ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.5
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-2-95-104

Поступило в редакцию 25.09.2023
Received 25.09.2023

П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, Гродно, Республика Беларусь

О ПРИБЛИЖЕНИЯХ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА НА ОТРЕЗКЕ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ИНТЕГРАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ФУРЬЕ–ЧЕБЫШЁВА

(Представлено членом-корресопондентом В. В. Гороховиком)

Аннотация. Исследуются рациональные аппроксимации на отрезке [–1, 1] сингулярных интегралов вида $\hat{f}(x)=\int\limits_{-1}^{+1}\frac{f(t)}{t-x}\sqrt{1-t^2}\,dt,\ x\in[-1,1],$ интегральными операторами, в некотором смысле связанными между собой. Первый из них – рациональный интегральный оператор Фурье–Чебышёва, ассоциированный с системой рациональных функций Чебышёва–Маркова. Он является естественным обобщением частичных сумм полиномиального ряда Фурье–Чебышёва. Второй оператор является образом первого при преобразовании исследуемым сингулярным интегралом. Для каждого из операторов установлено интегральное представление приближений. Изучаются аппроксимации на отрезке [–1, 1] сингулярного интеграла с плотностью, имеющей степенную особенность. Для каждого из операторов рассматривается случай произвольного фиксированного количества геометрически различных полюсов и случай, когда полюсы представляют собой некоторые модификации «ньюменовских» параметров. Установлено, что классы изучаемых сингулярных интегралов отражают особенности рациональной аппроксимации рассматриваемыми интегральными операторами в том смысле, что при специальном выборе параметров аппроксимирующих функций порядки их приближений оказываются выше соответствующих полиномиальных аналогов.

Ключевые слова: сингулярный интеграл, рациональный интегральный оператор Фурье–Чебышёва, равномерная сходимость, асимптотические оценки, точные константы, «ньюменовские» параметры

Для цитирования. Поцейко, П. Г. О приближениях одного сингулярного интеграла на отрезке рациональными интегральными операторами Фурье–Чебышёва / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2024. – Т. 68, № 2. – С. 95–104. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-2-95-104

Pavel G. Potsejko, Evgenii A. Rovba

Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Republic of Belarus

ON APPROXIMATIONS OF A SINGULAR INTEGRAL ON A SEGMENT BY FOURIER–CHEBYSHEV'S RATIONAL INTEGRAL OPERATORS

(Communicated by Corresponding Member Valentin V. Gorokhovik)

Abstract. Rational approximations on a segment [–1, 1] of singular integrals of the form $\hat{f}(x)=\int\limits_{-1}^{+1}\frac{f(t)}{t-x}\sqrt{1-t^2}\,dt,\ x\in[-1,1],$ by integral operators, in a sense related to each other are studied. The first of them is Fourier–Chebyshev's rational integral operator associated with the system of Chebyshev–Markov's rational functions. It is a natural generalization of partial sums of Fourier–Chebyshev's polynomial series. The second operator is the image of the first one when transformed by a singular integral under study. An integral representation of approximations is established for each of the operators. Approximations on the segment [–1, 1] of a singular integral with a density having a power-law singularity are studied. For each of the operators, we consider the case of an arbitrary fixed number of geometrically different poles and the case when the poles represent some modifications of the "Newman" parameters. It is established that the classes of the studied singular integrals reflect the rational approximation features by the considered integral operators in the sense that with a special choice of parameters of approximating functions, the orders of their approximations turn out to be higher than the corresponding polynomial analogues.

Keywords: singular integral, rational Fourier–Chebyshev integral operator, uniform convergence, asymptotic estimates, exact constants, "Newman" parameters

For citation. Potsejko P. G., Rovba E. A. On approximations of a singular integral on a segment by Fourier–Chebyshev's rational integral operators. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2024, vol. 68, no. 2, pp. 95–104 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-2-95-104

Введение. При решении различных задач математики и ее приложений встречаются сингулярные интегралы с ядром типа Коши следующего вида:

$$\hat{f}(x) = \int_{-1}^{+1} \frac{f(t)}{t-x}\sqrt{1-t^2}\,dt, \quad x \in [-1, 1], \tag{1}$$

понимаемые в смысле главного значения по Коши. Для существования последних достаточно, чтобы плотность $f(t)$ удовлетворяла условию Липшица любого порядка [1; 2]. Хорошо известно, что точное значение таких интегралов, т. е. в замкнутой форме, удается получить лишь в очень редких частных случаях. Поэтому важное значение имеет разработка приближенных методов.

Способы получения значений сингулярных интегралов вида (1) при помощи методов численного анализа к настоящему времени хорошо известны [3–8].

В 1993 г. В. Н. Русак [9] предложил способ рациональной аппроксимации сингулярных интегралов вида (1), когда плотность $f(t)$ принадлежит различным классам функций на отрезке. Эти исследования были продолжены в работах его учеников [10] и их совместных работах [11]. В. П. Моторный [12] исследовал поточечные приближения алгебраическими многочленами классов функций, которые задаются сингулярными интегралами вида (1), и получил асимптотически точные оценки приближений. Вместе с тем для аппроксимации сингулярных интегралов вида (1) не использовались классические методы, основанные на рядах Фурье.

В 1979 г. Е. А. Ровба [13] ввел интегральный оператор на отрезке на основании системы рациональных функций Чебышёва–Маркова, который является обобщением частичных сумм полиномиальных рядов Фурье–Чебышёва. Пусть задано произвольное множество чисел $\{a_k\}_{k=1}^{n}$, где a_k либо являются действительными и $|a_k| < 1$, либо попарно комплексно-сопряженными. На множестве суммируемых на отрезке [–1, 1] с весом $(1-x^2)^{-1/2}$ функций $f(t)$ рассмотрим рациональный интегральный оператор [13]

$$s_n(f, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\cos v)\frac{\sin\lambda_n(v, u)}{\sin\frac{v-u}{2}}dv, \quad x = \cos u, \tag{2}$$

где

$$\lambda_n(v, u) = \int_u^v \left(\frac{1}{2} + \lambda_n(y)\right)dy, \quad \lambda_n(y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-|z_k|^2}{1+2|z_k|\cos(y-\arg z_k)+|z_k|^2},$$
$$z_k = \frac{a_k}{1+\sqrt{1-a_k^2}}, \quad |z_k| < 1. \tag{3}$$

Оператор $s_n : f \to \mathbb{R}_n(A)$, где $\mathbb{R}_n(A)$ – множество рациональных функций вида

$$\frac{p_n(x)}{\prod_{k=1}^{n}(1+a_k x)}, \quad p_n \in \mathbb{P}_n;$$

A – множество параметров $(a_1, \ldots, a_n)$ и $s_n(1, \cdot) \equiv 1$. В частности, если положить $a_k = 0$, $k = 1, 2, .., n$, то $s_n(f, x)$ представляет собой частичную сумму полиномиального ряда Фурье–Чебышёва.

Рациональные интегральные операторы (2) нашли широкое применение в рациональной аппроксимации [14; 15]. Представляет интерес изучить приближения сингулярных интегралов вида (1) рациональным интегральным оператором Фурье–Чебышёва (2).

Вместе с тем на основании рационального интегрального оператора Фурье–Чебышёва (2) введем в рассмотрение оператор

$$\hat{s}_{n+1}(f,x)=\int_{-1}^{1}\frac{s_n(f,t)}{t-x}\sqrt{1-t^2}\,dt,\quad x\in(-1,1),\tag{4}$$

где $s_n(\cdot,\cdot)$ – рациональный интегральный оператор Фурье–Чебышёва (2).

Известно [9], что $\hat{s}_{n+}(f,x)$ представляет собой рациональную функцию порядка не выше $n+1$ с теми же полюсами.

В работе изучаются рациональные аппроксимации сингулярных интегралов на отрезке [–1, 1] вида (1) по обоим из вышеназванных направлений. Отдельной задачей, решаемой в настоящей работе, является исследование приближений индивидуальных сингулярных интегралов вида (1) в случае, когда их плотность имеет степенную особенность. Рассматриваются случаи, когда аппроксимирующая рациональная функция имеет произвольное фиксированное количество геометрически различных полюсов, и когда ее полюсы являются в некотором смысле модификацией «ньюменовских» параметров.

1. Интегральные представления приближений. Введем следующие обозначения:

$$\varepsilon_n(\hat{f},x,A)=\hat{f}(x)-s_n(\hat{f},x),\ x\in[-1,1],$$

$$\varepsilon_n(\hat{f},A)=\left\|\hat{f}(x)-s_n(\hat{f},x)\right\|_{C[-1,1]},\ n\in\mathbb{N}.$$

Справедлива

Т е о р е м а 1. *Для приближений сингулярного интеграла вида (1) рациональным интегральным оператором Фурье–Чебышёва (2) имеет место интегральное представление*

$$\varepsilon_n(\hat{f},x,A)=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}f(\cos\tau)\sin\tau\frac{\cos\lambda_n(\tau,u)}{\sin\frac{\tau-u}{2}}d\tau,\ x=\cos u,\ x\in[-1,1],\ n\in\mathbb{N},\tag{5}$$

где $\lambda_n(\tau,u)$ *из (3).*

В теореме 1 положим значения параметров $z_k=0,\ \ k=1,2,\ldots,n.$ В этом случае величина $\varepsilon_n(\hat{f},x,O)=\varepsilon_n^{(0)}(\hat{f},x)$ представляет собой приближения сингулярных интегралов вида (1) частичными суммами полиномиального ряда Фурье–Чебышёва.

С л е д с т в и е 1. *Имеет место интегральное представление*

$$\varepsilon_n^{(0)}(\hat{f},x)=-\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}f(\cos\tau)\sin\tau\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)(\tau-u)}{\sin\frac{\tau-u}{2}}d\tau,\ x=\cos u,\ x\in[-1,1],\ n\in\mathbb{N}.$$

Теперь займемся изучением оператора (4). Введем следующие обозначения:

$$\hat{\varepsilon}_{n+1}(f,x,A)=\hat{f}(x)-\hat{s}_{n+1}(f,x),\ x\in[-1,1],$$

$$\hat{\varepsilon}_{n+1}(f,A)=\left\|\hat{f}(x)-\hat{s}_{n+1}(f,x)\right\|_{C[-1,1]},\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Т е о р е м а 2. *Для приближений сингулярного интеграла вида (1) рациональным интегральным оператором (4) имеет место интегральное представление*

$$\hat{\varepsilon}_{n+1}(f, x, A) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v)\frac{\cos\lambda_n(v,u)}{\sin\frac{v-u}{2}}dv,\ x=\cos u,\ x\in[-1,1],\ z_n=0,\ n\in\mathbb{N}, \tag{6}$$

где $\lambda_n(v,u)$ *из (3).*

В теореме 2 положим значения параметров $z_k = 0,\ \ k = 1, 2, \ldots, n-1.$ В этом случае величина $\hat{\varepsilon}_{n+1}(f, x, O) = \hat{\varepsilon}^{(0)}_{n+1}(f, x)$ представляет собой приближения сингулярного интеграла вида (1) полиномиальным интегральным оператором, являющимся образом частичных сумм ряда Фурье–Чебышёва при преобразовании (1).

С л е д с т в и е 2. *Имеет место интегральное представление*

$$\hat{\varepsilon}^{(0)}_{n+1}(f,x) = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2}\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos v)\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)(v-u)}{\sin\frac{v-u}{2}}dv,\quad x=\cos u, x\in[-1,1], n\in\mathbb{N}.$$

Исследование приближений, найденных в следствии 1 и следствии 2, представляет, на наш взгляд, самостоятельный интерес.

2. Приближения сингулярных интегралов с плотностью $|x|^s$ рациональным интегральным оператором Фурье–Чебышёва. В представлении (1) положим $f(t) = |t|^s$, где $s\in(1,+\infty)\setminus\mathbb{N}$. Тогда

$$\hat{f}_s(x) = 2x\int_0^1 \frac{t^s}{t^2-x^2}\sqrt{1-t^2}\,dt,\ x\in[-1,1]. \tag{7}$$

Изучим свойства приближений (5) и (6) в этом случае.

Рассмотрим приближения (5). С учетом плотности $|x|^s$ они примут вид

$$\varepsilon_n(\hat{f}_s, x, A) = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} |\cos\tau|^s \sin\tau\frac{\cos\lambda_n(\tau,u)}{\sin\frac{\tau-u}{2}}d\tau,\ x=\cos u,\ x\in[-1,1].$$

Для дальнейших рассуждений необходимо определенным образом выбрать параметры аппроксимирующей функции. Положим $n\mapsto 2n-1$ и пусть $2n-1$ параметров аппроксимирующей рациональной функции $\{z_k\}_{k=1}^{2n-1}$ имеют следующий вид:

$$z_k = -z_{n+k-1},\ z_k = i\alpha_k,\ k=1,2,\ldots,n-1,\ z_{2n-1}=0,\ z_1=z_2=\ldots=z_p=0,\ p=\left[\frac{s}{2}\right],\ n>p, \tag{8}$$

где $[\cdot]$ обозначает целую часть от числа. Тогда

$$\varepsilon_{2n-1}(\hat{f}_s, x, A) = -i\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos^s\tau\sin\tau\left(\frac{z^3\omega_{2n-2}(z)}{\xi\omega_{2n-2}(\xi)}+\frac{\xi^3\omega_{2n-2}(\xi)}{z\omega_{2n-2}(z)}\right)\frac{d\tau}{z^2-\xi^2},$$

$$\omega_{2n-2}(y) = y^{2p}\prod_{k=p+1}^{n-1}\frac{y^2+\alpha_k^2}{1+\alpha_k^2 y^2},\ n\in\mathbb{N}.$$

Справедлива следующая

Т е о р е м а 3. *Для приближений сингулярного интеграла (7) рациональным интегральным оператором (2) при выполнении условий (8) имеет место:*

1) интегральное представление

$$\varepsilon_{2n-1}(\hat{f}_s, x, A) = \frac{(-1)^n}{2^{s-1}}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1\frac{(1-t^2)^s(1+t^2)t^{1-s}}{\sqrt{1+2t^2\cos 2u+t^4}}\cos\psi_{2n}(x,t,A)\chi_{2n-2}(t)dt,\ x\in[-1,1],$$

где

$$\psi_{2n}(x,t,A) = \arg\frac{\xi^3\omega_{2n-2}(\xi)}{1+t^2\xi^2},\ \xi=\mathrm{e}^{iu},\ x=\cos u,\ \chi_{2n-2}(t)=t^{2p}\prod_{k=p+1}^{n-1}\frac{t^2-\alpha_k^2}{1-\alpha_k^2t^2};$$

2) поточечная оценка

$$|\varepsilon_{2n-1}(\hat{f}_s, x, A)| \le \frac{|x|}{2^{s-1}}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\int_0^1 \frac{(1-t^2)^s(1+t^2)t^{1-s}}{1+2t^2\cos 2u+t^4}\Big[(1+t^2)+2(1-x^2)(1-t^2)\lambda_{2n}(u)\Big]|\chi_{2n-2}(t)|\,dt, \quad (9)$$

где

$$\lambda_{2n}(u) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1-\alpha_k^4}{1+2\alpha_k^2\cos 2u+\alpha_k^4}, \ \alpha_n = 0, \ x = \cos u;$$

3) равномерно по $x \in [-1, 1]$ *оценка приближений*

$$|\varepsilon_{2n-1}(\hat{f}_s, x, A)| \le |x|\,\varepsilon^*_{2n-1}(\hat{f}_s, A), \ n \in \mathbb{N}, \quad (10)$$

где

$$\varepsilon^*_{2n-1}(\hat{f}_s, A) = \frac{1}{2^{s-1}}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\int_0^1 (1-t^2)^{s-2}(1+t^2)t^{1-s}\left[(1+t^2)+(1-t^2)2\sum_{k=1}^{n}\frac{1+\alpha_k^2}{1-\alpha_k^2}\right]|\chi_{2n-2}(t)|dt.$$

Оценки (9) и (10) являются точными. Равенство достигается при $x = 0$.

Рассмотрим полиномиальный случай. В теореме 3 положим значения параметров $\alpha_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n.$ Тогда $\varepsilon_{2n-1}(\hat{f}_s, x, O) = \varepsilon^{(0)}_{2n-1}(\hat{f}_s, x)$ представляют собой приближения сингулярных интегралов (7) частичными суммами полиномиального ряда Фурье–Чебышёва.

С л е д с т в и е 3. *Для величины* $\varepsilon^{(0)}_{2n-1}(\hat{f}_s, x)$ *на отрезке* [–1, 1] *имеют место:*

1) интегральное представление:

$$\varepsilon^{(0)}_{2n-1}(\hat{f}_s, x) = \frac{(-1)^n}{2^{s-1}}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1 (1-t^2)^s(1+t^2)t^{2n-1-s}\frac{T_{2n+1}(x)+t^2T_{2n-1}(x)}{(1-t^2)^2+4t^2x^2}dt, \ n > s/2,$$

где $T_n(\cdot)$ *– полиномы Чебышёва первого рода соответствующих степеней;*

2) поточечная оценка:

$$|\varepsilon^{(0)}_{2n-1}(\hat{f}_s, x)| \le \frac{|x|}{2^{s-1}}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\int_0^1 \frac{(1-t^2)^s(1+t^2)t^{2n-1-s}}{(1-t^2)^2+4t^2x^2}[(1+t^2)+2n(1-t^2)]\,dt; \quad (11)$$

3) равномерно по $x \in [-1, 1]$ *оценка:*

$$|\varepsilon^{(0)}_{2n-1}(\hat{f}_s, x)| \le |x|\,\varepsilon^{(0)}_{2n-1}(\hat{f}_s), \ n \in \mathbb{N}; \quad (12)$$

где

$$\varepsilon^{(0)}_{2n-1}(\hat{f}_s) = \frac{1}{2^{s-1}}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\int_0^1 (1-t^2)^{s-2}(1+t^2)t^{2n-1-s}[(1+t^2)+2n(1-t^2)]\,dt;$$

4) асимптотическая оценка мажоранты:

$$\varepsilon^{(0)}_{2n-1}(\hat{f}_s) \sim 2\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\frac{s\Gamma(s-1)}{(2n)^{s-1}}, \ s > 1, \ n > \frac{s}{2}, \ n \to \infty.$$

Оценки (11) и (12) являются точными. Равенство достигается при $x = 0$.

3. Наилучшие оценки приближений оператором Фурье–Чебышёва при специальном выборе полюсов аппроксимирующей функции. Рассмотрим случай произвольного фиксированного количества геометрически различных полюсов. Пусть $n > p$, $p = [s/2]$, и q – произвольное натуральное число, $0 < q < n_1$, A_q есть множество $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n_1})$, $n_1 = n-1-p$, параметров (см. (8)) таких, что среди них ровно q различных и кратность каждого параметра равна m, $n_1 = mq$. Таким образом, будем вести речь об аппроксимации рациональными функциями с полюсом на бесконечности порядка $2p + 2$ и $2q$ геометрически различными полюсами в расширенной комплексной плоскости кратности m каждый.

Заметим, что приближения непрерывных функций с характерными особенностями рациональными функциями с фиксированным числом геометрически различных полюсов впервые рассматривались в работах К. Н. Лунгу [16; 17].

Отметим, что в рассматриваемом нами случае для каждого значения $n \in \mathbb{N}$ может выбираться соответствующий набор параметров $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q)$, т. е. $\alpha_k = \alpha_k(n)$, $k = 1, 2, \dots, q$. При этом будем полагать, что выполняются следующие условия:

$$\lim_{m \to \infty} (1 - \alpha_k) m = \infty, \ k = 1, 2, \dots, q, \ n_1 = mq.$$

Т е о р е м а 4. *Для приближений сингулярного интеграла (7) рациональным интегральным оператором (2) с q геометрически различными полюсами существует такой оптимальный набор параметров* A_q^* *аппроксимирующей функции, что равномерно относительно* $x \in [-1, 1]$ *справедлива оценка сверху*

$$|\varepsilon_{2n-1}(\hat{f}_s, x, A_q^*)| \le |x| c(q, s) \left(\frac{\ln^{2q-1} n}{n^{2q}} \right)^{s-1}, \ n > n_0(s), \ s \in (1, +\infty) \setminus \mathbb{N},$$

где $n_0(s)$ *– некоторое натуральное число, не зависящее от n, но зависящее от s,*

$$c(q, s) = 4 \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| s \Gamma(s-1) \left(\frac{q^{2q+1} s^{2q-1} [(q-1)!]^2}{2^{2q-1}} \right)^{s-1}, \tag{13}$$

$\Gamma(\cdot)$ *– гамма-функция Эйлера.*

Интересно сравнить оценку, полученную в теореме 5, с оценкой (12) приближений сингулярного интеграла (7) частичными суммами полиномиального ряда Фурье–Чебышёва. В то время, как в полиномиальном случае равномерно относительно $x \in [-1, 1]$ обеспечивается скорость убывания приближений порядка $O(|x| / n^{s-1})$, соответствующие рациональные приближения с $2q$ геометрически различными полюсами аппроксимирующей функции в открытой комплексной плоскости обеспечиваются со скоростью $O(|x|(\ln^{2q-1} n / n^{2q})^{s-1})$. Таким образом, рациональные аппроксимации классов сингулярных интегралов (7) являются более выгодными в том смысле, что они имеют более высокие порядки малости в сравнении со своими полиномиальными аналогами.

Пусть A_N – набор параметров α_k, $k = 1, 2, \dots, n_1$, аппроксимирующей функции для каждого фиксированного $n_1 \in \mathbb{N}$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$\alpha_k = \sqrt{\frac{1 - \beta_k}{1 + \beta_k}}, \ \beta_k = e^{-\frac{ck}{\sqrt{n_1}}}, \ k = 1, 2, \dots, n_1, \ n_1 = n - 1 - p, \tag{14}$$

c – некоторая положительная постоянная, не зависящая от n. Отметим, что некоторые модификации параметров β_k, $k = 1, 2, \dots, n_1$, для решения задач рациональной аппроксимации были введены Д. Ньюменом [18]. Параметры (14) использовались нами ранее [19] при изучении приближений функции $|x|^s$, $s > 0$, рациональным интегральным оператором (1). Представляет интерес найти наилучшую равномерную оценку сверху (10) с параметрами (14) путем оптимального для этой задачи выбора величины c.

Т е о р е м а 5. *Существует такой набор параметров* A_N^* *(см. (14)) аппроксимирующей функции, что для приближений сингулярного интеграла (7) на отрезке* [–1, 1] *рациональным интегральным оператором (2) справедлива оценка*

$$|\varepsilon_{2n-1}(\hat{f}_s, x, A_N^*)| \le \frac{48 |x| \sqrt{s}}{\pi} \left| \sin \frac{\pi s}{2} \right| c_1(s) n e^{-\frac{\pi}{2} \frac{s-1}{\sqrt{s}} \sqrt{n}} + O\left(n e^{-\frac{\pi}{2} \sqrt{sn}} \right), \ n > n_0(s), \ s \in (1, +\infty) \setminus \mathbb{N},$$

где

$$c_1(s) = \frac{\Gamma\left(1 + p - \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{2\Gamma(1+p)}, \ p = \left[\frac{s}{2} \right].$$

Из теоремы 5 следует, в частности, что при $s \in (1, 2)$ существует такой набор параметров, что справедлива оценка сверху

$$|\varepsilon_{2n-1}(\hat{f}_s, x, A_N^*)| \le 24|x|\sqrt{s}n e^{-\frac{\pi}{2}\frac{s-1}{\sqrt{s}}\sqrt{n}}, \ s\in(1,2), \ n>n_0(s).$$

4. Приближения сингулярных интегралов образом рационального интегрального оператора Фурье–Чебышёва. Выясним свойства приближений (6) в случае когда $f(t)=|t|^s$, $s\in(1,+\infty)\setminus\mathbb{N}$. Отметим, что интегральное представление (6) по существу содержится в [20] и получено при исследовании приближений сопряженной функции на отрезке [–1, 1] рациональными интегральными операторами Фурье–Чебышёва. Справедлива

Т е о р е м а 6. *Для приближений сингулярного интеграла (7) на отрезке* [–1, 1] *рациональным интегральным оператором (4) имеют место:*

1) интегральное представление

$$\hat{\varepsilon}_{2n+1}(|\cdot|^s, x, A) = (-1)^n 2^{3-s}\sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1 \frac{(1-t^2)^s t^{1-s}\sin\psi_{2n}(x,t,A)}{\sqrt{1+2t^2\cos 2u+t^4}}\chi_{2n}(t)dt, \ x=\cos u,$$

где

$$\psi_{2n}(x,t,A)=\arg\frac{\xi^2\omega_{2n}(\xi)}{1+t^2\xi^2}, \ \omega_{2n}(\xi)=\prod_{k=1}^n\frac{\xi^2+\alpha_k^2}{1+\alpha_k^2\xi^2}, \ \chi_{2n}(t)=\prod_{k=1}^n\frac{t^2-\alpha_k^2}{1-\alpha_k^2t^2}, \ \xi=e^{iu};$$

2) поточечная оценка:

$$|\hat{\varepsilon}_{2n+1}(|\cdot|^s, x, A)| \le$$
$$\le 2^{4-s}|x|(1-x^2)\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\int_0^1\frac{(1-t^2)^s t^{1-s}}{\sqrt{1+2t^2\cos 2u+t^4}}\left[\frac{1}{\sqrt{1+2t^2\cos 2u+t^4}}+\lambda_{2n}(u)\right]|\chi_{2n}(t)|dt, \tag{15}$$

где

$$\lambda_{2n}(u)=\sum_{k=1}^n\frac{1-\alpha_k^4}{1+2\alpha_k^2\cos 2u+\alpha_k^4};$$

3) равномерно по $x\in[-1,1]$ *оценка*

$$|\hat{\varepsilon}_{2n+1}(|\cdot|^s, x, A)| \le |x|(1-x^2)\hat{\varepsilon}^*_{2n+1}(|\cdot|^s, A), \ n\in\mathbb{N}, \tag{16}$$

где

$$\hat{\varepsilon}^*_{2n+1}(|\cdot|^s, A)=2^{4-s}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\left[\int_0^1(1-t^2)^{s-2}t^{1-s}|\chi_{2n}(t)|dt+\sum_{k=1}^n\frac{1+\alpha_k^2}{1-\alpha_k^2}\int_0^1(1-t^2)^{s-1}t^{1-s}|\chi_{2n}(t)|dt\right].$$

Оценки (15) и (16) являются точными. Равенство достигается при x = 0*, а также на концах отрезка.*

В теореме 6 положим значения параметров $\alpha_k=0$, $k=1,2,\dots,n$. Тогда величины $\hat{\varepsilon}_{2n}(|\cdot|^s, x, O)=\hat{\varepsilon}^{(0)}_{2n}(|\cdot|^s, x)$ и $\hat{\varepsilon}_{2n}(|\cdot|^s, O)=\hat{\varepsilon}^{(0)}_{2n}(|\cdot|^s)$ представляют собой соответственно поточечные и равномерные приближения сингулярных интегралов (7) оператором, являющимся образом частичных сумм полиномиального ряда Фурье–Чебышёва при преобразовании (1).

С л е д с т в и е 4. *Для приближений сингулярных интегралов (7) оператором, являющимся образом частичных сумм полиномиального ряда Фурье–Чебышёва при преобразовании (1), имеют место:*

1) интегральное представление:

$$\hat{\varepsilon}^{(0)}_{2n+1}(|\cdot|^s, x)=$$
$$=\frac{(-1)^n\sqrt{1-x^2}}{2^{s-3}}\sin\frac{\pi s}{2}\int_0^1(1-t^2)^s t^{2n+1-s}\frac{t^2\sin 2nu+\sin(2n+2)u}{1+2t^2\cos 2u+t^4}dt, \ x=\cos u, \ s\in(1,+\infty)\setminus\mathbb{N};$$

2) поточечная оценка:

$$|\hat{\varepsilon}^{(0)}_{2n+1}(|\cdot|^s, x)| \le \frac{|x|(1-x^2)}{2^{s-4}}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\left[\int_0^1\frac{(1-t^2)^s t^{2n+1-s}}{1+2t^2\cos 2u+t^4}dt+n\int_0^1\frac{(1-t^2)^s t^{2n+1-s}}{\sqrt{1+2t^2\cos 2u+t^4}}dt\right];$$

3) равномерно по $x \in [-1, 1]$ *оценка:*

$$|\hat{\varepsilon}^{(0)}_{2n+1}(|\cdot|^s, x)| \le |x|(1-x^2)\hat{\varepsilon}^{(0)}_{2n+1}(|\cdot|^s),\ n \in \mathbb{N},$$

где

$$\hat{\varepsilon}^{(0)}_{2n+1}(|\cdot|^s) = \frac{1}{2^{s-4}}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\left[\int\limits_0^1 (1-t^2)^{s-2} t^{2n+1-s}\,dt + n\int\limits_0^1 (1-t^2)^{s-1} t^{2n+1-s}\,dt\right];$$

4) асимптотическая оценка мажоранты:

$$\hat{\varepsilon}^{(0)}_{2n+1}(|\cdot|^s) \sim 4\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right|\frac{s\Gamma(s-1)}{(2n)^{s-1}},\ s > 1,\ n \to \infty.$$

Оценки являются точными. Равенство достигается при $x = 0$*, и на концах отрезка.*

5. Наилучшие оценки приближений сингулярных интегралов образом рационального интегрального оператора Фурье–Чебышёва при специальном выборе полюсов. Установим наилучшую мажоранту в оценке (16) в случае ограничений на количество геометрически различных полюсов аппроксимирующей функции. Отметим, что в обозначениях пункта 3 настоящей работы, аппроксимирующая рациональная функция будет иметь полюс на бесконечности порядка $2p$ и $2q$ геометрически различных полюсов в расширенной комплексной плоскости кратности m каждый.

Т е о р е м а 7. *Для приближений сингулярного интеграла (7) рациональным интегральным оператором (4) существует такой набор параметров* A_q^**, что равномерно по* $x \in [-1, 1]$ *справедлива оценка сверху*

$$|\hat{\varepsilon}_{2n+1}(|\cdot|^s, x, A_q^*)| \le 2|x|(1-x^2)c(q, s)\left(\frac{\ln^{2q-1} n}{n^{2q}}\right)^{s-1},\ n > n_0(s),\ s \in (1, +\infty) \setminus \mathbb{N},$$

где $c(q, s)$ из (13), $n_0(s)$ – некоторое натуральное число, не зависящее от n, но зависящее от s, $\Gamma(\cdot)$ – гамма-функция Эйлера.

Учитывая результаты следствия 4, из теоремы 7 делаем вывод, что классы сингулярных интегралов вида (7) отражают особенности рациональной аппроксимации интегральными операторами (4) с ограничениями на количество геометрически различных полюсов, осуществляя приближения в некоторой степени выше соответствующих полиномиальных аналогов.

Пусть A_N – набор параметров α_k, $k = 1, 2, \ldots, n_1$, $n_1 = n - p$, для каждого фиксированного $n \in \mathbb{N}$, имеющих вид (14). Найдем наилучшую равномерную оценку приближений (16) в этом случае.

Т е о р е м а 8. *Существует рациональный интегральный оператор (4), определяемый набором параметров (14), что для приближений сингулярного интеграла (7) на отрезке* [–1, 1] *справедлива оценка сверху*

$$|\hat{\varepsilon}_{2n+1}(|\cdot|^s, x, A_N^*)| \le \frac{96|x|(1-x^2)\sqrt{s}}{\pi}\left|\sin\frac{\pi s}{2}\right| c_1(s) n e^{-\frac{\pi}{2}\frac{s-1}{\sqrt{s}}\sqrt{n}},\ n > n_0(s),\ s \in (1, +\infty) \setminus \mathbb{N},$$

где $c_1(s)$ *определена в теореме 5.*

Из теоремы 8 следует, в частности, что при $s \in (1, 2)$ существует такой набор параметров, что справедлива оценка сверху

$$|\hat{\varepsilon}_{2n+1}(|\cdot|^s, x, A_N^*)| \le 48|x|(1-x^2)\sqrt{s} n e^{-\frac{\pi}{2}\frac{s-1}{\sqrt{s}}\sqrt{n}},\ n > n_0(s),\ s \in (1, 2).$$

З а м е ч а н и е 1. Если отказаться от требования точности оценок, то порядок стремления к нулю наилучших мажорант равномерных приближений может быть увеличен. Например, в случае приближений рациональным интегральным оператором (2) специальным выбором параметров в сравнении с результатами теоремы 4 и теоремы 5 возможно добиться скорости соответственно

$$|\varepsilon_{2n-1}(\hat{f}_s, x, A_q^{**})| \le c_2(q,s)\left(\frac{\ln^{2q-1} n}{n^{2q}}\right)^s, \ n > n_0(s), \ s \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N},$$

и

$$|\varepsilon_{2n-1}(\hat{f}_s, x, A_N^{**})| \le c_3(s)\sqrt{n}\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{ns}}, \ n > n_0(s), \ s \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{N},$$

где A_q^{**} и A_N^{**} – соответствующие оценкам оптимальные наборы параметров, величины $c_2(q,s)$ и $c_3(s)$ зависят только от параметров, указанных в скобках.

З а м е ч а н и е 2. Теоремы, в которых были установлены оценки равномерных приближений доказаны конструктивным образом. Полюсы аппроксимирующих рациональных функций в каждом отдельном случае могут быть выписаны в явном виде.

З а м е ч а н и е 3. Интересно сравнить константы в оценках равномерных приближений для двух исследуемых методов, полученных соответственно в теоремах 4 и 7, а также 5 и 8. Нетрудно убедиться, что они отличаются на множитель $2(1-x^2)$.

Список использованных источников

1. Гахов, Ф. Д. Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М., 1958. – 543 с.

2. Мусхелишвили, Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. 3-е изд. / Н. И. Мусхелишвили. – М., 1968. – 513 с.

3. Erdogan, F. On the numerical solution of singular integral equations / F. Erdogan, G. D. Gupta // Quarterly of Applied Mathematics. – 1972. – Vol. 29, N 4. – P. 525–534. https://doi.org/10.1090/qam/408277

4. Elliott, D. On the convergence of a quadrature rule for evaluating certain Cauchy principal value integrals / D. Elliott, D. Paget // Numerische Mathematik. – 1974. – Vol. 23, N 4. – P. 311–319. https://doi.org/10.1007/bf01438258

5. Шешко, М. А. О сходимости квадратурных процессов для сингулярного интеграла / М. А. Шешко // Изв. высших учебных заведений. Математика. – 1976. – № 12. – С. 108–118.

6. Саакян, А. В. Квадратурные формулы типа Гаусса для сингулярных интегралов / А. В. Саакян // Проблемы механики тонких деформируемых тел: сб., посвящ. 80-летию акад. С. А. Амбарцумяна. – Ереван, 2002. – С. 259–265.

7. Хубежты, Ш. С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов с ядром Коши / Ш. С. Хубежты // Владикавказский мат. журн. – 2008. – Т. 10, № 4. – С. 61–75.

8. Хубежты, Ш. С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов, имеющих почти гауссовскую степень точности / Ш. С. Хубежты, А. О. Цуцаев // Изв. вузов. Северо-Кавказский рег. Естеств. науки. – 2015. – № 2. – С. 53–57.

9. Русак, В. Н. Равномерная рациональная аппроксимация сингулярных интегралов / В. Н. Русак // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 1993. – № 2. – С. 22–26.

10. Бокша, А. Н. Приближение сингулярных интегралов рациональными функциями в равномерной метрике / А. Н. Бокша // Вестн. Бел. гос. ун-та. Сер. 1: Физика. Математика. Информатика. – 1997. – № 3. – С. 68–71.

11. Русак, В. Н. Рациональная аппроксимация сингулярных интегралов с дифференцируемой плотностью / В. Н. Русак, А. Х. Уазис // Вес. БДПУ. Сер. 3. Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. – 2009. – № 1(59). – С. 8–11.

12. Моторный, В. П. Приближение некоторых классов сингулярных интегралов алгебраическими многочленами / В. П. Моторный // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, № 3. – С. 331–345.

13. Ровба, Е. А. Об одном прямом методе в рациональной аппроксимации / Е. А. Ровба // Докл. АН БССР. – 1979. – Т. 23, № 11. – С. 968–971.

14. Поцейко, П. Г. Об одном рациональном интегральном операторе типа Фурье–Чебышёва и аппроксимации функций Маркова / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба, К. А. Смотрицкий // Журн. Белорусского гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2020. – № 2. – С. 6–27 (на англ. яз.). https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-6-27.

15. Поцейко, П. Г. Приближения на классах интегралов Пуассона рациональными интегральными операторами Фурье–Чебышёва / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Сибир. мат. журн. – 2021. – Т. 62, № 2. – С. 362–386.

16. Лунгу, К. Н. О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов / К. Н. Лунгу // Математический сб. – 1971. – Т. 86 (128), № 2 (10). – С. 314–324.

17. Лунгу, К. Н. О наилучших приближениях рациональными функциями с фиксированным числом полюсов / К. Н. Лунгу // Сибир. мат. журн. – 1984. – Т. 15, № 2. – С. 151–160.

18. Newman, D. I. Rational approximation to $|x|$ / D. I. Newman // Michigan Mathematical Journal. – 1964. – Vol. 11, N 1. – P. 11–14. https://doi.org/10.1307/mmj/1028999029

19. Поцейко, П. Г. Об оценках равномерных приближений рациональными интегральными операторами Фурье–Чебышёва при определенном выборе полюсов / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Математические заметки. – 2023. – Т. 113, вып. 6. – С. 876–894. https://doi.org/10.4213/mzm13621

20. Поцейко, П. Г. Сопряженный рациональный оператор Фурье–Чебышёва и его аппроксимационные свойства / П. Г. Поцейко, Е. А. Ровба // Изв. вузов. Математика. – 2022. – № 3. – С. 44–60.

References

1. Gakhov F. D. *Boundary problems.* Moscow, 1958. 543 p. (in Russian).

2. Muskhelishvili N. I. *Singular integral equations, 3d ed.* Moscow, 1968. 513 p. (in Russian).

3. Erdogan F., Gupta G. D. On the numerical solution of singular integral equations. *Quarterly of Applied Mathematics*, 1972, vol. 29, no. 4, pp. 525–534. https://doi.org/10.1090/qam/408277

4. Elliott D., Paget D. F. On the convergence of a quadrature rule for evaluating certain Cauchy principal value integrals. *Numerische Mathematik*, 1974, vol. 23, no. 4, pp. 311–319. https://doi.org/10.1007/bf01438258

5. Sheshko M. A. On the convergence of quadrature processes for a singular integral. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Matematika = Russian Mathematics*, 1976, vol. 12, pp. 108–118 (in Russian).

6. Saakyan A. V. Gauss-type quadrature formulas for singular integrals. *Problemy mekhaniki tonkikh deformiruemykh tel: sbornik, posvyashchennyi 80-letiyu akademika S. A. Ambartsumyana* [Problems of mechanics of thin deformable bodies: collection dedicated to the 80th anniversary of Academician S. A. Ambartsumyan]. Erevan, 2002, pp. 259–265 (in Russian).

7. Khubezhty Sh. S. Quadrature formulas for singular integrals with Cauchy kernel. *Vladikavkazskii matematicheskii zhurnal = Vladikavkaz Mathematical Journal*, 2008, vol. 10, no. 4, pp. 61–75 (in Russian).

8. Khubezhty Sh. S., Tsutsaev A. O. Quadrature formulas for singular integrals with nearly Gaussian degree of accuracy. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki = Bulletin of Higher Education Institutes North Caucasus Region. Natural Sciences*, 2015, no. 2, pp. 53–57 (in Russian).

9. Rusak V. N. Uniform rational approximation of singular integrals. *Vestsi Natsyyanal'nai akademii navuk Belarusi. Seryya fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 1993, no. 2, pp. 22–26 (in Russian).

10. Boksha A. N. Approximation of singular integrals by rational functions in the uniform metric. *Vestnik Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya 1: Fizika, Matematika, Informatika* [Bulletin of the Belarusian State University. Series 1: Physics, Mathematics, Computer Science], 1997, no. 3, pp. 68–71 (in Russian).

11. Rusak V. N., Uazis A. Kh. Rational approximation of singular integrals with differentiable density. *Vestsi BDPU. Seryya 3. Fizika. Matematyka. Infarmatyka. Biyalogiya. Geagrafiya* [Bulletin of BSPU. Series 3. Physics. Mathematics. Informatics. Biology. Geography], 2009, no. 1(59), pp. 8–11 (in Russian).

12. Motornyi V. P. Approximation of Certain Classes of Singular Integrals by Algebraic Polynomials. *Ukrainian Mathematical Journal*, 2001, vol. 53, pp. 377–394. https://doi.org/10.1023/a:1012388120569

13. Rovba E. A. On one direct method in rational approximation. *Doklady AN BSSR*, 1979, vol. 23, no. 11, pp. 968–971 (in Russian).

14. Patseika P. G., Rouba Y. A., Smatrytski K. A. On one rational integral operator of Fourier–Chebyshev type and approximation of Markov functions. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2020, no. 2, pp. 6–27. https://doi.org/10.33581/2520-6508-2020-2-6-27

15. Potseiko P. G., Rovba E. A. Approximations on classes of poisson integrals by Fourier–Chebyshev rational integral operators. *Siberian Mathematical Journal*, 2021, vol. 62, no. 2, pp. 292–312. https://doi.org/10.1134/s0037446621020099

16. Lungu K. N. On the best approximations of possible functions with a fixed numerical pole. *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1971, vol. 86, no. 2, pp. 314–324. https://doi.org/10.1070/sm1971v015n02abeh001547

17. Lungu K. N. Best approximations by rational functions with a fixed number of poles. *Siberian Mathematical Journal*, 1984, vol. 25, pp. 289–296. https://doi.org/10.1007/bf00971467

18. Newman D. I. Rational approximation to $|x|$. *Michigan Mathematical Journal*, 1964, vol. 11, no. 1, pp. 11–14. https://doi.org/10.1307/mmj/1028999029

19. Potseiko P. G., Rovba Y. A. On Estimates of Uniform Approximations by Rational Fourier–Chebyshev Integral Operators for a Certain Choice of Poles. *Mathematical Notes*, 2023, vol. 113, pp. 815–830. https://doi.org/10.1134/s0001434623050231

20. Potseiko P. G., Rovba Ye. A. Conjugate Rational Fourier–Chebyshev Operator and its Approximation Properties. *Russian Mathematics*, 2022, vol. 66, pp. 35–49. https://doi.org/10.3103/s1066369x22030094

Информация об авторах

Поцейко Павел Геннадьевич – канд. физ.-мат. наук, доцент. Гродненский государственный университет им. Янки Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, Гродно, Республика Беларусь). E-mail: pahamatby@gmail.com. ORCID: 0000-0001-7835-0500.

Ровба Евгений Алексеевич – д-р физ.-мат. наук, профессор, заведующий кафедрой. Гродненский государственный университет им. Янки Купалы (ул. Ожешко, 22, 230023, Гродно, Республика Беларусь). E-mail: rovba.ea@gmail.com. ORCID: 0000-0002-1265-1965.

Information about the authors

Patseika Pavel G. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor. Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: pahamatby@gmail.com. ORCID: 0000-0001-7835-0500.

Rovba Yevgeniy A. – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Head of the Department. Yanka Kupala State University of Grodno (22, Ozheshko Str., 230023, Grodno, Republic of Belarus). E-mail: rovba.ea@gmail.com. ORCID: 0000-0002-1265-1965.