ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.977
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-3-183-187

Поступило в редакцию 12.12.2023
Received 12.12.2023

А. И. Калинин, Л. И. Лавринович

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА В ТРЕХТЕМПОВОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЕ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Аннотация. Рассматривается задача о построении переходного процесса с минимальными энергетическими затратами для линейной сингулярно возмущенной системы, содержащей три группы переменных с существенно различными скоростями изменения. Строятся асимптотические приближения к решению этой задачи в виде программы и обратной связи. Основное достоинство предлагаемых вычислительных процедур состоит в том, что при их применении исходная задача распадается на три невозмущенные задачи оптимального управления меньшей размерности.

Ключевые слова: малый параметр, сингулярно возмущенная система, квадратичный функционал, оптимальное управление, обратная связь, асимптотические приближения

Для цитирования. Калинин, А. И. Асимптотический метод решения задачи оптимизации переходного процесса в трехтемповой сингулярно возмущенной системе / А. И. Калинин, Л. И. Лавринович // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2024. – Т. 68, № 3. – С. 183–187. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-3-183-187

Anatoly I. Kalinin, Leonid I. Lavrinovich

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus

ASYMPTOTIC METHOD FOR SOLVING THE PROBLEM OF TRANSITION PROCESS OPTIMIZATION IN A THREE-TEMPO SINGULARLY PERTURBED SYSTEM

(Communicated by Corresponding Member Valentine V. Gorokhovik)

Abstract. The problem of constructing a transition process with minimal energy costs for a linear singularly perturbed system containing three groups of variables with significantly different rates of change is considered. Asymptotic approximations to solving this problem are constructed in the form of an open-loop and feedback controls. The main advantage of the proposed computational procedures is that the original problem is split into three unperturbed optimal control problems of lower dimension.

Keywords: small parameter, singularly perturbed system, quadratic functional, optimal control, feedback, asymptotic approximations

For citation. Kalinin A. I., Lavrinovich L. I. Asymptotic method for solving the problem of transition process optimization in a three-tempo singularly perturbed system. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2024, vol. 68, no. 3, pp. 183–187 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-3-183-187

Введение. В математической теории оптимальных процессов значительное внимание уделяется задачам оптимизации сингулярно возмущенных систем, содержащих малые параметры при части производных. Это вызвано эффективностью асимптотических методов решения таких задач, при применении которых исходная задача распадается на задачи оптимального управления меньшей размерности. Кроме того, асимптотический подход позволяет избежать интегрирования сингулярно возмущенных систем, которые являются жесткими.

В первых работах, посвященных задачам оптимального управления с сингулярными возмущениями, рассматривались динамические системы, содержащие только две группы переменных с существенно различными скоростями изменения, которые были названы медленными и быстрыми переменных [1–4]. В дальнейшем появились работы по оптимизации систем с несколькими группами быстрых переменных, которые содержали при производных параметры различных порядков малости. Их обзор содержится в [5]. Настоящее сообщение посвящено построению асимптотических приближений в виде программы и обратной связи к решению задачи об управлении с минимальными энергетическими затратами сингулярно возмущенной системой с двумя группами быстрых переменных.

Постановка задачи. В классе r-мерных управляющих воздействий $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))$, $t \in T = [t_*, t^*]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x} = A_{11}x + A_{12}y + A_{13}z + B_1u, \;\; x(t_*) = x_*,$$

$$\mu\dot{y} = A_{21}x + A_{22}y + A_{23}z + B_2u, \;\; y(t_*) = y_*, \tag{1}$$

$$\mu^2\dot{z} = A_{31}x + A_{32}y + A_{33}z + B_3u, \;\; z(t_*) = z_*,$$

$$x(t^*) = 0, \;\; y(t^*) = 0, \;\; z(t^*) = 0, \tag{2}$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*} u^{\mathrm{T}} P u dt \to \min, \tag{3}$$

где μ – малый положительный параметр; t_*, t^* – заданные моменты времени ($t_* < t^*$); x – n_1-вектор медленных переменных; y, z – векторы быстрых переменных размерности n_2 и n_3 соответственно. Остальные элементы задачи имеют соответствующие размеры. В критерии качества P – положительно-определенная симметрическая матрица.

П р е д п о л о ж е н и е 1. *Матрицы A_{33}, $C = A_{22} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{32}$ устойчивые, т. е. действительные части всех их собственных значений отрицательны.*

Введем понятия, которые позволят уточнить то, что будем понимать под асимптотическими приближениями к решению рассмотренной задачи.

О п р е д е л е н и е 1. *Управление $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in T$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка $(N = 0, 1, 2, \ldots)$, если оно переводит динамическую систему (1) в состояние $O(\mu^{N+1})$ и отклоняется по критерию качества (3) от оптимального управления на величину того же порядка малости.*

О п р е д е л е н и е 2. *Вектор-функцию $u^{(N)}(x, y, z, t, \mu)$ назовем асимптотически субоптимальной обратной связью N-го порядка, если для любого начального состояния (x_*, y_*, z_*, t_*), $t_* < t^*$, имеет место $u^{(N)}(x_*, y_*, z_*, t_*, \mu) = u^{(N)}(t_*, \mu)$, где $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in T$, – асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче (1)–(3).*

Настоящее сообщение посвящено построению асимптотически субоптимальных управлений в задаче (1)–(3). Кроме того, строится асимптотически субоптимальная обратная связь нулевого порядка.

Базовые задачи. Основная идея применяемого подхода состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра начальных значений (в момент времени t^*) сопряженных переменных – конечномерных элементов, по которым можно легко восстановить решение задачи. Старшие коэффициенты этих разложений могут быть найдены в результате решения трех базовых невозмущенных задач оптимального управления с n_1, n_2, n_3 фазовыми переменными соответственно. Первой из них является вырожденная задача

$$\dot{x} = A_0 x + B_0 u,\ \ x(t_*) = x_*,\ \ x(t^*) = 0,$$

$$J_1(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*} u^{\mathrm{T}} P u dt \to \min,$$

где

$$A_0 = A_{11} - A_{13}A_{33}^{-1}A_{31} - (A_{21} - A_{13}A_{33}^{-1}A_{32})C^{-1}(A_{21} - A_{23}A_{33}^{-1}A_{31}),$$

$$B_0 = B_1 - A_{13}A_{33}^{-1}B_3 - (A_{12} - A_{13}A_{33}^{-1}A_{32})C^{-1}D,$$

$$D = B_2 - A_{23}A_{33}^{-1}B_3.$$

В дальнейшем эту задачу будем называть первой базовой.

Во второй базовой задаче

$$\dot{y} = Cy + Du,\ y(0) = C^{-1}Du^0(t^*),$$

$$y(-\infty) = 0,\ \ J_2(u) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} u^{\mathrm{T}} P u ds \to \min,$$

$u^0(t),\ t \in T,$ – решение первой базовой задачи.

Третья базовая задача имеет вид

$$\dot{z} = A_{33}z + B_3 u,\ z(0) = A_{33}{}^{-1}B_3(u^0(t^*) + u^*(0)),$$

$$z(-\infty) = 0,\ J_3(u) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} u^{\mathrm{T}} P u d\tau \to \min,$$

где $u^*(s),\ s \le 0,$ – решение второй базовой задачи. Обозначим через $u_*(\tau),\ \tau \le 0,$ – оптимальное управление в третьей базовой задаче.

П р е д п о л о ж е н и е 2. *Динамические системы в базовых задачах являются вполне управляемыми [6].*

Сделанные предположения гарантируют существование и единственность решений базовых задач, которые являются нормальными экстремалями.

Т е о р е м а. *При выполнении предположений 1, 2 в задаче (1)–(3) с достаточно малым* μ *существует единственное оптимальное управление, представимое в виде*

$$u^0(t,\mu) = P^{-1}(B_1^{\mathrm{T}}\psi_1^0(t,\mu) + B_2^{\mathrm{T}}\psi_2^0(t,\mu) + B_3^{\mathrm{T}}\psi_3^0(t,\mu)),\ t \in T.$$

Начальные значения $\lambda(\mu) = \psi_1^0(t^*,\mu),\ \ \nu(\mu) = \psi_2^0(t^*,\mu),\ \ \eta(\mu) = \psi_3^0(t^*,\mu)$ *вектора сопряженных переменных* $(\psi_1^0(t,\mu), \psi_2^0(t,\mu), \psi_3^0(t,\mu)),\ t \in T,$ *который в силу принципа максимума [7] соответствует оптимальному управлению, допускают асимптотические разложения*

$$\lambda(\mu) \sim \lambda_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\lambda_k,\ \ \nu(\mu) \sim \nu_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\nu_k,\ \ \eta(\mu) \sim \eta_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\eta_k,$$

в которых

$$\nu_0 = \sigma_0 - ((A_{12} - A_{13}A_{33}^{-1}A_{32})C^{-1})^{\mathrm{T}}\lambda_0,\ \ \eta_0 = \chi_0 - (A_{13}A_{33}^{-1})^{\mathrm{T}}\lambda_0 + (A_{23}A_{33}^{-1})^{\mathrm{T}}\nu_0,$$

а λ_0, σ_0, χ_0 *– начальные значения сопряженных переменных соответственно в первой, второй и третьей базовых задачах.*

Построение асимптотически субоптимальных управлений. На основе конструктивного доказательства теоремы, которое опирается на принцип максимума и метод пограничных функций [8], разработан алгоритм, позволяющий для заданного числа N построить асимптотическое субоптимальное управление N-го порядка в рассмотренной задаче. Асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка представимо в виде

$$u^{(0)}(t,\mu)=u^{0}(t)+u^{*}((t-t^{*})/\mu)+u_{*}((t-t^{*})/\mu^{2}),\ t\in T, \tag{4}$$

и может быть сформировано непосредственно после решения базовых задач. Заметим, что управление (4) не зависит от начального состояний y_* и z_* векторов быстрых переменных. Для построения асимптотически субоптимальных управлений более высокого порядка нужно дополнительно интегрировать невозмущенные системы линейных дифференциальных уравнений и находить решения невырожденных линейных алгебраических систем.

Асимптотически субоптимальный синтез. Введем в рассмотрение матрицу

$$C_1(t)=\int_{t}^{t^*}\Phi_0(t)P^{-1}\Phi_0^{\mathrm{T}}(t)dt, \tag{5}$$

которая формируется в ходе решения первой базовой задачи, где

$$\Phi_0(t)=F_0(t)B_0,\ t\in T,$$

а $F_0(t),\ \ t\in T,\ -(n\times n)$-матричная функция, являющаяся решением начальной задачи

$$\dot F_0=-F_0A_0(t),\ F_0(t^*)=E_n.$$

С решением второй базовой задачи связана матрица

$$C_2=\int_{-\infty}^{0}(\Pi\Phi(s)P^{-1}\Pi\Phi^{\mathrm{T}}(s))\,ds, \tag{6}$$

где $\Pi\Phi(s)=G(s)D,\ s\le 0,$ а $G(s),\ s\le 0,\ -(n_2\times n_2)$-матричная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{dG}{ds}=-GC,\ G(0)=E_{n_2}.$$

В процессе решения третьей базовой задачи формируется матрица

$$C_3=\int_{-\infty}^{0}(Q\Phi(\tau)P^{-1}Q\Phi^{\mathrm{T}}(\tau))\,d\tau, \tag{7}$$

где $Q\Phi(\tau)=G_1(\tau)B_2,\ \tau\le 0,$ а $G_1(\tau),\ \ \tau\le 0,\ -(n_3\times n_3)$-матричная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{dG_1}{d\tau}=-G_1A_{33},\ G_1(0)=E_{n3}.$$

При выполнении предположения 2 в силу неявного критерия управляемости [5] матрицы (5)–(7) будут невырожденными.

Асимптотически субоптимальная обратная связь нулевого порядка имеет вид

$$\begin{aligned}&u^{(0)}(x,y,z,t,\mu)=\\&=P^{-1}\Big(-B_1^{\mathrm{T}}F_0^{\mathrm{T}}(t)+(B_2^{\mathrm{T}}+B_3^{\mathrm{T}}(A_{23}A_{33}^{-1})^{\mathrm{T}})(C_2^{-1}C^{-1}DP^{-1}B_0^{\mathrm{T}}-((A_{12}-A_{13}A_{33}^{-1}A_{32})C^{-1})^{\mathrm{T}})+\\&+B_3^{\mathrm{T}}(C_3^{-1}A_{33}{}^{-1}B_3(P^{-1}B_0^{\mathrm{T}}+P^{-1}(C^{-1}D)^{\mathrm{T}}C_2^{-1}C^{-1}DP^{-1}B_0^{\mathrm{T}})-(A_{13}A_{33}^{-1})^{\mathrm{T}})\Big)C_1^{-1}(t)F_0(t)x.\end{aligned}$$

Отметим, что построенная обратная связь не зависит от текущих позиций векторов быстрых переменных.

Применяемый подход позволяет исследовать задачи, в которых имеется несколько групп быстрых переменных с иерархией скоростей по целым степеням малого параметра. При этом количество задач, на которые распадается исходная задача, равно количеству групп разнотемповых переменных. Такое обобщение вносит в алгоритм непринципиальные изменения, которые легко прослеживаются на примере рассмотренной задачи. В то же время это приводит к громоздким формулам.

Отметим также, что развитие полученных результатов на нестационарные системы с достаточно гладкими коэффициентами не вызывает принципиальных трудностей.

Заключение. Предложены вычислительные процедуры построения асимптотических приближений к решению рассмотренной задачи в виде программы и обратной связи. При реализации предлагаемых алгоритмов исходная задача оптимального управления распадается на три невозмущенные задачи меньшей размерности. Такая декомпозиция позволяет эффективно решать задачи оптимизации динамических систем с большим числом фазовых переменных. Кроме того, вычислительные процедуры алгоритмов не содержат интегрирований жестких систем.

Список использованных источников

1. Дмитриев, М. Г. Сингулярные возмущения в задачах управления / М. Г. Дмитриев, Г. А. Курина // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 1. – С. 3–51.

2. Калинин, А. И. Асимптотика решений возмущенных задач оптимального управления / А. И. Калинин // Изв. РАН. Техн. кибернетика. – 1994. – № 3. – С. 104–114.

3. Singular perturbation and time scales in control theories and applications. An overview 2002–2012 / Y. Zhang [et al.] // Int. J. Information and Systems Sciences. – 2014. – Vol. 9, N 1. – P. 1–36.

4. Kokotovic, P. V. Singular perturbations in systems and control / P. V. Kokotovic, H. K. Khalil. – New York, 1986.

5. Курина, Г. А. Сингулярно возмущенные задачи с разнотемповыми быстрыми переменными / Г. А. Курина, М. А. Калашникова // Автоматика и телемеханика. – 2022. – № 11. – С. 3–61. https://doi.org/10.31857/S0005231022110010

6. Красовский, Н. Н. Теория управления движением / Н. Н. Красовский. – М., 1968. – 476 с.

7. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин [и др.]. – М., 1983. – 4-е изд. – 392 с.

8. Васильева, А. Б. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных / А. Б. Васильева // Журн. вычисл. математики и матем. физики. – 1963. – Т. 3, № 4. – С. 611–642.

References

1. Dmitriev M. G., Kurina G. A. Singular perturbations in control problems. *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 1, pp. 1–43. https://doi.org/10.1134/s0005117906010012

2. Kalinin A. I. The Asymptotics of the Solution of Perturbed Optimal Control Problems. *International Journal of Computer and Systems Sciences*, 1995, vol. 33, pp. 75–84.

3. Zhang Y., Naidu D. S., Cai C., Zou Y. Singular perturbation and time scales in control theories and applications. An overview 2002–2012. *International Journal of Information and Systems Sciences*, 2014, vol. 9, no. 1, pp. 1–36.

4. Kokotovic P. V., Khalil H. K. *Singular perturbations in systems and control*. New York, 1986.

5. Kurina G. A., Kalashnikova M. A. Singularly Perturbed Problems with Multi-Tempo Fast Variables. *Automation and Remote Control*, 2022, vol. 83, no. 11, pp. 1679–1723. https://doi.org/10.1134/s00051179220110017

6. Krasovskii N. N. *Theory of control of motion: linear systems*. Moscow, 1968. 476 p. (in Russian).

7. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *The mathematical theory of optimal processes. 4th ed*. Moscow, 1983. 392 p. (in Russian).

8. Vasil'eva A. B. Asymptotic methods in the theory of ordinary differential equations containing small parameters in front of the higher derivatives. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1963, vol. 3, no. 4, pp. 823–863. https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90381-1

Информация об авторах

Калинин Анатолий Иосифович – д-р физ.-мат. наук, профессор. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: kalininai@bsu.by. ORCID: 0000-0002-3223-2338.

Лавринович Леонид Иванович – канд. физ.-мат. наук, доцент. Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: lavrinovich@bsu.by. ORCID: 0000-0002-7698-0207.

Information about the authors

Kalinin Anatoly I. – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: kalininai@bsu.by. ORCID: 0000-0002-3223-2338.

Lavrinovich Leonid I. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: lavrinovich@bsu.by. ORCID: 0000-0002-7698-0207.