ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 519.63 Поступило в редакцию 30.06.2023
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-1-7-14 Received 30.06.2023

Член-корреспондент П. П. Матус[1], Г. Ф. Громыко[1], Б. Д. Утебаев[2,3]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Нукус, Республика Узбекистан
[3]Институт математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Ташкент, Республика Узбекистан

КОНСЕРВАТИВНЫЕ КОМПАКТНЫЕ И МОНОТОННЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Впервые строятся и исследуются компактные и монотонные разностные схемы 4-го порядка точности, сохраняющие свойство консервативности (дивергентности), для квазилинейного стационарного уравнения реакции–диффузии. Для линеаризации нелинейной разностной схемы используется итерационный метод типа Ньютона–Зейделя, также сохраняющий идею консервативности и монотонности (s + 1)-й итерации. Основная идея реализации предложенной разностной схемы на трехточечном шаблоне методом прогонки основана на возможности распараллеливания вычислительного процесса. Сначала решение находится в четных узлах, а затем в нечетных. При этом все уравнения остаются трехточечными относительно неизвестной функции. Возникающие проблемы нахождения дополнительных граничных условий в приграничных узлах решаются при помощи интерполяционного многочлена Ньютона 4-го порядка точности. Приведенные результаты вычислительного эксперимента иллюстрируют эффективность предложенного алгоритма. Указывается также возможность обобщения данного метода на более сложные задачи.

Ключевые слова: компактная разностная схема, консервативная разностная схема, уравнение реакции–диффузии

Для цитирования. Матус, П. П. Консервативные компактные и монотонные разностные схемы четвертого порядка для квазилинейных уравнений / П. П. Матус, Г. Ф. Громыко, Б. Д. Утебаев // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2024. – Т. 68, № 1. – С. 7–14. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-1-7-14

Corresponding Member Piotr P. Matus[1], Galina Ph. Gromyko[1], Bakhadir D. Utebaev[2,3]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]Karakalpak State University named after Berdakh, Nukus, Republic of Uzbekistan
[3]Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Republic of Uzbekistan

CONSERVATIVE COMPACT AND MONOTONE FOURTH ORDER DIFFERENCE SCHEMES FOR QUASILINEAR EQUATIONS

Abstract. In this work, for the first time, compact and monotone difference schemes of the 4th order of accuracy are constructed and studied, preserving the property of conservation (divergence), for a quasilinear stationary reaction-diffusion equation. To linearize the nonlinear difference scheme, an iterative method of the Newton-Seidel type is used, which also preserves the idea of conservation and monotonicity of the iteration. The main idea of implementing the proposed difference scheme on a three-point stencil of the sweep method is based on the possibility of parallelizing the computational process. First, the solution is at the even nodes, and then at the odd ones. In this case, all equations remain three-point with respect to the unknown function. The arising problems of finding additional boundary conditions at the boundary nodes are solved using the Newton interpolation polynomial of the 4th order of accuracy. The presented results of the computational experiment illustrate the effectiveness of the proposed algorithm. The possibility of generalizing this method to more difficult problems is also indicated.

Keywords: compact finite difference scheme, conservative difference scheme, reaction-diffusion equation

For citation. Matus P. P., Gromyko G. Ph., Utebaev B. D. Conservative compact and monotone fourth order difference schemes for quasilinear equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2024, vol. 68, no. 1, pp. 7–14 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-1-7-14

Введение. Одной из основных задач вычислительной математики является построение и исследование разностных схем повышенного порядка точности, аппроксимирующих уравнения математической физики. Среди таких методов большую популярность получили так называемые компактные разностные схемы, которые записываются на минимальных для данного уравнения шаблонах [1]. Это позволяет без увеличения каких-либо вычислительных затрат существенно увеличить точность разностных схем и тем самым значительно сократить время решения прикладной задачи на ЭВМ. Такие методы до недавнего времени были разработаны для линейных уравнений математической физики как с постоянными, так и переменными коэффициентами. Что касается квазилинейных уравнений, то компактные алгоритмы для уравнения быстрой диффузии и обобщенного уравнения Фишера были предложены в [2; 3]. Компактные разностные схемы для уравнения диффузии с линейным оператором $Lu = (k(x)u')'$ впервые получены в работе А. А. Самарского [4], которые основаны на использовании шаблонного функционала, аппроксимирующего коэффициент $k(x)$ в трех последовательных точках $x_{i-1}, x_{i-1/2}, x_i$. Недостатком данного подхода является невозможность обобщения на случай квазилинейных уравнений с нелинейным оператором $Lu = (k(x, u)u')'$.

В настоящей работе впервые строятся и исследуются компактные и монотонные разностные схемы 4-го порядка точности, сохраняющие свойство консервативности (дивергентности), для квазилинейного стационарного уравнения реакции–диффузии. Следует отметить, что разностная схема должна отражать основные свойства непрерывной среды. Поэтому естественно требовать, чтобы в схеме прежде всего выполнялись разностные аналоги основных законов сохранения, справедливых для исходной непрерывной математической модели. Разностные схемы, обладающие этим свойством, называются консервативными.

На важность требования консервативности схемы обратили внимание в начале 1950-х годов А. Н. Тихонов и А. А. Самарский [5]. Ими был предложен интегро-интерполяционный метод для конструирования консервативных разностных схем и построен пример, когда неконсервативная схема, обеспечивающая второй порядок сходимости в классе достаточно гладких коэффициентов, расходится в классе разрывных коэффициентов [6]. Итак, сохранение свойств консервативности является необходимым условием сходимости разностного решения к точному решению дифференциальной задачи в классе обобщенных решений.

Для линеаризации предложенной в работе разностной схемы используется итерационный метод типа Ньютона–Зейделя, также сохраняющий идею консервативности и монотонности $(s + 1)$-й итерации [7]. Основная идея реализации предложенной разностной схемы на трехточечном шаблоне методом прогонки основана на возможности распараллеливания вычислительного процесса. Сначала решение находится в четных узлах, а затем в нечетных. При этом все разностные уравнения остаются трехточечными относительно неизвестной функции. Возникающие проблемы нахождения дополнительных граничных условий в приграничных узлах решаются при помощи интерполяционного многочлена Ньютона 4-го порядка точности. Приведенные результаты вычислительного эксперимента иллюстрируют эффективность предложенного алгоритма. Указывается также возможность обобщения данного метода на более сложные задачи.

Консервативные схемы для стационарного уравнения с переменными коэффициентами. Рассмотрим дифференциальную задачу для простейшего уравнения реакции–диффузии

$$Lu - q(x)u = -f(x),\ 0 < x < l, \tag{1}$$

$$u(0) = \mu_1,\ u(l) = \mu_2, \tag{2}$$

в которой

$$Lu = (ku')',\ k = k(x),\ 0 < k_1 \le k(x) \le k_2,\ 0 < q_1 \le q(x) \le q_2.$$

Разностная схема четвертого порядка точности на трехточечном шаблоне построена в основополагающей работе А. А. Самарского [4]

$$\Lambda y - qy - \frac{h^2}{12}\Lambda(p(qy)) = -\varphi,\ x \in \omega_h, \tag{3}$$

$$y_0 = \mu_1,\ y_N = \mu_2, \tag{4}$$

где

$$\Lambda y = (ay_{\bar{x}})_x = \frac{1}{h}\left(a_{i+1}\frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i\frac{y_i - y_{i-1}}{h}\right),$$

$$a = 6(p(x-h) + 4p(x-0{,}5h) + p(x))^{-1},\quad p(x) = \frac{1}{k(x)},\quad x \in \omega_h,$$

$$\varphi = f + \frac{h^2}{12}\Lambda(pf).$$

Здесь используются стандартные обозначения теории разностных схем [7; 8]: $\overline{\omega}_h = \{x = x_i,\ i = 0,1,\dots,N,\ hN = l\} = \omega_h \cup \{x_0 = 0,\ x_N = l\}$ – разностная сетка узлов с постоянным шагом h.

Введем скалярное произведение и нормы:

$$(y, v) = \sum_{i=1}^{N-1} y_i v_i h,\quad \|y\| = \sqrt{(y, y)},$$

$$\|y\|_C = \max_{x \in \omega_h}|y(x)|,\quad \|y\|_{\bar{C}} = \max_{x \in \overline{\omega}_h}|y(x)|.$$

Консервативные схемы для квазилинейных уравнений. Рассмотрим дифференциальную задачу (1), (2) с нелинейным эллиптическим оператором

$$Lu = (k(x, u)u')', \tag{5}$$

в которой

$$0 < k_3 \le k(x, u) \le k_4,\ \text{для всех}\ x \in [0, l],\ u \in \mathbb{R}.$$

В этом случае для ее численного решения уже нельзя воспользоваться разностной схемой (3), (4), так как шаблонный функционал a_i будет содержать значение коэффициента $k(x_{i-1/2}, y_{i-1/2})$ в нерасчетной точке $x_{i-1/2} = x_i - 0{,}5h$. Напишем консервативную схему четвертого порядка аппроксимации с использованием только целых узлов

$$\left(ay_{\overset{\circ}{x}}\right)_{\overset{\circ}{x},i} - \left(q_i y_i + \frac{h^2}{3}\left(a(pqy)_{\overset{\circ}{x}}\right)_{\overset{\circ}{x},i}\right) = -\varphi_i,\ \ i = 2, 3, \dots, N-3, N-2, \tag{6}$$

где

$$a_i = 6(p_{i-1} + 4p_i + p_{i+1})^{-1},\ \ p_i = 1/k_i,\ \ 0 < k_3 \le a_i \le k_4,$$

$$\varphi_i = f_i + \frac{h^2}{3}\left(a(pf)_{\overset{\circ}{x}}\right)_{\overset{\circ}{x},i},\ \ y_{\overset{\circ}{x}} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}.$$

Погрешность аппроксимации. Невязка разностной схемы на точном решении имеет вид

$$\psi = \left(au_{\overset{\circ}{x}}\right)_{\overset{\circ}{x},i} - \left(q_i u_i + \frac{h^2}{3}\left(a(pqu)_{\overset{\circ}{x}}\right)_{\overset{\circ}{x},i}\right) + \varphi_i.$$

Л е м м а. *Пусть* $u(x) \in C^6[0, l]$. *Тогда для сеточной функции* ψ *имеет место оценка*

$$\|\psi\|_C \le c_1 h^4,$$

$c_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, *положительные постоянные, не зависящие от* h.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя разложение функции в ряд Тейлора [4, с. 834; 9], находим представление

$$\psi = Lu + \frac{h^2}{3}L(pLu) - qu - \frac{h^2}{3}L(p(qu)) + f + \frac{h^2}{3}L(pf) + O(h^4),$$

или

$$\psi = \frac{h^2}{3}L(p(Lu - qu + f)) + O(h^4) = O(h^4).$$

Монотонность. Запишем разностную схему (6), (4) в каноническом виде

$$A_i y_{i-2} - C_i y_i + B_i y_{i+2} = -F_i,\ i = 2, \ldots, N-2,$$

$$y_0 = \mu_1,\ y_N = \mu_2,$$

в которой

$$A_i = a_{i-1}\left(\frac{1}{4h^2} - \frac{q_{i-2}p_{i-2}}{12}\right),\quad B_i = a_{i+1}\left(\frac{1}{4h^2} - \frac{q_{i+2}p_{i+2}}{12}\right),$$

$$C_i = (a_{i-1} + a_{i+1})\left(\frac{1}{4h^2} - \frac{q_i p_i}{12}\right) + q_i,\quad F_i = \varphi_i.$$

В соответствии с [7] разностная схема (6), (4) будет монотонной, если выполнены условия принципа максимума

$$A_i > 0,\ B_i > 0,\ D_i = C_i - A_i - B_i \ge 0,$$

т. е. при

$$h^2 \le 3k_3 / q_2. \tag{7}$$

С л е д с т в и е [10]. *Пусть выполнено условие (7). Тогда разностное решение* y_i *неотрицательно, и для ее решения имеет место априорная оценка*

$$\|y\|_{\bar{C}} \le \max\left\{\mu_1, \mu_2, \frac{1}{q_1}\|\varphi\|_C\right\}.$$

Реализация схемы. Для реализации схемы (6), (4) будем использовать итерационный процесс, предложенный А. А. Самарским [7],

$$\begin{gathered}\left(\overset{s}{a}\,\overset{s+1}{y}_{\overset{\circ}{x}}\right)_{\overset{\circ}{x},i} - \left(q_i \overset{s+1}{y}_i + \frac{h^2}{3}\left(\overset{s}{a}\left(q\overset{s}{p}\,\overset{s+1}{y}\right)_{\overset{\circ}{x}}\right)_{\overset{\circ}{x},i}\right) = -\overset{s}{\varphi}_i,\quad i = 2, \ldots, N-2,\\ \overset{s}{\varphi}_i = f_i + \frac{h^2}{3}\left(\overset{s}{a}\left(\overset{s}{p}f\right)_{\overset{\circ}{x}}\right)_{\overset{\circ}{x},i}.\end{gathered} \tag{8}$$

Опишем процесс реализации предложенной разностной схемы четвертого порядка аппроксимации. Всегда предполагаем, что N четное. Запишем разностное уравнение (8) в индексной форме только для четных индексов i:

$$\begin{gathered}\overset{s}{a}_{i+1}\frac{\overset{s+1}{y}_{i+2}-\overset{s+1}{y}_{i}}{4h^2}-\overset{s}{a}_{i-1}\frac{\overset{s+1}{y}_{i}-\overset{s+1}{y}_{i-2}}{4h^2}-q_i\overset{s+1}{y}_i-\\-\frac{1}{12}\left(\overset{s}{a}_{i+1}\left(q_{i+2}\overset{s}{p}_{i+2}\overset{s+1}{y}_{i+2}-q_i\overset{s}{p}_i\overset{s+1}{y}_i\right)-\overset{s}{a}_{i-1}\left(q_i\overset{s}{p}_i\overset{s+1}{y}_i-q_{i-2}\overset{s}{p}_{i-2}\overset{s+1}{y}_{i-2}\right)\right)=\\=-\overset{s}{\varphi}_i,\ \ i=2,4,...,N-2,\end{gathered}\tag{9}$$

$$\overset{s+1}{y}_0=\mu_1,\ \ \overset{s+1}{y}_N=\mu_2.\tag{10}$$

Пусть известно решение на s-й итерации. Найдем решение на $(s + 1)$-й итерации, где $s = 0, 1, \ldots$

Система разностных уравнений (9), (10) записывается в каноническом виде формул прогонки по четным узлам

$$\overset{s}{A}_i\overset{s+1}{y}_{i-2}-\overset{s}{C}_i\overset{s+1}{y}_i+\overset{s}{B}_i\overset{s+1}{y}_{i+2}=-\overset{s}{F}_i,\ \ i=2,4,...,N-2,\tag{11}$$

с коэффициентами

$$\begin{gathered}\overset{s}{A}_i=\overset{s}{a}_{i-1}\left(\frac{1}{4h^2}-\frac{q_{i-2}\overset{s}{p}_{i-2}}{12}\right),\ \ \overset{s}{B}_i=\overset{s}{a}_{i+1}\left(\frac{1}{4h^2}-\frac{q_{i+2}\overset{s}{p}_{i+2}}{12}\right),\\ \overset{s}{C}_i=\overset{s}{a}_{i-1}\left(\frac{1}{4h^2}-\frac{q_i\overset{s}{p}_i}{12}\right)+\overset{s}{a}_{i+1}\left(\frac{1}{4h^2}-\frac{q_i\overset{s}{p}_i}{12}\right)+q_i,\ \ \overset{s}{F}_i=\overset{s}{\varphi}_i.\end{gathered}\tag{12}$$

Начальное приближение определяется следующим образом:

$$\overset{0}{y}_i=\begin{cases}\mu_1, & i=0,\\ \eta_i, & i=\overline{1,N-1},\\ \mu_2, & i=N,\end{cases}$$

где η_i – начальное приближение для внутренних узлов.

Для вычисления $\overset{s}{\alpha}_i$, $\overset{s}{\beta}_i$ имеем рекуррентные формулы [7]

$$\overset{s}{\alpha}_{i+2}=\frac{\overset{s}{B}_i}{\overset{s}{C}_i-\overset{s}{\alpha}_i\overset{s}{A}_i},\ \ i=2,4,...,N-2,\ \ \overset{s}{\alpha}_2=0,\tag{13}$$

$$\overset{s}{\beta}_{i+2}=\frac{\overset{s}{A}_i\beta_i}{\overset{s}{C}_i-\overset{s}{\alpha}_i\overset{s}{A}_i},\ \ i=2,4,...,N-2,\ \ \overset{s}{\beta}_2=\mu_1.\tag{14}$$

Решение находим по формуле правой прогонки

$$\overset{s+1}{y}_i=\overset{s}{\alpha}_{i+2}\overset{s+1}{y}_{i+2}+\overset{s}{\beta}_{i+2},\ \ i=N-2,N-4,...,2.\tag{15}$$

Таким образом, находим значение функции $\overset{s+1}{y}_i$ на $(s + 1)$-й итерации для всех четных $i = 0, 2, \ldots, N$ независимо от значений функции $\overset{s+1}{y}_i$ в нечетных узлах $i = 1, 3, \ldots, N - 1$.

Далее, находим значение функции $\overset{s+1}{y}_i$ на $(s + 1)$-й итерации для нечетных $i = 3, 5, \ldots, N - 3$. Перепишем разностное уравнение (8) для нечетных i, т. е.

$$\overset{s}{a}_{i+1}\frac{\overset{s+1}{y}_{i+2}-\overset{s+1}{y}_{i}}{4h^2}-\overset{s}{a}_{i-1}\frac{\overset{s+1}{y}_{i}-\overset{s+1}{y}_{i-2}}{4h^2}-q_i\overset{s+1}{y}_{i}-$$

$$-\frac{1}{12}\left(\overset{s}{a}_{i+1}\left(q_{i+2}\overset{s}{p}_{i+2}\overset{s+1}{y}_{i+2}-q_i\overset{s}{p}_{i}\overset{s+1}{y}_{i}\right)-\overset{s}{a}_{i-1}\left(q_i\overset{s}{p}_{i}\overset{s+1}{y}_{i}-q_{i-2}\overset{s}{p}_{i-2}\overset{s+1}{y}_{i-2}\right)\right)=$$

$$=-\overset{s}{\varphi}_i,\quad i=3,5,...,N-3.$$

Канонический вид и коэффициенты A_i, B_i, C_i, F_i определяются аналогично (11), (12).

Так как значение функции в точках y_1, y_{N-1} неизвестны, то для их нахождения применяем первый и второй интерполяционный многочлен Ньютона соответственно [11], т. е.

$$y_1=y_0+\frac{\Delta y_0}{1!}q+\frac{\Delta^2 y_0}{2!}q(q-1)+\frac{\Delta^3 y_0}{3!}q(q-1)(q-2), \tag{16}$$

$$y_{N-1}=y_N+\frac{\Delta y_{N-2}}{1!}\hat{q}+\frac{\Delta^2 y_{N-4}}{2!}\hat{q}(\hat{q}+1)+\frac{\Delta^3 y_{N-6}}{3!}\hat{q}(\hat{q}+1)(\hat{q}+2), \tag{17}$$

где $q=\dfrac{x_1}{2h}$, $\hat{q}=\dfrac{x_{N-1}-x_N}{2h}$, $\Delta y_i=y_{i+2}-y_i$.

Здесь используется первый и второй интерполяционный многочлен Ньютона четвертого порядка точности.

Преобразуем приграничные значения (16), (17) к виду

$$\overset{s+1}{y}_1=y_1,\quad \overset{s+1}{y}_{N-1}=y_{N-1}.$$

Так как шаблонные функционалы $\overset{s}{a}_{i-1}$, $\overset{s}{a}_{i+1}$, $i=3,5,...,N-3$, содержат четные узлы, то значение в этих узлах определяем из уже найденных значений $\overset{s+1}{y}_i$, $i=2,4,...,N-2$.

Для вычисления $\overset{s}{\alpha}_i$, $\overset{s}{\beta}_i$ воспользуемся рекуррентными формулами (13), (14), где i = 3, 5, …, $N-3$, $\alpha_3=0$, $\beta_3=y_1$. Решение находим по формуле (15), при $i=N-3$, $N-5$, …, 3.

Объединяя найденные значения, получим решение во всех внутренних узлах $\overset{s+1}{y}_i$, $i=\overline{1,N-1}$.

Итерационный процесс заканчивается, если при некотором $s=S$ абсолютная ошибка $\left\|\overset{S+1}{y}-\overset{S}{y}\right\|_C\le\varepsilon$ меньше некоторого заданного числа.

Численные расчеты. В данном разделе приводятся результаты вычислительного эксперимента, полученные при помощи разностной схемы (8), аппроксимирующей краевую задачу (1), (2), (5). Входные данные при

$$k(u)=u^2,\ q(x)=e^{-x}$$

определяются из точного решения

$$u(x)=e^x(x+1)^2$$

при $l=1$.

При расчете по итерационной схеме потребуем выполнения условия

$$\max_{0\le i\le N}\left|\overset{s+1}{y}_i-\overset{s}{y}_i\right|\le\varepsilon=10^{-7},\quad \overset{0}{y}_i=1,\ i=\overline{2,N-2}.$$

Исходя из значений разности $z=y-u$ на двух последовательных сетках с шагами h и $2h$ соответственно, порядок сходимости разностной схемы p вычислялся по формуле [12]

$$p=\log_2\frac{\|z(2h)\|_C}{\|z(h)\|_C},\quad p=\log_2\frac{\|z(2h)\|_{L_2}}{\|z(h)\|_{L_2}}.$$

В таблице отражена скорость сходимости приближенного решения к точному.

Скорость сходимости в нормах C и L_2
Convergence rate in norms C and L_2

h	$\|z\|_C$	p_C	$\|z\|_{L_2}$	p_{L_2}	s-число итераций
h = 1/10	0,00811	–	0,00400	–	26
h = 1/20	0,00037	4,4541	0,00019	4,3309	28
h = 1/40	$1{,}92 \cdot 10^{-5}$	4,2683	$1{,}09 \cdot 10^{-5}$	4,1890	28
h = 1/80	$1{,}26 \cdot 10^{-6}$	3,9281	$6{,}37 \cdot 10^{-7}$	4,0988	29
h = 1/160	$8{,}09 \cdot 10^{-8}$	3,9630	$3{,}84 \cdot 10^{-8}$	4,0541	32
h = 1/320	$5{,}12 \cdot 10^{-9}$	3,9592	$2{,}22 \cdot 10^{-9}$	4,1080	30

З а м е ч а н и е 1. Полученные выше результаты можно обобщить на начально-краевую задачу для уравнения реакции–диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x,u)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - q(x,t)u + f(x,t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \le T.$$

Введем пространственно-временную сетку узлов $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_i, t_n) \in [0, l] \times [0, T]\}$, где

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau,\ 0 \le n \le N_0,\ \tau = T / N_0\}, \quad \bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{0\}.$$

Соответствующая консервативная разностная схема порядка $O(h^4 + \tau^\lambda)$, $\lambda = 1, 2$, имеет следующий вид:

$$y_t = (\hat{a}(\hat{\sigma}\hat{y})_{\overset{\circ}{x}})_{\overset{\circ}{x},i} + (a((1-\sigma)y)_{\overset{\circ}{x}})_{\overset{\circ}{x},i} + \gamma(\hat{\varphi} - \hat{q}_1\hat{y}) + (1-\gamma)(\varphi - q_1 y), \quad i = \overline{2, N-2},$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad y(0,t) = \mu_1(t), \quad y(l,t) = \mu_2(t), \quad t \in \omega_\tau,$$

$$y_t = \frac{\hat{y} - y}{\tau}, \quad \hat{y} = y^{n+1}, \quad a_i = 6(p_{i-1} + 4p_i + p_{i+1})^{-1}, \quad p_i = 1 / k_i,$$

$$q_1 y = qy + \frac{h^2}{3}(a(pqy)_{\overset{\circ}{x}})_{\overset{\circ}{x}}, \quad \varphi = f + \frac{h^2}{3}(a(pf)_{\overset{\circ}{x}})_{\overset{\circ}{x}},$$

$$\begin{cases} \lambda = 1, \ \text{при} \quad \sigma = \gamma - \dfrac{h^2}{3\tau}p, \gamma = 1, \\ \lambda = 2, \ \text{при} \quad \sigma = \gamma - \dfrac{h^2}{3\tau}p, \gamma = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 2. Полученные результаты естественным образом обобщаются также на многомерное уравнение реакции–диффузии. Подробному исследованию данного вопроса будет посвящена отдельная работа.

Список использованных источников

1. Матус, П. П. Компактные разностные схемы на трехточечном шаблоне для гиперболических уравнений второго порядка / П. П. Матус, Хоанг Тхи Киеу Ань // Дифференц. уравнения. – 2021. – Т. 57, № 7. – С. 963–975. https://doi.org/10.31857/s0374064121070098

2. Матус, П. П. Компактные и монотонные разностные схемы для параболических уравнений / П. П. Матус, Б. Д. Утебаев // Математическое моделирование. – 2021. – Т. 33, № 4. – С. 60–78. https://doi.org/10.20948/mm-2021-04-04

3. Матус, П. П. Компактные и монотонные разностные схемы для обобщенного уравнения Фишера / П. П. Матус, Б. Д. Утебаев // Дифференц. уравнения. – 2022. – Т. 58, № 7. – С. 947–961.

4. Самарский, А. А. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности / А. А. Самарский // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1963. – Т. 3, № 5. – С. 812–840.

5. Тихонов, А. Н. О сходимости разностных схем в классе разрывных коэффициентов / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 124, № 3. – С. 1529–1532.

6. Тихонов, А. Н. Об однородных разностных схемах / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1961. – Т. 1, № 1. – С. 5–63.

7. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М., 1983. – 616 с.

8. Samarskii, A. A. Difference schemes with operator factors / A. A. Samarskii, P. P. Matus, P. N. Vabishchevich. – Dordrecht, 2002. – 384 p. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9874-3

9. Самарский, А. А. Разностные методы для эллиптических уравнений / А. А. Самарский, В. Б. Андреев. – М., 1976. – 352 с.

10. Матус, П. П. О согласованных двусторонних оценках решений квазилинейных параболических уравнений и их аппроксимаций / П. П. Матус, Д. Б. Поляков // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53, № 7. – С. 991–1000. https://doi.org/10.1134/s0374064117070123

11. Киреев, В. И. Численные методы в примерах и задачах / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. – М., 2008. – 480 с.

12. Tingchun, Wang. Convergence of an eighth-order compact difference scheme for the nonlinear Schrodinger equation / Wang Tingchun // Advances in Numerical Analysis. – 2012. – Vol. 2012. – Art. 913429. https://doi.org/10.1155/2012/913429

References

1. Matus P. P., Hoang Thi Kieu Anh. Compact difference schemes on a three-point stencil for second-order hyperbolic equations. *Differential Equations*, 2021, vol. 57, no. 7, pp. 934–946. https://doi.org/10.1134/s0012266121070090

2. Matus P. P., Utebaev B. D. Compact and monotone difference schemes for parabolic equations. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2021, vol. 13, pp. 1038–1048. https://doi.org/10.1134/s2070048221060132

3. Matus P. P., Utebaev B. D. Compact and monotone difference schemes for the generalized Fisher equation. *Differential Equations*, 2022, vol. 58, no. 7, pp. 937–951. https://doi.org/10.1134/s0012266122070072

4. Samarskii A. A. Schemes of high-order accuracy for the multi-dimensional heat conduction equation. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1963, vol. 3, no. 5, pp. 1107–1146. https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90104-6

5. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. Convergence of the difference schemes in the class of discontinuous coefficients. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 1959, vol. 124, no. 5, pp. 1529–1532 (in Russian).

6. Tikhonov A. N., Samarskii A. A. Homogeneous difference schemes. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1962, vol. 1, no. 1, pp. 5–67. https://doi.org/10.1016/0041-5553(62)90005-8

7. Samarskii A. A. *Theory of difference schemes*. Moscow, 1983. 616 p. (in Russian).

8. Samarskii A. A., Matus P. P., Vabishchevich P. N. *Difference schemes with operator factors*. Dordrecht, 2002. 384 p. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9874-3

9. Samarskii A. A., Andreev V. B. *Finite difference methods for elliptic equation*. Moscow, 1976. 352 p. (in Russian).

10. Matus P. P., Poliakov D. B. Consistent two-sided estimates for the solutions of quasilinear parabolic equations and their approximations. *Differential Equations*, 2017, vol. 53, no. 7, pp. 964–973. https://doi.org/10.1134/s0012266117070126

11. Kireev V. I., Panteleev A. V. *Numerical methods in examples and problems*. Moscow, 2008. 480 p. (in Russian).

12. Tingchun Wang. Convergence of an eighth-order compact difference scheme for the nonlinear Schrodinger equation. *Advances in Numerical Analysis*, 2012, vol. 2012, art. 913429. https://doi.org/10.1155/2012/913429

Информация об авторах

Матус Петр Павлович – член-корреспондент, д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: piotr.p.matus@gmail.com.

Громыко Галина Феодосьевна – канд. физ.-мат. наук, заведующий отделом. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: grom@im.bas-net.by.

Утебаев Бахадыр Даулетбай улы – канд. физ.-мат. наук, доцент. Каракалпакский государственный университет (ул. Ч. Абдирова, 1, 230112, Нукус, Республика Узбекистан). E-mail: bakhadir1992@gmail.com.

Information about the authors

Matus Piotr P. – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: piotr.p.matus@gmail.com.

Gromyko Galina F. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Head of the Department. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: grom@im.bas-net.by.

Utebaev Bakhadir Dauletbay uli – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor. Karakalpak State University named after Berdakh (1, Ch. Abdirov Str., 230112, Nukus, Republic of Uzbekistan). E-mail: bakhadir1992@gmail.com.