ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 519.63
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-6-454-459

Поступило в редакцию 10.04.2023
Received 10.04.2023

Член-корреспондент П. П. Матус[1,2], Д. Пылак[2]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Католический университет Люблина, Люблин, Польша

БЕЗУСЛОВНО МОНОТОННАЯ И ГЛОБАЛЬНО УСТОЙЧИВАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ФИШЕРА

Аннотация. В работе строятся и исследуются безусловно монотонные и глобально устойчивые разностные схемы для уравнения Фишера. Показано, что при определенном выборе входных данных задачи эти схемы наследуют главное свойство устойчивого решения дифференциальной задачи $0 \le u(x,t) \le 1,\quad (x,t) \in \bar{Q}_T = \{(x,t):\ 0 \le x \le l,\ 0 \le t < +\infty\}$. Доказана безусловная монотонность рассматриваемых разностных схем и получена априорная оценка разностного решения в равномерной норме. Устойчивое поведение разностного решения в нелинейном случае имеет место при несколько более жестких ограничениях на входные данные: $0{,}5 \le u_0(x),\ \mu_1(t),\ \mu_2(t) \le 1$.

Ключевые слова: безусловная монотонность, глобальная устойчивость, разностная схема, уравнение Фишера

Для цитирования. Матус, П. П. Безусловно монотонная и глобально устойчивая разностная схема для уравнения Фишера / П. П. Матус, Д. Пылак // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2023. – Т. 67, № 6. – С. 454–459. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-6-454-459

Corresponding Member Piotr P. Matus[1,2], D. Pylak[2]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]Institute of Mathematics and Computer Science the John Paul II Catholic University of Lublin, Lublin, Poland

UNCONDITIONALLY MONOTONE AND GLOBALLY STABLE DIFFERENCE SCHEMES FOR THE FISHER EQUATION

Abstract. In this paper, we construct and study unconditionally monotone and globally stable difference schemes for the Fisher equation. It has been shown that constructed schemes inherit the stability property of the exact solution: $0 \le u(x,t) \le 1$, $(x,t) \in \bar{Q}_T = \{(x,t):\ 0 \le x \le l,\ 0 \le t < +\infty\}$ for a given input data of the problem. The unconditional monotonicity of the difference schemes is proved and the a priori estimate is obtained in the uniform norm for the difference solution. The stable behavior of the difference solution in the nonlinear case takes place under slightly more stringent constraints on the input data: $0.5 \le u_0(x),\ \mu_1(t),\ \mu_2(t) \le 1$.

Keywords: unconditional monotonicity, global stability, difference scheme, Fisher equation

For citation. Matus P. P., Pylak D. Unconditionally monotone and globally stable difference schemes for the Fisher equation. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2023, vol. 67, no. 6, pp. 454–459 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-6-454-459

Введение. Популяционная модель Фишера, или Колмогорова–Петровского–Пискунова [1; 2] встречается в различных задачах, например, в теории горения, в теории фазовых переходов, в физике плазмы и др. Дифференциальные свойства решения задачи Коши для данного уравнения изучаются в [3]. Указывается класс входных данных задачи, для которых точное положительное решение не превосходит единицы для любого $0 < t < +\infty$. Естественно, для данной модели необходимо строить такие вычислительные методы, которые наследуют это свойство.

В данной работе строятся и исследуются безусловно монотонные и глобально устойчивые разностные схемы для уравнения Фишера. Показано, что при определенном выборе входных данных задачи эти схемы наследуют главное свойство устойчивого решения дифференциальной задачи: $0 \le u(x,t) \le 1,\ \ (x,t) \in \bar{Q}_T = \{(x,t):\ 0 \le x \le l,\ 0 \le t < +\infty\}$. Доказана безусловная монотонность рассматриваемых разностных схем и получена априорная оценка разностного решения в равномерной норме. Устойчивое поведение разностного решения в нелинейном случае имеет место при несколько более жестких ограничениях на входные данные: $0,5 \le u_0(x),\ \mu_1(t),\ \mu_2(t) \le 1$.

Двусторонние оценки. В дальнейшем нам понадобится нестандартный принцип максимума для общей канонической формы записи разностных схем [4], позволяющий устанавливать двусторонние оценки разностного решения для нелинейных задач [5]. Пусть задано начальное число точек-сетка $\bar{\omega}_h = \omega_h \cup \gamma_h$, где ω_h – множество внутренних точек; γ_h – множество граничных узлов. Окрестностью точки x называется множество $M'(x) = M(x) \setminus x$, $M(x)$ – шаблон. Пусть заданы функции $A(x)$, $B(x, \xi)$, $F(x)$, определенные при любых $x \in \omega_h$ и принимающие вещественные значения. Для каждой точки $x \in \omega_h$ сопоставим одно и только одно уравнение вида [4, с. 226]

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in M'(x)} B(x,\xi)y(\xi) + F(x),\ \ x \in \omega_h, \tag{1}$$

называемое канонической формой записи разностной схемы. Для (1) в граничных узлах зададим условие Дирихле

$$y(x) = \mu(x),\ \ x \in \gamma_h. \tag{2}$$

Отметим, что при аппроксимации граничных условий второго или третьего рода сетка может не содержать граничных узлов. Будем предполагать выполнение обычных условий положительности коэффициентов

$$A(x) > 0,\ \ B(x,\xi) > 0 \text{ для всех } \xi \in M'(x),\ \ x \in \omega_h, \tag{3}$$

$$D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in M'(x)} B(x,\xi) > 0 \text{ для всех } \xi \in M'(x),\ \ x \in \omega_h, \tag{4}$$

гарантирующих однозначную разрешимость схемы в равномерной норме.

Сформулируем утверждение, позволяющее установить двусторонние оценки сеточного решения при незнакоопределенных входных данных задачи $\mu(x)$, $F(x)$.

Л е м м а. *Пусть выполнены условия положительности коэффициентов (3), (4). Тогда максимальное и минимальное значения решения разностной схемы (1), (2) принадлежат интервалу изменения входных данных:*

$$\begin{gathered} m_1 \le y(x) \le m_2,\ \ x \in \bar{\omega}_h, \\ m_1 = \min\left\{\min_{x\in\gamma_h}\mu(x), \min_{x\in\omega_h}\frac{F(x)}{D(x)}\right\},\ \ m_2 = \max\left\{\max_{x\in\gamma_h}\mu(x), \max_{x\in\omega_h}\frac{F(x)}{D(x)}\right\}. \end{gathered} \tag{5}$$

Доказательство этого утверждения можно найти в [5].

Определение монотонности разностной схемы в нелинейном случае. Возмущая в (1), (2) входные данные задачи $F(x)$, $\mu(x)$, получим возмущенную задачу

$$A(x)\tilde{y}(x) - \sum_{\xi \in M'(x)} B(x,\xi)\tilde{y}(\xi) + \tilde{F}(x),\ \ x \in \omega_h,$$

$$\tilde{y}(x) = \tilde{\mu}(x),\ \ x \in \gamma_h.$$

В соответствии с [6], разностная схема (1), (2) называется монотонной, если из условий

$$\begin{gathered} \tilde{F}(x) - F(x) \ge 0,\ \ \tilde{\mu}(x) - \mu(x) \ge 0, \\ (\tilde{F}(x) - F(x) \le 0,\ \ \tilde{\mu}(x) - \mu(x) \le 0) \end{gathered} \tag{6}$$

следует выполнение неравенств

$$\tilde{y}(x)-y(x)\geq 0,\ (\tilde{y}(x)-y(x)\leq 0). \tag{7}$$

Точная разностная схема. При аппроксимации нелинейного члена в уравнении Фишера будем ориентироваться на точную разностную схему [7]

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau}=\left[\frac{1}{y^{n+1}-y^n}\int\limits_{y^n}^{y^{n+1}}\frac{dy}{f(y)}\right]^{-1},\ y^0=u_0,$$

$$y^n=y(t_n),\ t_n\in\bar{\omega}_\tau,\ \bar{\omega}_\tau=\{t_n=n\tau,\ n=0,1,...\},$$

аппроксимирующую задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{du}{dt}=f(u),\ u=u(t),\ u(0)=u_0.$$

С л е д с т в и е. *Для квадратичной нелинейности* $f(u)=u^2$ *точная разностная схема имеет безытерационный вид*

$$\frac{y^{n+1}-y^n}{\tau}=y^n y^{n+1},\ y^0=u_0. \tag{8}$$

Разностная схема для уравнения Фишера. Это уравнение также известно как уравнение Колмогорова–Петрова–Пискунова [1]. Оно названо в честь статистика и биолога Рональда Фишера, предложившего его в 1937 г. для описания процессов популяционной динамики [2]. Поставим для этого уравнения начальную задачу с краевыми условиями Дирихле:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\lambda u(1-u),\ \lambda=\text{const}>0, \tag{9}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ u(0,t)=\mu_1(t),\ u(l,t)=\mu_2(t). \tag{10}$$

В [3] изучаются вопросы существования неотрицательных и устойчивых решений. В частности, доказывается, что если входные данные неотрицательны

$$u(x,0)=u_0(x),\ u(0,t)=\mu_1(t),\ u(l,t)=\mu_2(t), \tag{11}$$

$$\bar{Q}_T=\{(x,t):\ 0\leq x\leq l,\ t\geq 0\},$$

то и для точного решения имеет место аналогичная двусторонняя оценка

$$0\leq u(x,t)\leq 1,\quad (x,t)\in\bar{Q}_T. \tag{12}$$

На равномерной пространственно-временной сетке с постоянными шагами h, τ по пространству и времени соответственно [8]:

$$\bar{\omega}=\bar{\omega}_h\times\bar{\omega}_\tau,\quad \bar{\omega}_h=\omega_h\cup\{x_0=0,\ x_N=l\},\quad \omega_h=\{x_i=ih,\ i=\overline{1,N-1},\ hN=l\},$$

$$\bar{\omega}_\tau=\{t_n=n\tau,\ n=0,1,...\}=\omega_\tau\cup\{t_0=0\},$$

дифференциальную задачу (9), (10) аппроксимируем неявной разностной схемой с учетом (8)

$$y_t=\hat{y}_{\bar{x}x}+\lambda y(1-\hat{y}), \tag{13}$$

$$y(x,0)=u_0(x),\quad x\in\omega_h,\quad \hat{y}_0=\hat{\mu}_1,\quad \hat{y}_N=\hat{\mu}_2. \tag{14}$$

В работе используются стандартные обозначения теории разностных схем [4, с. 260]:

$$v=v_i^n=v(x_i,t_n),\quad \hat{v}=v_i^{n+1},\quad v_t=(\hat{v}-v)/\tau,\quad v_{\bar{x}x}=(v_{i+1}^n-2v_i^n+v_{i-1}^n)/h^2.$$

А п р и о р н а я о ц е н к а. Запишем схему (13), (14) в каноническом виде (1), (2)

$$C_i^n y_i^{n+1} = A y_{i-1}^{n+1} + B y_{i+1}^{n+1} + F_i^n,$$
$$y_0^{n+1} = \mu_1^{n+1}, \quad y_N^{n+1} = \mu_2^{n+1},$$

в котором

$$A = B = \gamma, \quad \gamma = \tau / h^2, \quad C_i^n = 1 + 2\gamma + \lambda\tau y_i^n,$$
$$F_i^n = (1+\lambda\tau) y_i^n, \quad D_i^n = 1 + \lambda\tau y_i^n.$$

Относительно входных данных предполагаем выполненными условия (11). Докажем, что и для решения разностной схемы (13), (14) при всех $(x,t) \in \overline{\omega}$ выполнен разностный аналог дифференциального свойства решения непрерывной задачи (12). Следуя методу математической индукции предположим, что

$$0 \le y_i^n \le 1 \text{ для всех } i = 0, 1, ..., N. \tag{15}$$

При таком предположении выполнены все условия леммы и на основании неравенства (5) находим оценку

$$m_1^n \le y_i^{n+1} \le m_2^n, \quad i = 0, 1, ..., N,$$

где

$$m_1^n = \min\left\{ \min\left\{\mu_1^{n+1}, \mu_2^{n+1}\right\}, \ \min_{x\in\omega_h} \frac{(1+\lambda\tau) y_i^n}{1+\lambda\tau y_i^n} \right\} \ge 0,$$
$$m_2^n = \max\left\{ \max\left\{\mu_1^{n+1}, \mu_2^{n+1}\right\}, \ \max_{x\in\omega_h} \frac{(1+\lambda\tau) y_i^n}{1+\lambda\tau y_i^n} \right\} \le \max\left\{1, \ \frac{1+\lambda\tau y_i^n}{1+\lambda\tau y_i^n}\right\} \le 1.$$

Следовательно, оценка (15) выполнена для произвольного $n = 0, 1, \ldots$. На основании данного неравенства заключаем, что

$$\max_{t\in\overline{\omega}_\tau} \|y(t)\|_{\overline{C}} \le 1,$$

где норма $\|.\|_{\overline{C}}$ определяется как обычно

$$\|y(t)\|_{\overline{C}} = \max_{x\in\overline{\omega}_h} |y(x,t)|.$$

Б е з у с л о в н а я м о н о т о н н о с т ь. Разностную схему (13), (14) будем называть безусловно монотонной, если она монотонна при произвольных значениях сеточных шагов. Рассмотрим разностную задачу с возмущенными входными данными

$$\tilde{y}_t = \hat{\tilde{y}}_{\overline{x}x} + \lambda\tilde{y}(1 - \hat{\tilde{y}}), \tag{16}$$
$$\tilde{y}(x,0) = \tilde{u}_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad \hat{\tilde{y}}_0 = \hat{\tilde{\mu}}_1, \quad \hat{\tilde{y}}_N = \hat{\tilde{\mu}}_2. \tag{17}$$

Относительно возмущенных входных данных предполагаем выполненными условия (11) и (6)

$$\tilde{u}_0(x) - u_0(x) \ge 0, \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad \tilde{\mu}_k(t_{n+1}) - \mu_k(t_{n+1}) \ge 0, \quad k = 1, 2, \quad t_{n+1} \in \omega_\tau.$$

Вычитая из уравнений (16), (17) соответствующие уравнения (13), (14), получим задачу для возмущения $\overline{y} = \tilde{y} - y$:

$$\overline{y}_t = \hat{\overline{y}}_{\overline{x}x} + \lambda\overline{y} - \lambda\tilde{y}\hat{\overline{y}} + \lambda\hat{y}\overline{y}, \quad \hat{\overline{y}}_0 = \hat{\overline{\mu}}_1, \quad \hat{\overline{y}}_N = \hat{\overline{\mu}}_2.$$

Определим сеточные функции

$$F = (1+\lambda\tau)\overline{y} - \lambda\tau\hat{y}\overline{y}, \quad D = 1+\lambda\tau\tilde{y} \geq 0.$$

Пусть на n-м временном слое разностное решение является монотонным в смысле (7). Докажем, что оно является монотонным и на (n + 1)-м временном слое. Так как сеточная функция $\hat{y}$ удовлетворяет неравенству $y^{n+1} \leq 1,$ то функция

$$F = (1+\lambda\tau-\lambda\tau\hat{y})\overline{y} \geq \overline{y} \geq 0$$

является неотрицательной. На основании леммы для $\overline{y}^{n+1}$ получаем неравенство

$$\overline{y}^{n+1} \geq \min\left\{\min\left\{\overline{\mu}_1^{n+1}, \overline{\mu}_2^{n+1}\right\}, \min_{x\in\omega_h}\frac{F}{D}\right\} \geq 0.$$

Итак, мы доказали монотонность разностной схемы при произвольных соотношениях на сеточные шаги τ и h.

Г л о б а л ь н а я   у с т о й ч и в о с т ь. Разностную схему (13), (14) назовем глобально устойчивой в равномерной норме, если для любого $0 < t \in \overline{\omega}_\tau$ выполнено неравенство

$$\left\|\tilde{y}(t) - y(t)\right\|_{\overline{C}} \leq \max\left\{\max_{k=1,2}\left\{\tilde{\mu}_k(t) - \mu_k(t)\right\}, \ \left\|\tilde{u}_0 - u_0\right\|_C\right\}. \tag{18}$$

Для доказательства данного утверждения нужно наложить более жесткие условия на входные данные

$$0,5 \leq u_0(x), \quad \mu_k(t) \leq 1, \quad k = 1, 2, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T. \tag{19}$$

Имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а. *Пусть выполнены условия (19). Тогда разностная схема (13), (14) глобально устойчива в равномерной норме и имеет место оценка (18).*

З а м е ч а н и е 1. Полученные выше результаты обобщаются на многомерные квазилинейные уравнения с конвективными слагаемыми

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x,t,u)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{2} r_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - q(x)u(x) + \lambda(1-u)u, \quad x = (x_1, x_2).$$

Вывод основывается на том, что минимальное и максимальное значения решения не зависят как от конвективных коэффициентов $r_\alpha(x_1, x_2)$, так и диффузионных $k_\alpha(x_1, x_2, t, u)$ [5]. Подробному исследованию данного вопроса будет посвящена отдельная работа.

З а м е ч а н и е 2. Среди экономичных разностных схем, которые наследуют асимптотическое свойство устойчивости дифференциального решения, отметим локально-одномерные схемы, предложенные А. А. Самарским [4].

Список использованных источников

1. Колмогоров, А. Н. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме / А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский, Н. С. Пискунов // Бюллетень МГУ. Секция А. – 1937. – Т. 1, № 6. – С. 1–25.

2. Fisher, R. A. The Wave of Advance of Advantageous Genes / R. A. Fisher // Annals of Eugenics. – 1937. – N 7. – P. 355–369. https://doi.org/10.1111/j.1469-1809.1937.tb02153.x

3. Murray, J. D. Mathematical Biology: I. An Introduction, Third Edition / J. D. Murray. – Berlin, 2001. – 551 p.

4. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М., 1983. – 616 с.

5. Matus, P. Analysis of second order difference schemes on non-uniform grids for quasilinear parabolic equations / Piotr Matus, Le Minh Hieu, Lubin G. Vulkov // J. Comput. Appl. Math. – 2017. – Vol. 310. – P. 186–199. https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.04.006

6. Matus, P. Stability and monotonicity of difference schemes for nonlinear scalar conservation laws and multidimensional quasi-linear parabolic equations / P. Matus, S. Lemeshevsky // Comp. Method Appl. Math. – 2009. – Vol. 9, N 3. – P. 253–280. https://doi.org/10.2478/cmam-2009-0016

7. Lemeshevsky, S. Exact finite-difference schemes / S. Lemeshevsky, P. Matus, D. Poliakov. – De Gruyter, 2016. – 233 p. https://doi.org/10.1515/9783110491326

8. Samarskii, A. A. Difference schemes with operator factors / A. A. Samarskii, P. P. Matus, P. N. Vabishchevich. – Dordrecht, 2002. – 384 p. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9874-3

References

1. Kolmogorov A. N., Petrovsky I. G., Piskunov N. S. Study of the diffusion equation with increase in the amount of substance, and its application to a biological problem. *Byulleten' Moskovskogo gosudarstvennogo universiteta. Sektsiya A* [Bulletin of the Moscow State University, Section A], 1937, vol. 1, no. 6, pp. 1–25 (in Russian).

2. Fisher R. A. The wave of advance of advantageous genes. *Annals of Eugenics*, 1937, no. 7, pp. 355–369. https://doi.org/10.1111/j.1469-1809.1937.tb02153.x

3. Murray J. D. *Mathematical Biology: I. An Introduction, Third Edition*. Berlin, 2001. 551 p.

4. Samarskii A. A. *Theory of difference schemes*. Moscow, 1983. 616 p. (in Russian).

5. Matus P., Le Minh Hieu, Vulkov L. G. Analysis of second order difference schemes on non-uniform grids for quasilinear parabolic equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2017, vol. 310, pp. 186–199. https://doi.org/10.1016/j.cam.2016.04.006

6. Matus P., Lemeshevsky S. Stability and monotonicity of difference schemes for nonlinear scalar conservation laws and multidimensional quasi-linear parabolic equations. *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2009, vol. 9, no. 3, pp. 253–280. https://doi.org/10.2478/cmam-2009-0016

7. Lemeshevsky S., Matus P., Poliakov D. *Exact finite-difference schemes*. De Gruyter, 2016. 233 p. https://doi.org/10.1515/9783110491326

8. Samarskii A. A., Matus P. P., Vabishchevich P. N. *Difference schemes with operator factors*. Dordrecht, 2002. 384 p. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9874-3

Информация об авторах

Матус Петр Павлович – член-корреспондент, д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: piotr.p.matus@gmail.com.

Пылак Дорота – адъюнкт. Католический университет им. Иоанна Павла II г. Люблина (Ал. Raclawickie, 14, 20-950, Люблин, Польша). E-mail: dorotab@kul.pl.

Information about the authors

Matus Piotr P. – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: piotr.p.matus@gmail.com.

Pylak Dorota – Assistant Professor. The John Paul II Catholic University of Lublin (8, Al. Raclawickie, 20-950, Lublin, Poland). E-mail: dorotab@kul.pl.