}^{(i+2)}\right)}\right] + F(A_{i+2})\cdot\left[\frac{\left(a_{\nu k} - a_{\nu k}^{(i)}\right)\left(a_{\nu k} - a_{\nu k}^{(i+1)}\right)}{\left(a_{\nu k}^{(i+2)} - a_{\nu k}^{(i)}\right)\left(a_{\nu k}^{(i+2)} - a_{\nu k}^{(i+1)}\right)}\right].$$

Для неё справедливы равенства $L_{i2}(A_{i+j}) = F(A_{i+j})$ для $j = 0, 1, 2$.

Эти же равенства выполняются и для формулы

$$L_{2i}(A) = F(A_i)\mathrm{diag}\left[\frac{\left(a_{\nu\nu} - a_{\nu\nu}^{(i+1)}\right)\left(a_{\nu\nu} - a_{\nu\nu}^{(i+2)}\right)}{\left(a_{\nu\nu}^{(i)} - a_{\nu\nu}^{(i+1)}\right)\left(a_{\nu\nu}^{(i)} - a_{\nu\nu}^{(i+2)}\right)}\right] +$$

$$F(A_{i+1})\mathrm{diag}\left[\frac{\left(a_{\nu\nu} - a_{\nu\nu}^{(i)}\right)\left(a_{\nu\nu} - a_{\nu\nu}^{(i+2)}\right)}{\left(a_{\nu\nu}^{(i+1)} - a_{\nu\nu}^{(i)}\right)\left(a_{\nu\nu}^{(i+1)} - a_{\nu\nu}^{(i+2)}\right)}\right] + F(A_{i+2})\mathrm{diag}\left[\frac{\left(a_{\nu\nu} - a_{\nu\nu}^{(i)}\right)\left(a_{\nu\nu} - a_{\nu\nu}^{(i+1)}\right)}{\left(a_{\nu\nu}^{(i+2)} - a_{\nu\nu}^{(i)}\right)\left(a_{\nu\nu}^{(i+2)} - a_{\nu\nu}^{(i+1)}\right)}\right].$$

В последнем случае требуется, чтобы диагональные элементы матриц A_i, A_{i+1} и A_{i+2} были различны.

В формулах (11) и (12) узлы интерполирования берутся из подмножества $\mathfrak{M}_i$. С учётом структуры этих формул получаем, что функция от *A* вида $L_m(F; A) = \sum_{i=0}^{m} \tilde{L}_{1i}(A)\chi_{\mathfrak{M}_i}(A)$, где, как и ранее, $\chi_{\mathfrak{M}_i}(A_j) = \delta_{ij}I$, а $\tilde{L}_{1i}(A)$ – один из матричных многочленов (11) или (12), заданных на $\mathfrak{M}_i$, будет непрерывной на всём множестве *X*.

Об интерполяционных формулах, основанных на умножении матриц по Фробениусу. Пусть матрицы $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ с действительными элементами имеют одинаковую размерность. Их произведение по Фробениусу определяется как $A\Diamond B = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ij}$. Эта операция коммутативна, а её результатом является скаляр. Тогда для формулы

$$L_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{l_{nk}(A)}{l_{nk}(A_k)} F(A_k), \quad (13)$$

где

$$l_{nk}(A) = [(A - A_0)\Diamond(A_k - A_0)]...[(A - A_{k-1})\Diamond(A_k - A_{k-1})]\times$$
$$[(A - A_{k+1})\Diamond(A_k - A_{k+1})]...[(A - A_n)\Diamond(A_k - A_n)],$$

имеют место равенства $L_n(A_i) = F(A_i)$ $(i = 0, 1, ..., n)$ при различных узлах интерполирования A_k. Функция $F(A)$ в точках A_k может принимать матричные или другие значения. В частности, матрицы $F(A_k)$ могут быть произвольной размерности, в том числе и отличной от размерностей матриц A и A_k.

Рассмотрим линейный случай формулы (13):

$$L_{1,i}(A) = \frac{(A - A_{i+1})\Diamond(A_i - A_{i+1})}{(A_i - A_{i+1})\Diamond(A_i - A_{i+1})}F(A_i) + \frac{(A - A_i)\Diamond(A_{i+1} - A_i)}{(A_{i+1} - A_i)\Diamond(A_{i+1} - A_i)}F(A_{i+1}),$$

где узлы A_i, A_{i+1} принадлежат множеству $\mathfrak{M}_i$. Для узлов A_{i+1}, A_{i+2} из $\mathfrak{M}_{i+1}$ и соответствующего матричного многочлена первой степени $L_{1,i+1}(A)$ будут выполняться равенства $L_{1,i}(A_{i+1}) = L_{1,i+1}(A_{i+1}) = F(A_{i+1})$.

Таким образом, $L_{1,i}(A)$ $(A \in \mathfrak{M}_i, i = 0, 1, ..., n-1)$ определяет на X непрерывную функцию, которая на каждом подмножестве $\mathfrak{M}_i$ разбиения X является матричным многочленом алгебраического типа первой степени.

В заключение отметим, что ряд интерполяционных формул других видов для функций от матриц получен также в [4–9].

Список использованной литературы

1. *Стечкин, С. Б.* Сплайны в вычислительной математике / С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин. – М., 1976.
2. *Завьялов, Ю. С.* Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. – М., 1980.
3. *Макаров, В. Л.* Сплайн-аппроксимация функций / В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов. – М., 1983.
4. *Makarov, V. L.* Methods of operator interpolation / V. L. Makarov, V. V. Khlobystov, L. A. Yanovich. – Kyiv, 2010.
5. *Yanovich, L. A.* On matrix function interpolation / L. A. Yanovich, I. V. Romanovski // J. Numer. Appl. Math. – 2009. – N 1(97). – P. 122–131.
6. *Худяков, А. П.* Обобщенные интерполяционные эрмитова типа многочлены для функций матричной переменной / А. П. Худяков, Л. А. Янович // Тр. Ин-та матем. НАН Беларуси. – 2011. – Т. 19, № 2. – С. 103–114.
7. *Yanovich, L. A.* On one class of interpolating formulas for functions of matrix variables / L. A. Yanovich, A. P. Hudyakov // J. of Computational and Applied Mathematics. – 2011. – Vol. 105, N 2. – P. 136–147.
8. *Янович, Л. А.* Интерполяционные формулы первых и вторых порядков для функций матричного аргумента / Л. А. Янович, А. П. Худяков // Докл. НАН Беларуси. – 2012. – Т. 56, № 1. – С. 16–22.
9. *Янович, Л. А.* Формулы интерполяции с произвольным числом матричных узлов и произвольными входными параметрами / Л. А. Янович, А. П. Худяков // Докл. НАН Беларуси. – 2014. – Т. 58, № 4. – С. 11–16.

Поступило в редакцию 27.04.2015