Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 июль–август Том 59 № 4

УДК 517.925/.926+517.938

А. П. САДОВСКИЙ, Т. В. ЩЕГЛОВА

МНОГООБРАЗИЯ КОМПЛЕКСНОГО И ВЕЩЕСТВЕННОГО ЦЕНТРА ДВУМЕРНЫХ АВТОНОМНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
sadovskii@bsu.by; shcheglovskaya@tut.by

В работе показана связь между решением задачи получения необходимых и достаточных условий существования аналитического в окрестности начала координат первого интеграла, не зависящего от времени, для комплексной системы вида $\dot{x} = y + P(x, y)$, $\dot{y} = -x + Q(x, y)$, где $P(x, y)$, $Q(x, y)$ – полиномы без свободных и линейных членов, и решением проблемы различения центра и фокуса для вещественного аналога этой системы.

Ключевые слова: проблема центра и фокуса, полиномиальная система, многообразие комплексного центра, фокусные величины, нормальные формы, аналитический интеграл.

A. P. SADOVSKII, T. V. SHCHEGLOVA

CENTER VARIETIES OF COMPLEX AND REAL TWO-DIMENSIONAL AUTONOMOUS POLYNOMIAL DIFFERENTIAL SYSTEMS

Belarusian State University, Minsk, Belarus
sadovskii@bsu.by; shcheglovskaya@tut.by

In the present article we consider the interaction between the solution of the problem of obtaining necessary and sufficient conditions of existence of a time-independent first integral analytical in the neighborhood of the origin for the complex system of the form $\dot{x} = y + P(x, y)$, $\dot{y} = -x + Q(x, y)$, where $P(x, y)$, $Q(x, y)$ are polynomials without constant and linear terms, and the solution of the center-focus problem for the real system of the same form.

Keywords: center-focus problem, polynomial system, complex center variety, focal values, normal forms, analytic first integral.

Введение. Рассмотрим вещественную полиномиальную систему дифференциальных уравнений

$$\frac{du}{dt} = v + P(u,v), \quad \frac{dv}{dt} = -u + Q(u,v), \tag{1}$$

где $P(u,v)$, $Q(u,v) \in \mathbb{R}[u,v]$, а $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
и комплексную полиномиальную систему

$$\frac{dx}{dt} = y + P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = -x + Q(x,y), \tag{2}$$

где $P(x,y)$, $Q(x,y) \in \mathbb{C}[x,y]$, а $x, y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

В системах (1) и (2) полиномы $P(z,w)$ и $Q(z,w)$ имеют вид $P(z,w) = \sum_{i=2}^{n} p_i(z,w)$ и $Q(z,w) = \sum_{j=2}^{m} q_j(z,w)$, где $p_i(z,w) = \sum_{k=0}^{i} p_{k,i-k} z^k w^{i-k}$, $q_j(z,w) = \sum_{k=0}^{j} q_{k,j-k} z^k w^{j-k}$.

Для системы (1) в $O(0, 0)$ возникает *проблема различения центра и фокуса*, или задача поиска необходимых и достаточных условий центра [1–5].

О п р е д е л е н и е 1 [1, с. 301]. *Особая точка* $O(0, 0)$ *системы (1) называется центром, если существует некоторая окрестность* $O(0, 0)$*, не содержащая других состояний равновесия, такая, что все траектории, пересекающие её в какой-либо точке (кроме* $O(0, 0)$*), – замкнуты.*

М. А. Ляпуновым впервые доказано, что наличие в начале координат системы (1) центра равносильно существованию у этой системы не зависящего от времени t действительного аналитического интеграла $U(u, v)$ вида

$$U(u,v)=u^2+v^2+\sum_{k=3}^{+\infty} f_k(u,v), \quad (3)$$

где $f_k(u,v)$ – однородные многочлены степени k, т. е. $f_k(u,v)=\sum_{i=0}^{k} f_{i,k-i}u^i v^{k-i}$ [1, с. 310; 2, с. 28].

Если же $O(0, 0)$ системы (1) не является особой точкой типа центр, то интегральные кривые этой системы, расположенные в достаточно малой окрестности начала координат, будут представлять собой спирали, совершающие вокруг $O(0, 0)$ бесконечное число оборотов [1, с. 301–310; 2, с. 5–11]. В этом случае особая точка $O(0, 0)$ системы (1) называется *фокусом*.

Один из методов, позволяющих установить наличие центра в начале координат, предполагает проверку выполнения бесконечного числа достаточно сложных условий – равенства нулю *фокусных величин* G_{2k} системы (1), определяемых при построении для системы (1) формального ряда вида (3), для которого в силу (1) имеет место

$$\frac{dU}{dt}=\sum_{k=2}^{+\infty} G_{2k}(u^2+v^2)^k. \quad (4)$$

Такой ряд построить можно всегда, при этом если зафиксировать коэффициенты $f_{0,2k}\in\mathbb{R}$ в полиномах $f_{2k}(u,v)$, то фокусные величины G_{2k} и оставшиеся коэффициенты многочленов $f_k(u,v)$ будут определяться однозначно из соотношения (4) и будут являться полиномами с вещественными коэффициентами от переменных $p_{i,j}, q_{i,j}$ из системы (1) [2, с. 14].

Благодаря теореме Гильберта о базисе [6, с. 104] оказалось, что в случае полиномиальных систем дифференциальных уравнений система бесконечного числа уравнений

$$G_{2k}=0, k=\overline{2,+\infty},$$

эквивалентна некоторой конечной системе условий. Более того, эта конечная система условий может быть выписана при помощи первых фокусных величин системы (1). Таким образом, одним из основных вопросов качественной теории в рамках проблемы различения центра и фокуса стал вопрос о том, сколько (минимальное число $N_{\min}$) первых фокусных величин должно обращаться в ноль, чтобы точка $O(0, 0)$ системы (1) являлась точкой типа центр.

Используя фокусные величины системы (1), задачу поиска необходимых и достаточных условий наличия центра в $O(0, 0)$ для системы (1) можно сформулировать в терминах аффинных многообразий и полиномиальных идеалов.

Равенство нулю фокусных величин является необходимым и достаточным условием существования центра в $O(0, 0)$ [2, с. 11–15]. Тогда множество решений системы $G_{2k}=0,\ k=\overline{2,+\infty}$, назовем *многообразием центра* системы (1) [3, с. 109; 5, с. 90].

Ввиду того, что число коэффициентов $p_{i,j}, q_{i,j}$ в системе (1) конечно, многообразие центра системы (1) является аффинным многообразием, т. е. может быть определено при помощи конечного числа порождающих его полиномов [3, с. 27; 6, с. 104]. Соответственно, если удаётся получить конечное число полиномов, не обязательно являющихся фокусными величинами, порождающих многообразие центра системы (1), то для каждой конкретной системы такого вида всегда можно проверить, является ли $O(0, 0)$ особой точкой типа центр или типа фокус, т. е. решить проблему различения центра и фокуса без определения величины $N_{\min}$.

В теории аффинных многообразий и полиномиальных идеалов разработан мощный аппарат, позволяющий определять конечный базис полиномов, порождающих аффинное многообразие V, при условии, что $V\subset k^s$, где k – алгебраически замкнутое поле, например, $\mathbb{C}$. Но многообразие центра системы (1) является подпространством аффинного пространства $\mathbb{R}^s$, так как $p_{i,j}, q_{i,j}\in\mathbb{R}$.

Рассмотрим тогда систему (1) при $p_{i,j}, q_{i,j}\in\mathbb{C}$ и $u,v:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$. В этом случае она принимает вид (2).

О п р е д е л е н и е 2 [3, с. 108]. *Особая точка* $O(0, 0)$ *системы (2) называется комплексным центром, если система (2) имеет аналитический в окрестности* $x = y = 0$ *интеграл* $U(x, y)$ *вида (3), где* $f_k(x,y)$ *– однородные многочлены степени k с комплексными коэффициентами.*

Понятие комплексного центра для системы (2), где $x, y: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, определяется аналогично. Кроме того, так как система (2) автономная и (3) зависит от переменной времени t неявно, то необходимые и достаточные условия наличия комплексного центра в $O(0, 0)$ для такой системы и для системы (2), где $x, y: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, будут совпадать.

Отметим, что равенство нулю фокусных величин системы (2) (определим их так же, как фокусные величины для системы (1)) обеспечивает наличие не только формального, но и аналитического комплексного интеграла вида (3) в окрестности $O(0, 0)$, что следует из теорем 2–4, размещённых в основной части сообщения и доказанных в [4, с. 39–51].

Следуя определению многообразия центра системы (1), аналогичным образом введём понятие *многообразия комплексного центра* системы (2).

Тогда для системы (2) можно сформулировать следующую задачу: найти многообразие комплексного центра, т. е. определить необходимые и достаточные условия существования аналитического в окрестности начала координат первого интеграла, не зависящего от времени [3, с. 108–113; 4, с. 39–57].

Возникает вопрос о наличии и характере связи между многообразием центра системы (1) и многообразием комплексного центра системы (2), ответ на который будет указан в данном сообщении.

Основная часть. Рассмотрим системы (1) и (2), содержащие s произвольных параметров $p_{i,j}, q_{i,j}$, где $s \le ((n+4)(n-1)+(m+4)(m-1))/2$. Введём h – вектор с координатами $p_{i,j}, q_{i,j}$. Используя фокусные величины G_{2k} системы (1) (системы (2)), введём следующие определения:

Определение 3 [3, с. 109]. *Многообразием центра системы (1) и многообразием комплексного центра системы (2) назовём множества*

$$V_{\text{real}} = \{h \in \mathbb{R}^s: \quad G_{2k}(h) = 0, \ \forall k = \overline{2, +\infty}\},$$

$$V_{\text{complex}} = \{h \in \mathbb{C}^s: \quad G_{2k}(h) = 0, \ \forall k = \overline{2, +\infty}\}$$

соответственно.

Ответ на вопрос о наличии и характере связи между многообразием центра системы (1) и многообразием комплексного центра системы (2) даёт теорема 1.

Теорема 1. *Пусть V_{real} – многообразие центра системы (1), содержащей s параметров, а V_{complex} – многообразие комплексного центра системы (2), содержащей те же s параметров. Тогда*

$$V_{\text{real}} = \{h \in \mathbb{R}^s : h \in V_{\text{complex}}\}.$$

Докажем справедливость включений $V_{\text{real}} \subset \{h \in \mathbb{R}^s : h \in V_{\text{complex}}\}$ и $\{h \in \mathbb{R}^s : h \in V_{\text{complex}}\} \subset V_{\text{real}}$.

Лемма 1. *Справедливо включение*

$$V_{\text{real}} \subset \{h \in \mathbb{R}^s : h \in V_{\text{complex}}\},$$

где V_{real} и V_{complex} из теоремы 1.

Доказательство. Покажем справедливость включения $V_{\text{real}} \subset \{h \in \mathbb{R}^s : h \in V_{\text{complex}}\}$. Пусть $h^* \in V_{\text{real}}$. Тогда $O(0, 0)$ – центр системы (1). По теореме Ляпунова система (1) имеет аналитический в окрестности $u = v = 0$ интеграл вида

$$U(u,v) = \sum_{i+j=2}^{+\infty} f_{i,j} u^i v^j,$$

где $f_{2,0} = f_{0,2} = 1$, $f_{1,1} = 0$, $f_{i,j} \in \mathbb{R}$, сходящийся в некоторой области $M = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : |u| < \alpha, |v| < \beta\}$.

Возьмём $0 < \alpha' < \alpha$ и $0 < \beta' < \beta$. Тогда при $(u,v) = (\alpha', \beta')$ числовой ряд $\sum_{i+j=2}^{+\infty} f_{i,j} (\alpha')^i (\beta')^j$ сходится, а значит, все члены этого числового ряда ограничены, т. е. $\exists L > 0 : \left| f_{i,j} (\alpha')^i (\beta')^j \right| \le L$ $(i, j = 0, 1, 2...)$.

Так как $U(u, v)$ – интеграл системы (1), то $U(x, y)$ – интеграл соответствующей комплексной системы (2) с вещественными коэффициентами $p_{i,j}, q_{i,j}$. Ряд $\sum_{i+j=2}^{+\infty} f_{i,j} x^i y^j$ сходится в области

$M' = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : |x| < \alpha', |y| < \beta'\}$, так как в этой области сходится ряд $\sum_{i+j=2}^{+\infty} \left| f_{i,j} x^i y^j \right|$, общий член которого не превосходит общего члена сходящегося ряда $\sum_{i+j=2}^{+\infty} L \left|\frac{x}{\alpha'}\right|^i \left|\frac{y}{\beta'}\right|^j$.

Таким образом, $O(0, 0)$ – центр комплексной системы (2) с вещественными коэффициентами, откуда $h^* \in \{h \in \mathbb{R}^s : h \in V_{\text{complex}}\}$. Лемма доказана.

Перед тем, как перейти к доказательству обратного включения, используя замену $x = -X$, $y = Y$, преобразуем систему (2) к виду

$$\dot{X} = -Y + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\alpha+\beta=k} A_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta, \quad \dot{Y} = X + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\alpha+\beta=k} B_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta, \tag{5}$$

где $\sum_{\alpha+\beta=k} A_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta \equiv p_k(-X, Y), \quad \sum_{\alpha+\beta=k} B_{\alpha\beta} X^\alpha Y^\beta \equiv q_k(-X, Y)$.

Далее вместо системы (5) будем рассматривать её аналог, где независимая переменная $\tau \in \mathbb{C}$, т. е. систему вида

$$\frac{dx}{d\tau} = -y + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\alpha+\beta=k} A_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta, \quad \frac{dy}{d\tau} = x + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\alpha+\beta=k} B_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta. \tag{6}$$

З а м е ч а н и е 1. *Система (5) и система (6) имеют одни и те же условия существования комплексного центра.*

Используя указанную выше замену (не меняя обозначения u и v), вещественную систему (1) также можно привести к виду

$$\dot{u} = -v + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\alpha+\beta=k} A_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta, \quad \dot{v} = u + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\alpha+\beta=k} B_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta. \tag{7}$$

Сформулируем некоторые результаты, полученные для систем (6) и (7) в [2] и в [4].

Рассмотрим систему (6). Замена переменных $z = x + iy$, $w = x - iy$, $T = i\tau$ приводит (6) к виду

$$\frac{dz}{dT} = z + \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\alpha+\beta=k} a_{\alpha\beta} z^\alpha w^\beta, \quad \frac{dw}{dT} = -w - \sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{\alpha+\beta=k} b_{\alpha\beta} w^\alpha z^\beta, \tag{8}$$

где

$$\sum_{\alpha+\beta=k} a_{\alpha\beta} z^\alpha w^\beta = \sum_{\alpha+\beta=k} (B_{\alpha\beta} - iA_{\alpha\beta}) \left(\frac{z+w}{2}\right)^\alpha \left(\frac{z-w}{2i}\right)^\beta,$$

$$\sum_{\alpha+\beta=k} b_{\alpha\beta} w^\alpha z^\beta = \sum_{\alpha+\beta=k} (B_{\alpha\beta} + iA_{\alpha\beta}) \left(\frac{z+w}{2}\right)^\alpha \left(\frac{z-w}{2i}\right)^\beta.$$

У т в е р ж д е н и е 1 [2, с. 12; 4, с. 40]. *Если в системе (6)* $A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$, *то в (8)* $\forall(\alpha,\beta)$ $b_{\alpha\beta} = \overline{a}_{\alpha\beta}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что многочлен $(z+w)^\alpha (z-w)^\beta$ можно представить в виде

$$(z+w)^\alpha (z-w)^\beta = \sum_{l=0}^{\alpha+\beta} D_l^{\alpha;\beta} z^{\alpha+\beta-l} w^l$$

или в виде

$$(z+w)^\alpha (z-w)^\beta = (-1)^\beta (w+z)^\alpha (w-z)^\beta = (-1)^\beta \sum_{l=0}^{\alpha+\beta} D_l^{\alpha;\beta} w^{\alpha+\beta-l} z^l,$$

где $D_l^{\alpha;\beta}$ – некоторые вещественные постоянные, зависящие от l, α и β.

Рассмотрим теперь полиномы $\sum_{\alpha+\beta=k} a_{\alpha\beta} z^\alpha w^\beta$ и $\sum_{\alpha+\beta=k} b_{\alpha\beta} w^\alpha z^\beta$. Положим $Q_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} - iA_{\alpha\beta}$. Имеем

$$\sum_{\alpha+\beta=k} a_{\alpha\beta} z^\alpha w^\beta = \sum_{\beta=0}^{k} 2^{-k} Q_{(k-\beta)\beta} (-i)^\beta (z+w)^{k-\beta} (z-w)^\beta =$$

$$\sum_{\beta=0}^{k} 2^{-k} Q_{(k-\beta)\beta} (-i)^\beta \left(\sum_{l=0}^{k} D_l^{k-\beta;\beta} z^{k-l} w^l\right) = \sum_{\beta=0}^{k} \sum_{l=0}^{k} 2^{-k} Q_{(k-\beta)\beta} (-i)^\beta D_l^{k-\beta;\beta} z^{k-l} w^l =$$

$$\sum_{l=0}^{k} \left(\sum_{\beta=0}^{k} 2^{-k} Q_{(k-\beta)\beta} (-i)^\beta D_l^{k-\beta;\beta}\right) z^{k-l} w^l.$$

Так как с другой стороны $(z+w)^{k-\beta} (z-w)^\beta = (-1)^\beta \sum_{l=0}^{k} D_l^{k-\beta;\beta} w^{k-l} z^l$, то

$$\sum_{\alpha+\beta=k} b_{\alpha\beta} w^{\alpha} z^{\beta} = \sum_{l=0}^{k}\left(\sum_{\beta=0}^{k} 2^{-k}\,\overline{Q}_{(k-\beta)\beta}\, i^{\beta} D_l^{k-\beta;\beta}\right) w^{k-l} z^{l}.$$

Получаем

$$\overline{a}_{(k-l)l} = \overline{\sum_{\beta=0}^{k} 2^{-k} Q_{(k-\beta)\beta}(-i)^{\beta} D_l^{k-\beta;\beta}} = \sum_{\beta=0}^{k} 2^{-k}\,\overline{Q}_{(k-\beta)\beta}\, i^{\beta} D_l^{k-\beta;\beta} = b_{(k-l)l}.$$

Утверждение доказано.

Из доказательства теоремы 1.8.1 [4, с. 40] (или из рассуждений [2, с. 19–22]) следует, что для системы (8) существует единственная формальная замена переменных вида

$$\xi = z + \sum_{k+j=2}^{+\infty} c_{kj} z^k w^j = \xi(z,w), \quad \eta = w + \sum_{k+j=2}^{+\infty} d_{kj} w^k z^j = \eta(z,w), \tag{9}$$

где $c_{k+1,k} = d_{k+1,k} = 0$, $k = \overline{1,+\infty}$, приводящая систему (8) к нормальной форме

$$\frac{d\xi}{dT} = \xi\left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} p'_k (\xi\eta)^k\right), \quad \frac{d\eta}{dT} = -\eta\left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} q'_k (\xi\eta)^k\right). \tag{10}$$

Согласно определению 1.8.1 [4, с. 42] формальную замену (9) будем называть *стандартным* нормализующим преобразованием, а полученную при помощи этого преобразования систему (10) – *стандартной* нормальной формой системы (8).

Введём следующее обозначение: $\mu_k = p'_k - q'_k$, где p'_k, q'_k из (10).

Т е о р е м а 2 [2, с. 25; 4, с. 43]. *Если* $\mu_k = 0, \forall k = \overline{1,+\infty}$, *то замена (9) является аналитической в некоторой окрестности* $z = w = 0$, *приводящей (8) к системе (10) с аналитическими правыми частями.*

Т е о р е м а 3 [4, с. 47]. *Система (8) имеет формальный первый интеграл в окрестности начала координат тогда и только тогда, когда* $\mu_k = 0, \forall k = \overline{1,+\infty}$.

Для системы (6) рассмотрим преобразование вида

$$\tilde{u} = \frac{\xi(x+iy, x-iy) + \eta(x+iy, x-iy)}{2} = x + \sum_{k+j=2}^{+\infty} c'_{kj} x^k y^j,$$
$$\tilde{v} = \frac{\xi(x+iy, x-iy) - \eta(x+iy, x-iy)}{2i} = y + \sum_{k+j=2}^{+\infty} d'_{kj} x^k y^j. \tag{11}$$

У т в е р ж д е н и е 2 [4, с. 50]. *Если в системе (6)* $A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$, *то в (11)* $c'_{kj}, d'_{kj} \in \mathbb{R}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в системе (6) $A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$, тогда из утверждения 1 и теоремы 1.8.12 [4, с. 49] следует, что в (9) выполняются условия $\forall (k,j)\ d_{kj} = \overline{c}_{kj}$.

Представим $(x+iy)^k (x-iy)^j$ в следующем виде:

$$(x+iy)^k (x-iy)^j = \sum_{l=0}^{k+j} D_l^{k;j} i^l x^{k+j-l} y^l,$$

где $D_l^{k;j}$ – некоторые вещественные постоянные, зависящие от *l*, *k* и *j*.

Учитывая $d_{kj} = \overline{c}_{kj}$, преобразуем $\tilde{u}$ из (11):

$$\tilde{u} = x + \frac{\sum_{k+j=2}^{+\infty} c_{kj} (x+iy)^k (x-iy)^j + \sum_{k+j=2}^{+\infty} \overline{c}_{kj} (x-iy)^k (x+iy)^j}{2} =$$

$$x + \frac{\sum_{s=2}^{+\infty}\sum_{t=0}^{s} c_{(s-t)t} (x+iy)^{s-t} (x-iy)^t + \sum_{s=2}^{+\infty}\sum_{t=0}^{s} \overline{c}_{(s-t)t} (x+(-iy))^{s-t} (x-(-iy))^t}{2} =$$

$$x + \frac{\sum_{s=2}^{+\infty}\sum_{t=0}^{s}\left(c_{(s-t)t}\sum_{l=0}^{s} D_l^{s-t;t} i^l x^{s-l} y^l + \overline{c}_{(s-t)t}\sum_{l=0}^{s} D_l^{s-t,t} (-i)^l x^{s-l} y^l\right)}{2} =$$

$$x + \frac{\sum_{s=2}^{+\infty}\sum_{t=0}^{s}\sum_{l=0}^{s} D_l^{s-t;t}\left(c_{(s-t)t} i^l + \overline{c_{(s-t)t}\, i^l}\right) x^{s-l} y^l}{2} = x + \frac{\sum_{s=2}^{+\infty}\sum_{t=0}^{s}\sum_{l=0}^{s} D_l^{s-t;t}\, 2\,\mathrm{Re}(c_{(s-t)t} i^l) x^{s-l} y^l}{2}.$$

Преобразовывая аналогично $\tilde{v}$ из (11), получаем

$$\tilde{v} = y + \frac{\sum_{k+j=2}^{+\infty} c_{kj}(x+iy)^k (x-iy)^j - \sum_{k+j=2}^{+\infty} \overline{c}_{kj}(x-iy)^k (x+iy)^j}{2i} =$$

$$y + \frac{\sum_{s=2}^{+\infty}\sum_{t=0}^{s}\sum_{l=0}^{s} D_l^{s-t,t}\left(c_{(s-t)t} i^l - \overline{c_{(s-t)t}\, i^l}\right) x^{s-l} y^l}{2i} = y + \frac{\sum_{s=2}^{+\infty}\sum_{t=0}^{s}\sum_{l=0}^{s} D_l^{s-t;t}\, 2i\,\mathrm{Im}(c_{(s-t)t} i^l)\, x^{s-l} y^l}{2i}.$$

Таким образом, $c'_{kj}, d'_{kj} \in \mathbb{R}$. Утверждение доказано.

Т е о р е м а 4 [2, с. 23; 4, с. 50]. *Формальное преобразование (11) приводит комплексную систему (6) к нормальной форме*

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tau} = -\tilde{v} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(\sigma_k \tilde{u} - \tau_k \tilde{v})(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)^k,$$
$$\frac{d\tilde{v}}{d\tau} = \tilde{u} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}(\tau_k \tilde{u} + \sigma_k \tilde{v})(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)^k,$$

где $\sigma_k = i\mu_k$, $\tau_k = p'_k + q'_k$ *и все* σ_k, τ_k, c'_{kj}, d'_{kj} *являются полиномами с рациональными коэффициентами от переменных* $A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta}$.

С л е д с т в и е [4, с. 51]. *Для системы (6) имеет место*

$$\frac{dH}{d\tau} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k H^{k+1},$$

где $H = \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2$.

З а м е ч а н и е 2. *Если в (6)* $A_{\alpha\beta}, B_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$, *тогда из теоремы 1.8.12 [4, с. 49] следует, что в (10) выполняются условия* $\forall k\ p'_k = \overline{q}'_k$. *Тогда* $\sigma_k = i\mu_k = i(p'_k - q'_k) = i(\overline{q}'_k - q'_k) \in \mathbb{R}$.

Вернёмся к доказательству обратного включения $\{h \in \mathbb{R}^s : h \in V_{\text{complex}}\} \subset V_{\text{real}}$.

Л е м м а 2. *Справедливо включение*

$$\{h \in \mathbb{R}^s : h \in V_{\text{complex}}\} \subset V_{\text{real}},$$

где V_{real} *и* V_{complex} *из теоремы 1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть теперь $h^* \in \mathbb{R}^s$ и $h^* \in V_{\text{complex}}$. Так как $h^* \in V_{\text{complex}}$, то по определению 2 комплексная система (2) имеет не зависящий от времени сходящийся в некоторой области M' интеграл $U(x, y)$ вида (3). Так как $h^* \in \mathbb{R}^s$, то комплексная система (2) имеет вещественные коэффициенты.

Используя замену $x = -X$, $y = Y$, приводим (2) к виду (5). Система (5), а значит, и система (6), также имеют вещественные коэффициенты и сходящийся в окрестности $O(0, 0)$ интеграл $V(x, y) = U(-x, y)$ вида (3).

Тогда из изложенного выше следует, что функция $H = \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2$, где $\tilde{u}, \tilde{v}$ из (11), также будет аналитическим интегралом системы (6), а значит, и системы (5), причём, по утверждению 2, этот интеграл имеет вещественные коэффициенты, так как $c'_{kj}, d'_{kj} \in \mathbb{R}$.

Отсюда следует, что вещественная система (7), а значит, и система (1), также имеют аналитический в окрестности $u = v = 0$ вещественный интеграл вида (3). Тогда по теореме Ляпунова $O(0, 0)$ – центр системы (1). Значит, $h^* \in V_{\text{real}}$. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 3. *Теорема 1 также справедлива, если предположить, что в системах (1) и (2)* $P(z,w) = \sum_{i=2}^{+\infty} p_i(z,w)$, $Q(z,w) = \sum_{j=2}^{+\infty} q_j(z,w)$, *а функции* $p_i(z,w)$, $q_j(z,w)$ *– однородные многочлены степени i и j соответственно.*

Используя фокусные величины G_{2k} системы (2), содержащей s комплексных параметров, определим идеал фокусных величин $I_G = \langle G_4, G_6, ..., G_{2k}, ...\rangle$.

О п р е д е л е н и е 4 [3, с. 29; 6, с. 108]. *Пусть* $I \subset k[x_1, ..., x_s]$ *– некоторый идеал, где k – бесконечное поле. Положим* $V(I) = \{(h_1, ..., h_s) \in k^s :\ \ g(h_1, ..., h_s) = 0\ \ \forall g \in I\}$.

Из определения 3 получаем, что $V_{\text{complex}} = V(I_G)$ [3, с. 109], причём по теореме Гильберта о базисе I_G конечно порождён. Допустим, что полиномы $g_i, i = \overline{1, l}$, образуют некоторый *конечный* базис идеала I_G, т. е. точки множества V_{complex} получаются как множество комплексных решений системы полиномиальных уравнений $g_i = 0, i = \overline{1,l}$, где g_i – полиномы от переменных $p_{i,j}, q_{i,j}$ из системы (2). Тогда из теоремы 1 следует, что многообразие центра вещественной системы (1) представимо в виде

$$V_{\text{real}} = \{h \in \mathbb{R}^s : g_i(h) = 0 \quad i = \overline{1,l}\}.$$

Таким образом, точки множества V_{complex} получаются как множество комплексных решений системы полиномиальных уравнений $g_i = 0, i = \overline{1,l}$, а точки множества V_{real} получаются как множество вещественных решений этой же системы уравнений.

Заключение. Стоит отметить, что с увеличением числа параметров $p_{i,j}, q_{i,j}$ в системе (1) поиск некоторого конечного базиса идеала фокусных величин становится весьма сложной задачей, поэтому при исследовании характера особой точки в таких системах имеет смысл использовать критерии и методы, позволяющие обойти использование фокусных величин как основного инструмента при решении проблемы.

Например, используя обобщение метода Л. А. Черкаса на случай комплексных систем Льенара [7], в [8] доказано, что полученные в [9] компоненты $V(J_i)$ многообразия комплексного центра $V_{\text{complex}}^{\text{9 cubic}}$ девятипараметрической кубической системы вида (2), приводящейся к системе Льенара, представляют не только достаточные, но и необходимые условия наличия комплексного центра в начале координат этой системы, а именно, $V_{\text{complex}}^{\text{9 cubic}} = \bigcup_{i=1}^{25} V(J_i)$, где идеалы J_i определены конечным числом полиномов. Тогда по теореме 1 следует, что многообразие центра $V_{\text{real}}^{\text{9 cubic}}$ аналогичной вещественной девятипараметрической системы будет полностью описываться решениями 25 систем полиномиальных уравнений, составленных при помощи полиномов, определяющих идеалы J_i.

Таким образом, доказанная в сообщении теорема 1 устанавливает наличие связи между многообразием центра системы (1) и многообразием комплексного центра системы (2), что позволяет определить *за конечное число шагов* характер особой точки $O(0, 0)$ системы вида (1) в случае известного набора полиномов, образующих какой-либо *конечный* базис идеала, определяющего многообразие комплексного центра аналогичной комплексной системы вида (2).

Список использованной литературы

1. *Пуанкаре, А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями / А. Пуанкере. – М.; Л.: Гостехтеориздат, 1947. – 392 с.

2. *Амелькин, В. В.* Нелинейные колебания в системах второго порядка / В. В. Амелькин, Н. А. Лукашевич, А. П. Садовский. – Минск: БГУ, 1982. – 208 с.

3. *Садовский, А. П.* Полиномиальные идеалы и многообразия: пособие для студентов / А. П. Садовский. – Минск: Изд-во БГУ, 2008. – 199 с.

4. *Liu, Y.* Planar Dynamical Systems / Y. Liu, J. Li, W. Huang. – Berlin; Boston: Science Press and Walter de Gruyter GmbH, 2014. – 372 p.

5. *Romanovski, V. G.* The center and cyclicity problems: a computational algebra approach / V. G. Romanovski. – Basel: Birkhauser, 2010. – 330 p.

6. *Кокс, Д.* Идеалы многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры / Д. Кокс, Дж. Литтл, Д. О'Ши. – М.: Мир, 2000. – 687 с.

7. *Садовский, А. П.* Система Льенара с комплексными коэффициентами и метод Черкаса / А. П. Садовский, Т. В. Щеглова // Весн. ГрДУ. Сер. 2. Матэматыка, Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і ўпраўленне. – 2014. – № 1 (170). – С. 21–33.

8. *Садовский, А. П.* Решение проблемы центра и фокуса для кубической системы с девятью параметрами / А. П. Садовский, Т. В. Щеглова // Дифференциальные уравнения. – 2011. – Т. 47, № 2. – С. 209–224.

9. *Bondar, Y. L.* Variety of the center and limit cycles of a cubic system which is reduced to Lienard form / Y. L. Bondar, A. P. Sadovskii // Buletinul Academiei de Stinte a Republicii Moldova. Matematica. – 2004. – Vol. 46, N 3. – P. 71–90.

Поступило в редакцию 08.07.2015