

ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ
TECHNICAL SCIENCES

УДК 536.2.001
<https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-1-79-88>

Поступило в редакцию 09.06.2023
Received 09.06.2023

В. А. Кот

*Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси,
Минск, Республика Беларусь*

**К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЧКИ ОТРЫВА ЛАМИНАРНОГО
ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ПРИМЕРЕ ТЕЧЕНИЙ ТИПА ХОВАРТА–ТАНИ**

(Представлено членом-корреспондентом Н. В. Павлюкевичем)

Аннотация. Предложен новый подход в расчете ламинарного пограничного слоя в замедленных течениях, основанный на описании профиля скорости полиномом с неопределенной степенью и с введением двух дополнительных, зависящих от координаты, параметров, один из которых задает точку отрыва пограничного слоя от стенки при достижении данным параметром нулевого значения. В работе получен дальнейшее развитие подход, основанный на трех интегральных соотношениях и переводящий задачу к системе из трех обыкновенных дифференциальных уравнений. Проведенный численный анализ на примере течения Ховарта–Тани подтвердил высокую точность определения точки отрыва ламинарного пограничного слоя. Показано, что введение в рассмотрение вполне определенных ограничений для внешней стороны пограничного слоя позволяет найти решения задачи, которые адекватно и достаточно точно описывают распределение скорости потока в пределах пограничного слоя, причем в любой точке вплоть до места его отрыва. Предложенный численно-аналитический метод расчета, основанный на трех интегральных соотношениях и двух дополнительных параметрах с описанием профиля скорости полиномом с неопределенной степенью может быть распространен на другие замедленные течения, омывающие гладкие двумерные поверхности.

Ключевые слова: ламинарный пограничный слой, течение Ховарта, течение Тани, точка отрыва, сингулярность, полиномиальные решения, интегральные методы

Для цитирования. Кот, В. А. К вопросу определения точки отрыва ламинарного пограничного слоя на примере течений типа Ховарта–Тани / В. А. Кот // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2024. – Т. 68, № 1. – С. 79–88. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-1-79-88>

Valery A. Kot

A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

**ON THE PROBLEM OF DETERMINING THE SEPARATION POINT OF THE LAMINAR BOUNDARY
LAYER BY THE EXAMPLE OF THE HOWART–TANI FLOW**

(Communicated by Corresponding Member Nikolai V. Pavlyukevich)

Abstract. A new approach is proposed how to calculate the laminar boundary layer in slow flows. It is based on describing the velocity profile using a polynomial of indefinite degree and on introducing two additional coordinate-dependent parameters, one of which defines the separation of the boundary layer from a wall once this parameter reaches zero. The approach based on three integral relations and reducing the problem to the system of three ordinary differential equations was further developed. A numerical analysis performed for the Howart–Tani flow showed that the separation point of a laminar boundary layer is determined highly exactly using this approach. It was shown that introducing into consideration certain restrictions for the outer surface of a boundary layer allows one to find the problem solutions which would adequately define and fairly exactly determine the flow velocity distribution within this layer, and at any point up to the point of its separation. The proposed numerical-analytical calculation method based on three integral relations and two additional parameters and

involving the definition of the flow velocity profile by a polynomial of indefinite degree can be extended to other slow flows past smooth two-dimensional surfaces.

Keywords: laminar boundary layer, Howart and Tani flows, separation point, singularity, polynomial solutions, integral methods

For citation. Kot V. A. On the problem of determining the separation point of the laminar boundary layer by the example of the Howart–Tani flow. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2024, vol. 68, no. 1, pp. 79–88 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-1-79-88>

Введение. В настоящее время общим методом получения решений для вязких течений является численное решение полных уравнений Навье–Стокса [1]. Однако этот подход отнимает много времени и требует больших вычислительных ресурсов. Во многих задачах необходимо знать, будет ли отрываться пограничный слой (ПС) от поверхности конкретного тела либо нет, а также точное место возможного отрыва. Это важно для многих задач, в частности, при проектировании конструкций аэродинамических профилей либо, например, подводных крыльев, в которых следует избегать отрыва набегающего потока с целью поддержания низкого сопротивления. Определение точки отрыва ламинарного ПС является предметом многих исследований. Обычная процедура расчета состоит в применении численных методов к основному дифференциальному уравнению в частных производных с вычислением полного поля скоростей и определением критической точки отрыва S (рис. 1, *a*). Следует отметить, что данная процедура решения не лишена трудностей, поскольку касательное напряжение на стенке, о чем пойдет речь ниже, сингулярным образом стремится к нулю в точке отрыва.

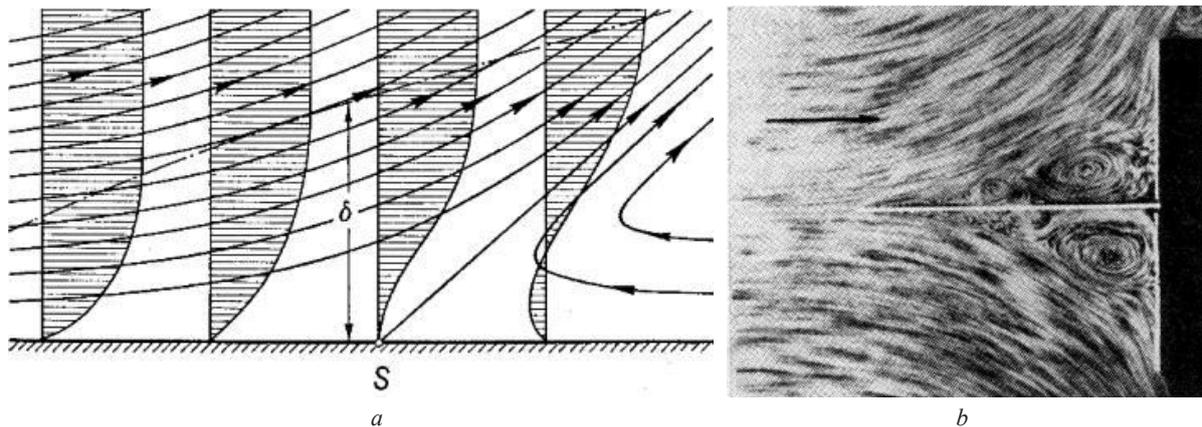


Рис. 1. Схема течения в пограничном слое вблизи точки отрыва S (*a*) и замедленное застойно-точечное течение с отрывом (*b*) [2]

Fig. 1. Diagram of the flow in the boundary layer near the separation point S (*a*) and retarded stagnation-point flow with separation (*b*) [2]

Общий анализ состояния проблемы. Одно из первых описаний решений, связанных с анализом сингулярности в точке отрыва ПС, принадлежит, по всей видимости, Д. Хартри [3], который предпринял попытку повысить точность решения Л. Ховарта [4] в задаче для линейно-запаздывающего потока (течения). Отталкиваясь от работы Д. Хартри [3], подтверждающей наличие сингулярности в точке отрыва ПС, С. Гольдштейн [5] аналитически исследовал природу обнаруженной сингулярности. Сделав некоторые допущения, им разработана формальная асимптотическая модель течений для области, непосредственно примыкающей к точке отрыва. В частности, сделан вывод о том, что касательное напряжение на стенке τ_w стремится в данной точке к нулю, что можно записать в виде обращения в нуль градиента скорости $u(y, x)$ перпендикулярно стенке:

$$\tau_w = 0 \rightarrow v \frac{\partial u(y, x)}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0, \quad (1)$$

где y, x – поперечная и продольная координаты соответственно; v – коэффициент динамической вязкости. При этом касательное напряжение изменяется как квадратный корень от расстояния,

измеренного вверх по течению от точки отрыва. Вопрос о том, устранима ли сингулярность при разделении, достаточно подробно рассмотрен К. Стюартсоном [6], который пришел к выводу, что дозвуковое течение не может оставаться аналитическим вблизи точки отрыва и, следовательно, сингулярность остается неустранимой.

В. Верле [7] представил аналитическую схему определению точки отрыва ПС, которая не требует полного решения основного дифференциального уравнения в частных производных и связана с решением набора обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Данный метод оказался весьма точным для нескольких типов внешних потоков. Аналогичные (примерно с теми же результатами) расчеты по определению точки отрыва проведены в [8]. Упрощенный интегральный подход в совокупности с последующей численной схемой применен авторами [9]. Их метод показал относительно неплохие результаты для ряда классических замедленных течений. А. Санмону [10] рассмотрел особенности решения уравнения ламинарного ПС в точке отрыва, отметив, в частности, работы Л. Ховарта [4], С. Гольдштейна [5], Е. Акинрелере [11], в которых окончательно подтверждено существование сингулярности в несжимаемом пограничном слое при отрыве. Рассмотрено течение при больших числах Рейнольдса вдоль поверхности с быстрым возрастанием скорости в ПС от нуля на поверхности до конечного значения в основном потоке. Обнаружено, что всякий раз, когда происходит отрыв, уравнения ПС становятся несправедливыми, т. е. перестают выполняться.

Течения Ховарта–Тани характеризуются функцией внешнего потока [2]

$$U(x^*) = U_0 - a^*(x^*/L)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

где U_0 и L – характерные скорость и длина; x^* – продольная координата. В безразмерном виде данные течения, как правило, описываются как [2]

$$U/U_0 = 1 - ax^n.$$

Для течения Ховарта имеем $n = 1$. Данный вариант можно интерпретировать как течение в канале, в котором одна часть имеет параллельные стенки (скорость потока U_0), а следующая либо сужается ($a < 0$), либо расширяется ($a > 0$). Если положить $a = 1$, т. е.

$$U/U_0 = 1 - x,$$

то данный вариант можно представить течением вдоль плоской стенки, начинающимся в точке $x = 0$ и встречающим бесконечно протяженную стенку под прямым углом в точке $x = 1$. Это – замедленный застойно-точечный поток с критической точкой $x = 1$ (рис. 1, *b*). Его можно еще интерпретировать как течение на пластине в расширяющемся канале (диффузоре) [2]. Для течений Тани $n = 2, 4, 8$ [12]. Перейдя к новой координате $\sqrt[n]{a}x \rightarrow x$, получаем

$$U/U_0 = 1 - x^n \quad (n = 1, 2, 4, 8) \tag{1}$$

либо в альтернативной форме

$$U/U_0 = 1 - x^{2^k} \quad (k = 0, 1, 2, 3). \tag{2}$$

Целью настоящей работы является представление новой численно-аналитической схемы расчета ПС для потенциальных замедленных течений типа Ховарта–Тани с определением точки отрыва. Данная работа явилась логичным продолжением наших исследований [13] и призвана расширить область применения развиваемых новых подходов при расчете ПС с возможностью практически точного определения точки отрыва.

Постановка задачи и определяющие соотношения. Уравнения Прандтля для двумерного течения в приближении пограничного слоя имеют вид [1; 2]

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + U \frac{dU}{dx} \tag{3}$$

с граничными условиями

$$u(0, x) = 0, \quad v(0, x) = 0, \quad u(\infty, x) = U(x).$$

Для пограничного слоя толщиной $\delta = \delta(x)$ запишем граничные условия:

$$u(0, x) = 0, \quad u(\delta, x) = U(x),$$

$$\frac{\partial u(\delta, x)}{\partial y} = \frac{\partial^2 u(\delta, x)}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u(\delta, x)}{\partial y^3} = \frac{\partial^4 u(\delta, x)}{\partial y^4} = \dots = 0.$$

Проинтегрировав уравнения (3) по области $y = [0, \delta]$ с весом u^m ($m = 0, 1, 2$) получаем интегральные соотношения [14]

$$\begin{aligned} \frac{2}{U^2} \left(\frac{d(U^2 \delta^*)}{dx} + U \frac{dU}{dx} \delta_1 \right) &= \frac{\omega}{\frac{1}{2} \rho U}, & \frac{1}{U^3} \frac{d}{dx} (U^3 \delta_2) &= \frac{2}{\rho U} \delta_1^k, \\ \frac{1}{U^4} \left(\frac{d(U^4 \delta_3)}{dx} - 3U^3 \frac{dU}{dx} \delta_1 \right) &= 6 \frac{\nu}{U^4 \delta^2} \delta_2^k, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \delta^* &= \int_0^1 (1 - \tilde{u}) d\zeta, & \delta_1 &= \int_0^1 (1 - \tilde{u}) \tilde{u} d\zeta, & \delta_2 &= \int_0^1 \tilde{u} (1 - \tilde{u}^2) d\zeta, & \delta_3 &= \int_0^1 \tilde{u} (1 - \tilde{u}^3) d\zeta, \\ \delta_1^k &= \int_0^1 \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \zeta} \right)^2 d\zeta, & \delta_2^k &= \int_0^1 \tilde{u} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \zeta} \right)^2 d\zeta, & \omega &= \left. \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right|_{\zeta=0}, & \tilde{u} &= \frac{u}{U}, & \zeta &= \frac{y}{\delta}. \end{aligned} \quad (5)$$

В общем виде мы можем записать

$$\left(\frac{n+2}{n+1} - H_{\frac{n-1}{n+1}} \right) \Lambda + \frac{M}{n+1} = n \frac{\delta_{n-1}^k}{\delta_{n+1}} \quad (n = 2, 3, \dots),$$

где $\Lambda = U' \delta^2$, $M = U \delta \delta'$, $H_{\frac{n-1}{n+1}} = \delta_{n-1} / \delta_{n+1}$.

Введя в рассмотрение безразмерные параметры

$$\gamma = \gamma(x) = \frac{\delta^2}{\nu} U, \quad \mu = \mu(x) = \frac{U_0}{U} \delta \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right|_{y=0}, \quad (6)$$

вместо (4) получаем определяющие соотношения

$$\begin{aligned} 2\mu &= (2\delta^* + 3\delta_1) \gamma \frac{U'}{U} + \delta_1 \gamma' + 2\gamma \delta_1', & 4\delta_1^k &= 2\gamma \delta_2' + \delta_2 \left(\gamma' + 5\gamma \frac{U'}{U} \right), \\ 12\delta_2^k + 6\gamma \delta^* \frac{U'}{U} &= 2\gamma \delta_3' \mu' + \delta_3 \left(\gamma' + 7\gamma \frac{U'}{U} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

которые далее будут использованы при расчете профиля скорости течений типа Ховарта–Тани с определением точки отрыва x_s .

Опишем искомый профиль скорости в ПС полиномом

$$\tilde{u} = 1 - (1 + a\zeta + b\zeta^2)(1 - \zeta)^{p(n)}, \quad p \geq 4, \quad (8)$$

в котором степень $p = p(n)$ задана в виде некоторой функции от степени n , задающей вид течения (1). Полином (8) автоматически удовлетворяет условиям

$$\tilde{u}(0) = 0, \quad \tilde{u}(1) = 1, \quad \frac{\partial \tilde{u}(1, x)}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \tilde{u}(1, x)}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial^3 \tilde{u}(1, x)}{\partial \zeta^3} = \frac{\partial^4 \tilde{u}(1, x)}{\partial \zeta^4} = \dots = 0. \quad (9)$$

С учетом (9) вместо (8) имеем

$$\tilde{u} = 1 - (1 + (p - \mu)\zeta + b\zeta^2)(1 - \zeta)^{p(n)}. \quad (10)$$

При известной степени p полином (10) содержит три неизвестные величины: μ , γ и b . Подстановка (10) в (5) и (7) дает три дифференциальных уравнения, которые могут быть решены

численно при установленных (для каждого конкретного течения) начальных условиях $\mu(0)$ и $b(0)$ и $\gamma(0) = 0$. Отметим, что условие $\gamma(0) = 0$ вытекает из (6), поскольку по определению $\delta(0) = 0$. Задав в (7) $x = 0$, с учетом $\gamma(0) = 0$, приходим к системе уравнений

$$2\mu(0) = \delta_1(0)\gamma'(0), \quad 4\delta_k^1(0) = \delta_2(0)\gamma'(0), \quad 12\delta_k^2(0) = \gamma'(0)\delta_3(0).$$

Исключив в них $\gamma'(0)$, получаем систему уравнений

$$\mu(0)\delta_2(0) = 2\delta_1(0)\delta_k^1(0), \quad \delta_k^1(0)\delta_3(0) = 3\delta_2(0)\delta_k^2(0), \quad (11)$$

которая позволяет найти $\mu(0)$ и $b(0)$.

Течение Ховарта. Имея три определяющих соотношения (7), введем в рассмотрение такое же число ограничений для внешней стороны ПС:

$$\frac{\partial \tilde{u}(1, x)}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 \tilde{u}(1, x)}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial^3 \tilde{u}(1, x)}{\partial \zeta^3} = 0. \quad (12)$$

Отсюда мы приходим к степени $p = 4$, что дает полином

$$\tilde{u} = 1 - (1 + (4 - \mu)\zeta + b\zeta^2)(1 - \zeta)^4. \quad (13)$$

Подстановка (13) в (5) дает параметры, входящие в соотношения (7):

$$\delta^* = \frac{1}{3} + \frac{b}{105} - \frac{\mu}{30}, \quad (14.1)$$

$$\delta_1 = \frac{1}{90090} [13b(10 + 7\mu) - 14b^2 + 91(100 + 5\mu - 2\mu^2)], \quad (14.2)$$

$$\delta_2 = \frac{1}{77597520} \left[\begin{aligned} &220b^3 - 38b^2(534 + 55\mu) + 38b(3780 + 2921\mu + 198\mu^2) + \\ &+ 323(37\,600 + 1880\mu - 532\mu^2 - 33\mu^3) \end{aligned} \right], \quad (14.3)$$

$$\delta_3 = \frac{1}{6692786100} \left[\begin{aligned} &50b^3(842 + 91\mu) - 364b^4 - 30b^2(74902 + 11815\mu + 780\mu^2) + \\ &+ 230b(56990 + 48093\mu + 4734\mu^2 + 260\mu^3) + \\ &+ 115(11258600 + 562930\mu - 129252\mu^2 - 10813\mu^3 - 572\mu^4) \end{aligned} \right], \quad (14.4)$$

$$\delta_1^k = \frac{1}{693} [2b^2 - 11b(2 + \mu) + 11(100 - 5\mu + 4\mu^2)], \quad (14.5)$$

$$\delta_2^k = \frac{1}{1531530} \left[\begin{aligned} &68b^2(35 + 6\mu) - 48b^3 - 170b(82 + 53\mu + 9\mu^2) + \\ &+ 1105(1000 - 50\mu + 10\mu^2 + 3\mu^3) \end{aligned} \right]. \quad (14.6)$$

Тогда из (7) и (14.1)–(14.6) приходим к системе из трех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\mu(x)$, $\gamma(x)$ и $b(x)$:

$$\begin{aligned} 90090\mu &= \gamma(130 - 28b + 91\mu)b' + \left(4550 + b(65 - 7b) + \frac{91}{2}(5 + b)\mu - 91\mu^2 \right) \gamma' + \\ &+ \frac{\gamma}{(1-x)} \left[21b^2 - \frac{39}{2}b(54 + 7\mu) - 273(160 - \mu(17/2 + \mu)) + 91(1-x)(5 + b - 4\mu)\mu' \right], \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{335920}{3}(1-x) &[8b^2 - 44b(2 + \mu) + 44(100 - \mu(5 - 4\mu))] = [220b^3 + 607240(20 + \mu) - \\ &- 323\mu^2(532 + 33\mu) - 38b^2(534 + 55\mu) + 38b(3780 + \mu(2921 + 198\mu))]((1-x)\gamma' - 5\gamma) + \\ &+ 2\gamma(1-x) [2(330b^2 - 38b(534 + 55\mu) + 19(3780 + \mu(2921 + 198\mu)))b' - \\ &- 19(110b^2 - 2b(2921 + 396\mu) + 17(-1880 + \mu(1064 + 99\mu)))\mu'], \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{17\gamma}{1-x} \left[(4550 + b(65 - 7b)) + \frac{91}{2}(5 + b)\mu - 91\mu^2 \right] - 48b^3 - 68b^2(35 + 6\mu) + \\
& + 170b(82 + \mu(53 + 9\mu)) + 1105[1000 + \mu(-50 + \mu(10 + 3\mu))] = \\
& = \frac{1}{52\,440} \left[364b^4 - 64736950(20 + \mu) - 50b^3(842 + 91\mu) + 115\mu^2(129252 + 11\mu(983 + 52\mu)) + \right. \\
& + 30b^2(74902 + 5\mu(2363 + 156\mu)) - 230b(56990 + \mu(48093 + 4734\mu + 260\mu^2)) \left. \right] \left(\gamma' - 7\frac{\gamma}{1-x} \right) + \quad (17) \\
& + \frac{2\gamma}{26\,220} \left\{ 728b^3 - 75b^2(842 + 91\mu) + 30b(74902 + 5\mu(2363 + 156\mu)) - \right. \\
& - 115(56990 + \mu(48093 + 4734\mu + 260\mu^2))b' - 5\mu'[(5 + b)(1294739 + 5b(91b - 7544)) + \\
& \left. + 12(247733 + 3b(-6049 + 130b))\mu + \frac{69}{2}((520b - 10813)\mu^2 - 26312\mu^3) \right\}.
\end{aligned}$$

Из (13) и (14.1)–(14.6) находим

$$\gamma(0) = 0, \quad \mu(0) = 2,0382, \quad b(0) = 1,5028.$$

Далее посредством численного решения системы уравнений (15)–(17) (вычисления производим в среде Mathematica) определяем искомые параметры $\mu(x)$, $\gamma(x)$ и переменный коэффициент $b(x)$. Как показывают расчеты, решение данной задачи прерывается в точке $x = 0,11976204$, которая отвечает точке сингулярности уравнений (15)–(17), т. е. x_s . Полученное значение $x_s \approx 0,120$ полностью совпадает с известным точным значением $x_s \approx 0,120$ в течении Ховарта [2; 4]. График изменения параметра $\mu(x)$ представлен на рис. 2, а.

Из (13) находим профиль скорости в ПС непосредственно в точке отрыва

$$\tilde{u} = 1 - (1 + 3,9990\zeta + 7,0626\zeta^2)(1 - \zeta)^4. \quad (18)$$

Если ввести переменную Ховарта $\eta = \frac{1}{2}y\sqrt{\frac{U_0}{\nu x}}$, то профиль скорости (18) примет вид

$$\tilde{u} = 1 - (1 + 2,19\eta + 2,1182\eta^2)(1 - 0,54765\eta)^4.$$

Координате x_s соответствует нулевой градиент скорости потока в ПС, и это наглядно отражают построенные на основе (13) профили скорости (рис. 2, б).

Мы можем сделать следующий промежуточный вывод: для описания профиля скорости в ПС для течения Ховарта в области $x = [0, 0,120]$ с точным определением точки отрыва вполне достаточно располагать тремя определяющими соотношениями (7) с заданием трех дополнительных ограничений для внешней стороны ПС вида (12).

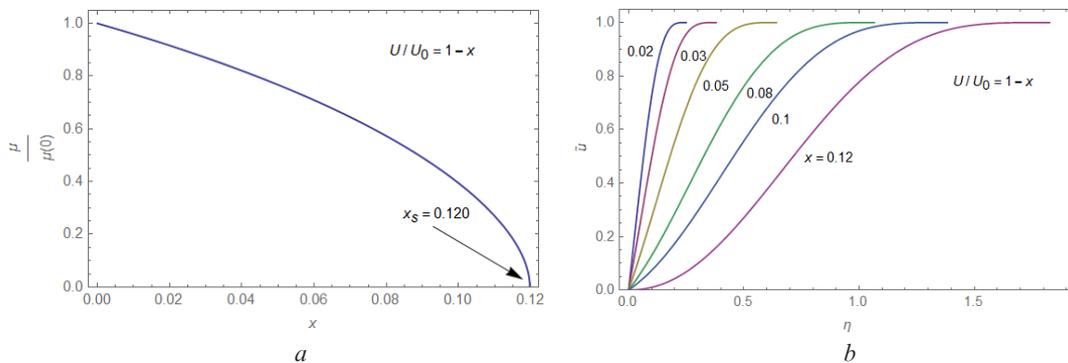


Рис. 2. График изменения параметра $\mu(x)$ (а) и профили относительной скорости $\tilde{u}(\eta)$ в пограничном слое течения Ховарта, а также в точке отрыва (б)

Fig. 2. Graph of change in the parameter $\mu(x)$ (a) and profiles of the relative velocity $\tilde{u}(\eta)$ of the Howard flow in the boundary layer and at the separation point (b)

4. Течение Тани. Как было установлено [13], для полиномиального описания ПС в течениях степенного вида $U/U_0 = x^m$ достаточно задать линейную связь между степенями m и p полинома вида (8). Если обратиться к течениям $U/U_0 = 1 - x^n$ и $U/U_0 = x^m$, то можно обнаружить в них определенную аналогию, которая заключается в наличии степенной функции. Сделаем предположение, что (как в случае $U/U_0 = x^m$) между коэффициентом k и степенью p имеется линейная зависимость, которую можно представить как

$$p \approx 4 + \alpha k, \tag{19}$$

где α – коэффициент пропорциональности, который подлежит определению. Тогда вместо (8) получаем полиномиальный профиль скорости

$$\tilde{u} = 1 - (1 + (4 + \alpha k - \mu)\zeta + b\zeta^2)(1 - \zeta)^{4 + \alpha k}. \tag{20}$$

Вначале обратимся к рассмотрению течения

$$U/U_0 = 1 - x^2 \quad (n = 2, k = 1).$$

Точное значение точки отрыва для него известно: $x_s^* = 0,271$ [2]. Зададим для начала $\alpha = 1$, что дает $p = 5$. В этом случае на искомое решение автоматически накладывается новое ограничение $\partial^4 \tilde{u}(1, x) / \partial \zeta^4 = 0$. Расчеты, проведенные аналогично вышерассмотренным (течение Ховарта), дают $x_s = 0,2731$ с относительной ошибкой 0,76 %.

Снизив приращение степени p на 1/4, т. е. положив $\alpha = 3/4$, из (20) имеем $p = 19/4$. Такой степени соответствует профиль скорости

$$\tilde{u} = 1 - \left[1 + \left(\frac{19}{4} - \mu \right) \zeta + b\zeta^2 \right] (1 - \zeta)^{\frac{19}{4}}. \tag{21}$$

Определим из (5), (11) и (21) начальные условия

$$\mu(0) = 2,18534, \quad b(0) = 3,173712.$$

Решив систему дифференциальных уравнений (7) для профиля (21), находим параметры $\mu(x)$, $\gamma(x)$ и коэффициент $b(x)$. Численное решение данной системы прерывается при значении координаты $x = 0,2709052$. Ей соответствует точка отрыва $x_s \approx 0,271$, которая совпадает с точным значением $x_s^* = 0,271$. График изменения параметра $\mu(x)$ представлен на рис. 3, а. Из (21) для $x = x_s$ находим

$$\tilde{u} = 1 - (1 + 4,75\zeta + 12,2617\zeta^2)(1 - \zeta)^{\frac{19}{4}}. \tag{22}$$

Для независимой переменной η решение (22) принимает вид

$$\tilde{u} = 1 - (1 + 1,09212\eta + 0,64819\eta^2)(1 - 0,22992\eta)^{\frac{19}{4}}.$$

Графики профилей скорости в ПС для рассматриваемого течения приведены на рис. 3, б.

Если исходить из предположения существования условно линейной связи между k и p , выраженной соотношением (19), то мы приходим к значению $\alpha = 3/4$, что дает

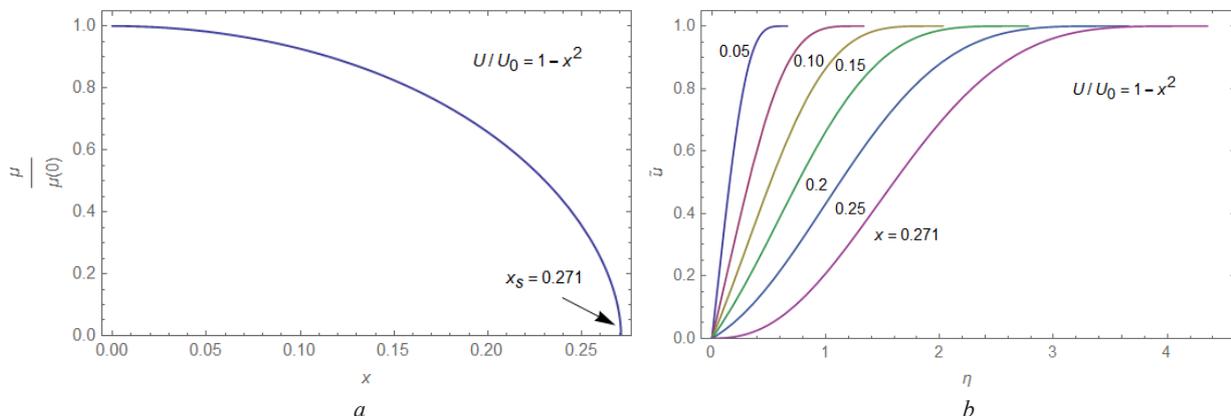


Рис. 3. График изменения параметра $\mu(x)$ (а) и профили относительной скорости $\tilde{u}(\eta)$ в пограничном слое и в точке отрыва (б): течение Тани

Fig. 3. Graph of change in the parameter $\mu(x)$ (a) and profiles of the relative velocity $\tilde{u}(\eta)$ of the Tani flow in the boundary layer and at the separation point (b)

$$\tilde{u} = 1 - \left[1 + \left(\frac{16 + 3k}{4} - \mu \right) \zeta + b \zeta^2 \right] (1 - \zeta)^{4 + \frac{3}{4}k}, \quad k = 0, 1, 2, 3. \quad (23)$$

Проверим, насколько подходит профиль (23) для оставшихся двух течений Тани:

$$U/U_0 = 1 - x^4 \leftrightarrow \{n = 4, k = 2\}: \tilde{u} = 1 - \left[1 + \left(\frac{11}{2} - \mu \right) \zeta + b \zeta^2 \right] (1 - \zeta)^{\frac{11}{2}}, \quad (24)$$

$$U/U_0 = 1 - x^8 \leftrightarrow \{n = 8, k = 3\}: \tilde{u} = 1 - \left[1 + \left(\frac{25}{4} - \mu \right) \zeta + b \zeta^2 \right] (1 - \zeta)^{\frac{25}{4}}. \quad (25)$$

Запишем найденные из (11) начальные условия:

$$U/U_0 = 1 - x^4: \{ \mu(0) = 2,3382, \quad b(0) = 5,2745, \quad \gamma(0) = 0 \},$$

$$U/U_0 = 1 - x^8: \{ \mu(0) = 2,4951, \quad b(0) = 7,8091, \quad \gamma(0) = 0 \}.$$

Решение уравнений (7) для профилей (24) и (25) дает точки отрыва

$$U/U_0 = 1 - x^4 \rightarrow x_s = 0,462, \quad (26)$$

$$U/U_0 = 1 - x^8 \rightarrow x_s = 0,6407.$$

Для течения $\tilde{u} = 1 - x^4$ найденная точка отрыва $x_s = 0,462$ полностью совпадает с точным значением $x_s^* = 0,462$ [2]. Для течения $\tilde{u} = 1 - x^8$ точка отрыва определена с очень высокой точностью при ошибке 0,11 %. Графики изменения параметра $\mu(x)$ представлены на рис. 4, а. Для точек $x_s = 0,462$ и $x_s = 0,6407$ имеем, согласно (24) и (25), профили

$$U/U_0 = 1 - x^4 \rightarrow \tilde{u} = 1 - (1 + 0,71714\eta + 0,27123\eta^2)(1 - 0,1312\eta)^{\frac{11}{2}},$$

$$U/U_0 = 1 - x^8 \rightarrow \tilde{u} = 1 - (1 + 0,5723\eta + 0,1508\eta^2)(1 - 0,091855\eta)^{\frac{25}{4}}.$$

Графики данных профилей приведены на рис. 4, б.

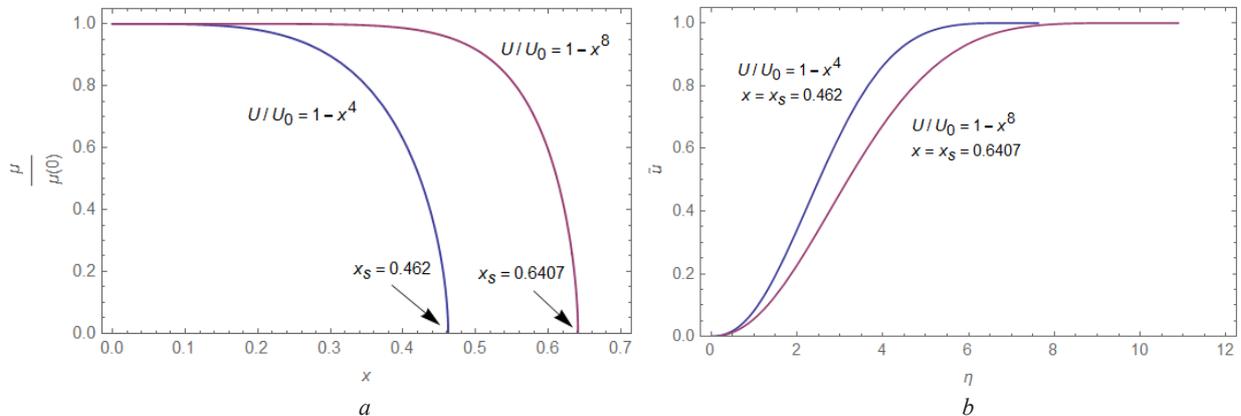


Рис. 4. Графики изменения параметра $\mu(x)$ (а) и профили относительной скорости $\tilde{u}(\eta)$ в пограничном слое в точках отрыва: течение Тани $\tilde{u} = 1 - x^4$ (а) и $\tilde{u} = 1 - x^8$ (б)

Fig. 4. Graph of change in the parameter $\mu(x)$ (a) and profiles of the relative velocity $\tilde{u}(\eta)$ of the Tani flow at the separation points $\tilde{u} = 1 - x^4$ (a) and $\tilde{u} = 1 - x^8$ (b)

5. Обобщение полученных результатов. Основываясь на результатах представленных выше данных для ПС в течениях Ховарта–Тани с их описанием в виде полинома (8), построим интерполяционную зависимость $x_s = f(n)$ (рис. 5, а). Данная кривая полностью сливается с аналогичной кривой, которая может быть построена исходя из известных точных значений x_s^* . Можно констатировать успешность нашего предположения (гипотезы), выраженного формулой (19) и отражающего приближенно линейную связь между степенью k , задающей течение типа Ховарта–Тани, посредством соотношения (2), и степенью p , входящей в полиномиальное описание

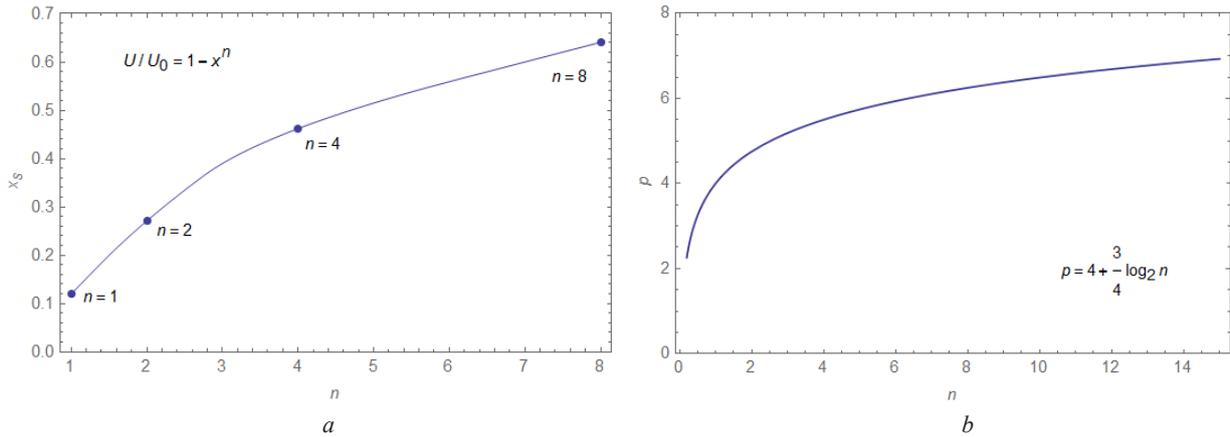


Рис. 5. Интерполяционная зависимость $x_s = f(n)$ (a) и график функции $p(n)$, описываемый формулой (26) (b)

Fig. 5. Interpolation dependence $x_s = f(n)$ (a) and graph of the function $p(n)$ defined by formula (26) (b)

ПС в виде полинома (8). Если обратиться к исходной форме представления внешнего потока (1), то тогда приходим к формуле

$$p = 4 + \frac{3}{4} \log_2 n. \tag{27}$$

Графическая зависимость функции (27) представлена на рис. 5, b.

В итоге мы приходим к следующей записи профиля скорости в ПС в замедленных течениях типа Ховарта–Тани:

$$\tilde{u} = 1 - \left[1 + \left(4 - \mu(x) + \frac{3}{4} \log_2 n \right) \zeta + b(x) \zeta^2 \right] (1 - \zeta)^{4 + \frac{3}{4} \log_2 n} \quad (n > 0). \tag{28}$$

Сравнительные данные для точки отрыва x_s представлены в таблице. Расчет на основе предложенного метода, основанного на описании профиля скорости полиномом (28) с применением трех определяющих соотношений (7), дает несравнимо более точные результаты по сравнению с известными решениями.

Точка отрыва ламинарного пограничного слоя в течениях Ховарта–Тани

Separation point of the laminar boundary layer in the Howard–Tani flows

Течение Ховарта и Тани Howard and Tani flows	Точное значение точки отрыва Exact break point value	Известные решения Known solutions				Настоящая работа
		Байё [9]	Дрела [14]	Твайтс [2]	Верле [7]	
$1 - x$	0,120	0,133	0,123	0,123	0,124	0,120
$1 - x^2$	0,271	0,285	0,257	0,268	0,275	0,271
$1 - x^4$	0,462	0,468	0,442	0,449	0,464	0,462
$1 - x^8$	0,640	0,638	0,618	0,621	0,642	0,6407
Средняя ошибка		6,85 %	2,69 %	2,37 %	1,38 %	0,027 %

Заключение. Предложен новый подход в расчете ламинарного ПС в замедленных течениях, основанный на описании профиля скорости полиномом

$$\tilde{u} = 1 - (1 + (p - \mu) \zeta + b \zeta^2) (1 - \zeta)^{p(n)}$$

при параметре $\mu(x) = \frac{U_0}{U} \delta \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial y} \right|_{y=0}$, определяющем точку отрыва ПС x_s , для которой $\mu(x_s) = 0$.

Установлено, что применение трех специальных интегральных соотношений с введением параметра $\gamma(x) = \frac{\delta^2}{v} U$ с дополнительным коэффициентом $b(x)$ дает три обыкновенные дифференциальные уравнения. Их решение с заданием определенных ограничений для внешней стороны ПС, определяемых степенью $p(n)$, дает решения, адекватно и достаточно точно описывающие потенциальные течения с определением профиля скорости для каждой точки течения вплоть до места отрыва и положения самой этой точки. Показано, что в течениях типа Ховарта–Тани

$U / U_0 = 1 - x^n$ ($n > 0$) установленная функциональная связь вида $p = 4 + \frac{3}{4} \log_2 n$ обеспечивает условно точный расчет точки отрыва. Рассмотренный в работе метод расчета, основанный на трех интегральных соотношениях (7), параметрах $\mu(x)$ и $\gamma(x)$, с описанием профиля скорости полиномом (10), по всей видимости, может быть распространен также и на другие замедленные течения, обтекающие гладкие двумерные поверхности.

Список использованных источников

1. Wendt, J. F. *Computational Fluid Dynamics. An Introduction* / J. F. Wendt. – Berlin, 2009. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-85056-4>
2. Schlichting, H. *Boundary layer theory* / H. Schlichting, K. Gersten. – Berlin, 2000. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-85829-1>
3. Hartree, D. R. *A Solution of the Laminar Boundary-Layer Equation for Retarded Flow* / D. R. Hartree. – British Aeronautical Research Council, 1939.
4. Howart, L. On the solution of the laminar boundary layer equations / L. Howart // *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. – 1938. – Vol. 164, N 919. – P. 547–579. <https://doi.org/10.1098/rspa.1938.0037>
5. Goldstein, S. On laminar boundary-layer flow near a position of separation / S. Goldstein // *J. Mech. and Appl. Math.* – 1948. – Vol. 1, N 1. – P. 43–69. <https://doi.org/10.1093/qjmam/1.1.43>
6. Stewartson, K. Is the Singularity at Separation Removable? / K. Stewartson // *J. Fluid Mech.* – 1970. – Vol. 44, N 2. – P. 347. <https://doi.org/10.1017/s0022112070001866>
7. Wehrle, V. A. Determination of the Separation Point in Laminar Boundary-Layer Flows / V. A. Wehrle // *AIAA Journal*. – 1986. – Vol. 24, N 10. – P. 1636–1641. <https://doi.org/10.2514/3.9494>
8. Dumitrescu, H. Computation of Separating Laminar Boundary-layer Flows / H. Dumitrescu, V. Cardo, N. Alexandrescu // *Proceedings of the Romanian Academy*. – 2003. Ser. A. – Vol. 3, N 3. – P. 151–156.
9. Bayeux, C. Theory and Validation of a 2D Finite-Volume Integral Boundary Layer Method for Icing Applications / C. Bayeux, E. Radenac, P. Villedieu // *AIAA Journal*. – 2019. – Vol. 57, N 10. <https://doi.org/10.2514/1.j057461>
10. Sunmonu, A. Development and Separation of Forced Convective Flow / A. Sunmonu // *Nonlinear Analysis and Differential Equations*. – 2016. – Vol. 4, N 16. – P. 751–778. <https://doi.org/10.12988/nade.2016.6869>
11. Akinrelere, E. A. Forced convection near Laminar Separation / E. A. Akinrelere // *Aeronautical Quarterly*. – 1981. – Vol. 32, N 3. – P. 212–227. <https://doi.org/10.1017/s000192590000915x>
12. Tani, I. On the solution of the laminar boundary layer equations / I. Tani // *Journal of the Physical Society of Japan*. – 1949. – Vol. 4, N 3. – P. 149–154. <https://doi.org/10.1143/jpsj.4.149>
13. Кот, В. А. Новые аспекты в теории ламинарного пограничного слоя / В. А. Кот // *Материалы XVI Минского междунар. форума по тепломассообмену*. – Минск, 2022. – С. 140–145.
14. Giles, M. B. Two-dimensional transonic aerodynamics design method / M. B. Giles, M. Drela // *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*. – 1987. – Vol. 25, N 9. – P. 1199–1206. <https://doi.org/10.2514/3.9768>

References

1. Wendt J. F. *Computational Fluid Dynamics. An Introduction*. Berlin, 2009. <https://doi.org/10.1007/978-3-540-85056-4>
2. Schlichting H., Gersten K. *Boundary layer theory*. Berlin, 2000. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-85829-1>
3. Hartree D. R. *A Solution of the Laminar Boundary-Layer Equation for Retarded Flow*. British Aeronautical Research Council, 1939.
4. Howart L. On the solution of the laminar boundary layer equations. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 1938, vol. 164, no. 919, pp. 547–579. <https://doi.org/10.1098/rspa.1938.0037>
5. Goldstein S. On laminar boundary-layer flow near a position of separation. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 1948, vol. 1, no. 1, pp. 43–69. <https://doi.org/10.1093/qjmam/1.1.43>
6. Stewartson K. Is the Singularity at Separation Removable? *Journal of Fluid Mechanics*, 1970, vol. 44, no. 2, pp. 347. <https://doi.org/10.1017/s0022112070001866>
7. Wehrle V. A. Determination of the Separation Point in Laminar Boundary-Layer Flows. *AIAA Journal*, 1986, vol. 24, no. 10, pp. 1636–1641. <https://doi.org/10.2514/3.9494>
8. Dumitrescu H., Cardo V., Alexandrescu N. Computation of Separating Laminar Boundary-layer Flows. *Proceedings of the Romanian Academy, Seria A.*, 2003, vol. 3, no. 3, pp. 151–156.
9. Bayeux C., Radenac E., Villedieu P. Theory and Validation of a 2D Finite-Volume Integral Boundary Layer Method for Icing Applications. *AIAA Journal*, 2019, vol. 57, no. 10. <https://doi.org/10.2514/1.j057461>
10. Sunmonu A. Development and Separation of Forced Convective Flow. *Nonlinear Analysis and Differential Equations*, 2016, vol. 4, no. 16, pp. 751–778. <https://doi.org/10.12988/nade.2016.6869>
11. Akinrelere E. A. Forced convection near Laminar Separation. *Aeronautical Quarterly*, 1981, vol. 32, no. 3, pp. 212–227. <https://doi.org/10.1017/s000192590000915x>
12. Tani I. On the solution of the laminar boundary layer equations. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1949, vol. 4, no. 3, pp. 149–154. <https://doi.org/10.1143/jpsj.4.149>
13. Kot V. A. New aspects in the theory of laminar boundary layer. *Materialy XVI Minskogo mezhdunarodnogo foruma po teplomassoobmenu* [Materials of the XVI Minsk International Forum on Heat and Mass Transfer]. Minsk, 2022, pp. 140–145 (in Russian).
14. Giles M. B., Drela M. Two-dimensional transonic aerodynamics design method. *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, 1987, vol. 25, no. 9, pp. 1199–1206. <https://doi.org/10.2514/3.9768>

Информация об авторе

Кот Валерий Андреевич – канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник. Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова НАН Беларуси (ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: valery.kot@hmti.ac.by.

Information about the author

Kot Valery A. – Ph. D. (Engineering), Senior Researcher. A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus (15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: valery.kot@hmti.ac.by.