ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)
УДК 514.142
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-1-15-17

Поступило в редакцию 02.10.2023
Received 02.10.2023

Академик В. И. Янчевский

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

ОБ АБЕЛЕВЫХ УНИТАРНЫХ ИНВОЛЮЦИЯХ СКРЕЩЕННЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Аннотация. В теории линейных алгебраических групп классических типов важную роль играют специальные унитарные группы некоммутативных инволютивных скрещенных произведений с делением. Описание строения этих групп в значительной мере зависит от типа инволюции этих произведений. Рассматривается класс абелевых инволюций инволютивных скрещенных произведений и устанавливается критерий их существования при условии наличия в этих произведениях унитарных базисов (относительно этих инволюций).

Ключевые слова: скрещенные произведения, унитарные инволюции, абелевы инволюции, конгруэнц-теорема

Для цитирования. Янчевский, В. И. Об абелевых унитарных инволюциях скрещенных произведений / В. И. Янчевский // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2024. – Т. 68, № 1. – С. 15–17. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-1-15-17

Academician Vyacheslav I. Yanchevskiĭ

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

ON ABELIAN UNITARY INVOLUTIONS OF CROSSED PRODUCTS

Abstract. In the theory of classical linear algebraic groups, of importance are special unitary groups of non-commuted involution crossed products with division. The description of these groups largely depends on the involution type of these products. The class of Abelian involution crossed products is considered and the criterion for their existence is set provided that unitary bases (with respect to these involutions) are present in these products.

Keywords: crossed products, unitary involutions, abelian involutions, congruence theorem

For citation. Yanchevskiĭ V. I. On abelian unitary involutions of crossed products. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2024, vol. 68, no. 1, pp. 15–17 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-1-15-17

Введение. Пусть K – поле. Все рассматриваемые ниже K-алгебры конечномерны и центральны над K. В теории линейных полупростых алгебраических групп важное место занимают унитарные группы $U(D, \tau)$ алгебр с делением D, обладающих унитарными инволюциями τ («унитарными» означает, что ограничение τ на центре K алгебры D не является тождественным): $U(D,\tau)=\{d\in D \mid d^{\tau}d=1\}$. Специальные унитарные группы $SU(D, \tau)$ возникают как подгруппы унитарных групп $U(D, \tau)$, элементы которых имеют приведенные нормы, равные 1. Ясно, что коммутанты $[U(D, \tau), U(D, \tau)]$ – подгруппы групп $SU(D, \tau)$. Во многих случаях эти подгруппы не совпадают [1–3], что приводит к возникновению групп $SUK^{an}(D, \tau) = SU(D, \tau) / [U(D, \tau), U(D, \tau)]$, иногда называемых (по аналогии с изотропным случаем) приведенными унитарными группами Уайтхеда. Ключевую роль при вычислении этих групп играют унитарные инволюции скрещенных произведений специального вида, определение которых таково.

Пусть K – бесконечное поле, L / K – конечное расширение Галуа степени n, G – его группа Галуа и $f: G\times G\to L^*$ – 2-коцикл G со значениями в L^*. Как обычно, через $(L / K, G, f)$ обозначается скрещенное произведение расширения L / K и группы G (т. е. центральная K-алгебра с L-базисом $\{u_s\}_{s\in G}$ таким, что $u_s u_t = u_{st} f(s,t)$, где s, $t \in G$ и $u_s^{-1} l u_s = l^s$ для произвольного $l \in L$). Часто L-базис $\{u_1, \ldots, u_n\}$ называют стандартным [4].

Пусть K – квадратичное сепарабельное расширение поля k и N / k – расширение Галуа. Напомним определение G-инволюций.

О п р е д е л е н и е. Пусть D – скрещенное произведение, $D = (L / K, G, f)$, где $L = N \otimes_k K$. Предположим, что D обладает унитарной инволюцией τ такой, что k – поле τ-инвариантных элементов в K. Такие инволюции будут называться G-инволюциями, если $\tau|_N = \mathrm{id}_N$ (обозначение τ_L). Если группа G циклична, абелева, нильпотентна, разрешима, то τ_L называется, соответственно, циклической, абелевой, нильпотентной, разрешимой.

З а м е ч а н и е. Понятно, что за обозначением τ_L скрывается целый класс инволюций алгебры D, действующих на L так же, как и τ, который мы будем обозначать через $[\tau_L]$.

Основной результат. Среди G-инволюций τ_L обычно выделяется важный подкласс инволюций обладающих стандартным L-базисом $u_1, \ldots, u_n$ таким, что $u_i^{\tau_L} u_i = 1$, который обычно называют унитарным стандартным (или просто унитарным). Изучению случая циклических расширений L / K была посвящена статья [5]. Не все абелевы инволюции $[\tau_L]$ обладают стандартным унитарным базисом [6]. Поэтому естественно возникает вопрос, существует ли среди инволюций множество инволюций с унитарными базисами (хотя бы одна). Основной результат настоящего сообщения описывает критерий существования абелевых инволюций с такими базисами. Предварим его изложение дополнительными определениями и соглашениями.

Пусть K / k – сепарабельное квадратичное расширение бесконечного поля k и $L = L_1 \times \ldots \times L_r$ – прямой композит циклических расширений L_i поля k, линейно разделенный над k, с полем K и с группами Галуа $\langle \sigma_i \rangle$. Положим $M_i = \Pi_{j \neq i}(L_j K)$, $1 \le i \le r$. Пусть также $\hat{\sigma}_i = \sigma_i \otimes_k \mathrm{id}_{M_i}$.

Предположим, что D – некоммутативная K-алгебра с делением и унитарной K / k -инволюцией τ такая, что LK – максимальное подполе в D, а L является полем τ-инвариантных элементов в LK. Тогда D можно представить как скрещенное произведение LK / K с группой, порожденной элементами $\{\Gamma_i\}_{i=1,2,\ldots,r}$, где $\Gamma_i \in C_D(M_i)$ такие, что $i_{\Gamma_i} \in Aut_{M_i}(C_D(M_i))$, причем $i_{\Gamma_i}|_{L_i K} = \hat{\sigma}_i$.

Заметим, что $C_D(M_i)^\tau = C_D(M_i)$ и $L_i M_i = LK$. Нам потребуется следующая

Л е м м а. $\Gamma_i \Gamma_i^\tau \in L$ *(скажем,* $\Gamma_i^\tau = \Gamma_i^{-1} l_i$, $l_i \in L$*),* $1 \le i \le r$, *и для произвольного* τ*-инвариантного элемента* $a \in LK$*:*

$$a(\Gamma_i \Gamma_i^\tau) = (\Gamma_i \Gamma_i^\tau) a.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $L_i = k(x_i) / k$. Тогда $L_i M_i = LK = M_i(x_i)$ и $(\tau|_{C_D(M_i)})\hat{\sigma}_i = \hat{\sigma}_i(\tau|_{C_D(M_i)})$. Поскольку $\Gamma_i^{-1} x_i \Gamma_i = (x_i)^{\hat{\sigma}_i}$ и $x_i^\tau = x_i$, то $(\Gamma_i^{-1} x_i \Gamma_i)^\tau = (\Gamma_i)^\tau (x_i)^\tau (\Gamma_i)^{-\tau} = (x_i)^{\widehat{\sigma_i \tau}} = (x_i)^{\widehat{\tau \sigma_i}} = (x_i)^{\widehat{\sigma_i}}$.

Объединяя последнее с предыдущим, получаем, что $\Gamma_i^{-1} x_i \Gamma_i = \Gamma_i^\tau x_i \Gamma_i^{-\tau}$, что влечет $l_i x_i l_i^{-1} = x_i$. Поскольку x_i – примитивный элемент расширения $L_i M_i / M_i$, которое максимально в $C_D(M_i)$, то $l_i \in L_i M_i = LK$. Но элемент $\Gamma_i \Gamma_i^\tau$ τ-инвариантен, и потому $\Gamma_i \Gamma_i^\tau = l_i \in (LK)_\tau = L$. Далее, для произвольного τ-инвариантного элемента $a \in LK$ ввиду первой части леммы имеем $a l_i = l_i a$, что завершает доказательство леммы.

Следующее утверждение является основным.

Т е о р е м а. *В предыдущих обозначениях пусть* D *– центральная* K*-алгебра с делением такая, как и выше. В частности,* D *обладает инволюцией* $\tau = \tau_{LK}$ $(1 \le i \le r)$. *Тогда в классе* $[\tau_{LK}]$ *существует абелева инволюция* τi_a, $a \in L$, *с унитарным* LK*-базисом в том и только в том случае, когда существуют элементы* $a_1, \ldots, a_r \in LK$ *такие, что выполнены условия*

$$a^{-\hat{\sigma}_i^{-1}} a = l_i^{-1} N_{LK/(LK)_\tau}(a_i{}^{-1}). \tag{*}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду леммы $a l_i = l_i a$. Обозначим через A_i, B_i левую и правую части i-го условия (*) и рассмотрим элемент $(u_i)^{\tau i_a}$. Тогда получим $(u_i)^{\tau_{LK} i_a} u_i = a^{-1}(u_i)^{\tau_{LK}} a u_i = a^{-1}(a_i \Gamma_i)^\tau a a_i \Gamma_i = a^{-1} \Gamma_i^{-1} l_i a_i^\tau a a_i \Gamma_i = \Gamma_i^{-1} A_i B_i^{-1} \Gamma_i$. Теперь уже ясно, что $(u_i)^{\tau_{LK} i_a} u_i = 1$ тогда и только тогда, когда $A_i B_i^{-1} = 1$. В свою очередь, последнее равенство эквивалентно i-му уравнению условий (*). Таким образом, для индексов $1 \le i \le r$ выполнение условий (*) эквивалентно условиям $(u_i)^{\tau_{LK} i_a} u_i = 1$. Для $1 \le j \le r$ положим $u_{\hat{\sigma}_j} = u_j$. Положим далее также для

$\hat{\sigma} = (\hat{\sigma}_1)^{\alpha_1} \dots (\hat{\sigma}_r)^{\alpha_r}$ $u_{\hat{\sigma}} = (u_1)^{\alpha_1} \dots (u_r)^{\alpha_r}$. Прямое вычисление показывает, что система $(u_{\hat{\sigma}})_{\hat{\sigma} \in G_{al}(LK/K)}$ является унитарным стандартным LK-базисом инволюции τi_a. Теорема доказана.

В заключение заметим, что при вычислении групп $SUK_1^{an}(D, \tau)$ в случае гензелевых полей важную роль играет конгруэнц-теорема для групп $SU(D, \tau)$ [4, теорема 3], справедливая, например, в случае, когда так называемая редукция $\overline{\tau}$ является абелевой инволюцией специального вида. Это позволяет надеяться на получение в дальнейшем новых результатов по вычислению групп $SUK_1^{an}(D, \tau)$ в абелевом и других более общих случаях.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект № Ф23-050). Автор признателен А. А. Осиновской за большую помощь, оказанную при наборе статьи.

Acknowledgements. The research is financial supported by the BRFFR (project no. Ф23-050). The author is grateful to A. A. Osinovskaya for the great assistance in typing the article.

Список использованных источников

1. Янчевский, В. И. Приведенные группы Уайтхеда и проблема сопряжённости для специальных унитарных групп анизотропных эрмитовых форм / В. И. Янчевский // Зап. науч. сем. ПОМИ. – 2012. – Т. 400, № 23. – С. 222–245.

2. Sethuraman, B. A. A note on the special unitary group of a division algebra / B. A. Sethuraman, B. Sury // Proc. Amer. Math. Soc. – 2005. – Vol. 134. – P. 351–354. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-05-07985-2

3. Sury, B. On *SU*(1, *D*) / [*U*(1, *D*), *U*(1, *D*)] for a quaternion division algebra *D* / B. Sury // Archiv der Mathematik. – 2008. – Vol. 90. – P. 493–500. https://doi.org/10.1007/s00013-008-2438-x

4. Херстейн, И. Некоммутативные кольца / И. Херстейн. – М., 1972. – 192 с.

5. Янчевский, В. И. Гензелевы алгебры с делением и приведенные унитарные группы Уайтхеда для внешних форм анизотропных алгебраических групп типа A_n / В. И. Янчевский // Математический сб. – 2022. – Т. 213, № 8. – С. 83–148. https://doi.org/10.4213/sm9660

6. Прокопчук, А. В. О нециклических унитарных инволюциях гензелевых дискретно нормированных алгебр с делением / А. В. Прокопчук, В. И. Янчевский // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2014. – № 1. – С. 51–53.

References

1. Yanchevskii V. I. Reduced Whitehead Groups and the Conjugacy Problem for Special Unitary Groups of Anisotropic Hermitian Forms. *Journal of Mathematical Sciences*, 2013, vol. 192, pp. 250–262. https://doi.org/10.1007/s10958-013-1391-9

2. Sethuraman B. A., Sury B. A note on the special unitary group of a division algebra. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2005, vol. 134, pp. 351–354. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-05-07985-2

3. Sury B. On *SU*(1, *D*) / [*U*(1, *D*), *U*(1, *D*)] for a quaternion division algebra *D. Archiv der Mathematik*, 2008, vol. 90, pp. 493–500. https://doi.org/10.1007/s00013-008-2438-x

4. Herstein I. N. *Noncommutative rings*. 1968. 211 p.

5. Yanchevskiĭ V. I. Henselian division algebras and reduced unitary Whitehead groups for outer forms of anisotropic algebraic groups of the type A_n. *Sbornik: Mathematics*, 2022, vol. 213, no. 8, pp. 1096–1156. https://doi.org/10.4213/sm9660e

6. Prokopchuk A. V., Yanchevskii V. I. Non-cyclic unitary involutions of Henselian discretely valued division algebras. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series,* 2014, no. 1, pp. 51–53 (in Russian).

Информация об авторе

Янчевский Вячеслав Иванович – академик, д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий отделом. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220012, Минск, Республика Беларусь). E-mail: yanch@im.bas-net.by.

Information about the author

Yanchevskiĭ Vyacheslav I. – Academician, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yanch@im.bas-net.by.