ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 517.925.52 + 517.926.4
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-3-188-195

Поступило в редакцию 03.01.2024
Received 03.01.2024

**А. К. Деменчук[1], А. В. Конюх[2]**

[1]*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь*
[2]*Белорусский государственный экономический университет, Минск, Республика Беларусь*

# ОБ ОДНОМ УСИЛЕНИИ ТЕОРЕМЫ МАССЕРЫ О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ У ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ

*(Представлено академиком Н. А. Изобовым)*

**Аннотация.** Согласно теореме Массеры обыкновенная дифференциальная линейная неоднородная периодическая система имеет периодическое решение с периодом, совпадающим с периодом системы, если и только если эта система имеет ограниченное решение. В работе вводится класс $\mathcal{L}$ вектор-функций, названных растущими медленнее линейной функции, содержащий класс $\mathcal{B}$ ограниченных вектор-функций в качестве собственного подкласса. Доказано, что приведенная выше теорема Массеры останется верной, если в ее формулировке ограниченное решение заменить решением, растущим медленнее линейной функции. Показано, что множество $\mathcal{B}$ в метрическом пространстве ($\mathcal{L}$, $\mathrm{dist}_c$), где $\mathrm{dist}_c$ – метрика равномерной сходимости вектор-функций на отрезках, имеет первую категорию по Бэру, т. е. почти все в смысле категории вектор-функции пространства ($\mathcal{L}$, $\mathrm{dist}_c$) не являются ограниченными, что показывает существенность полученного усиления теоремы Массеры.

**Ключевые слова:** линейная периодическая система, периодические решения, теорема Массеры

**Для цитирования.** Деменчук, А. К. Об одном усилении теоремы Массеры о существовании периодических решений линейных дифференциальных периодических систем / А. К. Деменчук, А. В. Конюх // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2024. – Т. 68, № 3. – С. 188–195. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-3-188-195

**Aleksandr K. Demenchuk[1], Aleksandr V. Konuh[2]**

[1]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*
[2]*Belarusian State Economic University, Minsk, Republic of Belarus*

## ABOUT ONE STRENGTHENING OF MASSERA’S EXISTENCE THEOREM OF PERIODIC SOLUTIONS OF LINEAR DIFFERENTIAL PERIODIC SYSTEMS

*(Communicated by Academician Nikolay A. Izobov)*

**Abstract.** According to Massera’s theorem, an ordinary differential linear nonhomogeneous periodic system has a periodic solution with a period coinciding with that of the system if and only if this system has a bounded solution. We introduce the class $\mathcal{L}$ of vector functions called growing slower than a linear function. This class contains the class $\mathcal{B}$ of bounded vector functions in as its own subclass. It has been proved that Massera’s above-mentioned theorem will remain true if in its formulation a bounded solution is replaced by a slower growing solution than a linear function. It is shown that the set $\mathcal{B}$ in the metric space ($\mathcal{L}$, $\mathrm{dist}_c$), where $\mathrm{dist}_c$ is the uniform convergence metric vector functions on intervals, has Baer’s first category, i. e. almost everything in the sense of the category of space vector functions ($\mathcal{L}$, $\mathrm{dist}_c$) are not bounded. This fact shows the significance of the obtained strengthening of Massera’s theorem.

**Keywords:** linear periodic system, periodic solution, Massera’s theorem

**For citation.** Demenchuk A. K., Konuh A. V. About one strengthening of the Massera’s existence theorem of periodic solutions of linear differential periodic systems. *Doklady Natsional’noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2024, vol. 68, no. 3, pp. 188–195 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-3-188-195

**Введение.** Многие области современных физики и техники существенно основываются на колебательных процессах или используют их; колебательные процессы играют также важную, а порой и определяющую роль в значительной части природных явлений. Этими обстоятельствами и обусловлена актуальность исследований в теории колебаний и необходимость ее развития. Хотя в современной теории колебаний разработан эффективный аппарат изучения колебаний в нелинейных системах, «линейная» часть теории остается важной и востребованной ее частью как в теоретическом, так и в практическом планах. При этом центр тяжести в практических методах исследований в значительной степени перенесен на системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами (см., напр., [1–3] и мн. др. работы).

Остановимся более подробно на некоторых имеющих непосредственное отношение к настоящей работе исследованиях уругвайского математика Х. Л. Массеры по проблеме существования периодических решений обыкновенных дифференциальных периодических систем (напомним, что разрешенная относительно производной обыкновенная дифференциальная система называется периодической, если ее правая часть периодична по независимой переменной). Достаточно долгое время, вплоть до середины XX в., в теории колебаний считалось, что период периодической дифференциальной системы и период ее периодического решения соизмеримы. И только в 1950 г. Х. Л. Массера показал ошибочность этого предположения. Более того, он получил (в том числе и для линейных систем) условия существования решений, период которых несоизмерим с периодом самой системы [4]. Впоследствии такого рода решения, ввиду их необычности, были названы *сильно нерегулярными* [5, с. 17].

В том же 1950 г. Х. Л. Массера опубликовал еще одну работу [6] о существовании у периодической дифференциальной системы периодических решений того же, что и у системы, периода. В частности, им установлен следующий замечательный результат: в линейном случае существование ограниченного решения у периодической системы влечет за собой существование у нее периодического решения того периода, что и у системы. Другими словами, для существования у периодической линейной дифференциальной системы периодического решения с тем же, что и у системы, периодом необходимо и достаточно существования у нее ограниченного решения. Следовательно, эта теорема Массеры сводит задачу о наличии у периодической линейной дифференциальной системы периодического решения с тем же периодом, что и у системы, к задаче о наличии у нее ограниченного решения. Последняя задача проще исходной, поскольку класс ограниченных непрерывно дифференцируемых вектор-функций существенно шире его подкласса, состоящего из периодических вектор-функций (ниже словосочетание «существенно шире» получит в рассматриваемом случае строгое определение – см. предложение 1).

Таким образом, имеет место следующее достаточно неожиданное свойство: если линейная периодическая система имеет решение из широкого класса (ограниченные решения), то она имеет решение и из узкого класса (периодические решения того же, что и система, периода), – ситуация в общем случае в математике довольно редкая, если иметь в виду то, что чтобы только из факта существования некоторого объекта следовало бы и существование объекта, имеющего дополнительные свойства. Этот результат Х. Л. Массеры перенесен или обобщен на другие типы систем и их решений в [7–15].

Имеет место и отрицательный в этом отношении результат. Известно [16], что ограниченное решение заданной на всей числовой оси линейной однородной периодической системы является почти периодическим (по Бору). Для ее обобщения – почти периодических линейных систем – подобное утверждение в общем случае не верно. Так, в [16] приведено линейное почти периодическое уравнение

$$\ddot{x} - (g^2(t) - \dot{g}(t))x = 0, \quad g(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{t}{n^3}\right),$$

ограниченное решение которого $x(t) = \exp(\int g(t)dt)$ не является почти периодическим.

Вследствие теоремы Массеры возникает естественный вопрос, нельзя ли в ее формулировке класс ограниченных решений заменить некоторым более широким классом с тем, чтобы так измененная теорема осталась верной. Решение этой задачи и является целью настоящего сообщения.

**1. Необходимые определения и предварительные результаты.** Для замкнутости изложения приведем определения нужных в дальнейшем понятий из общей топологии и докажем один предварительный результат, который послужит образцом для одной из теорем работы.

1.1. Напомним, что множество в топологическом пространстве называется *нигде не плотным* [17, с. 45], если внутренность его замыкания пуста, и *множеством первой категории по Бэру* [17, с. 50], если оно представимо в виде счетного объединения нигде не плотных в этом пространстве множеств. Множество, не являющееся множеством первой категории, называется *множеством второй категории по Бэру* [17, с. 50].

Множества первой категории в топологических рассмотрениях считаются «несущественными» или «худыми» в том смысле, что занимают «слишком мало места» [17, с. 50]; по этой причине иногда множества первой категории называют также *тощими* множествами [17, с. 50]. В дальнейшем мы, следуя общей направленности указанного словоупотребления, будем относительно некоторого свойства точек топологического пространства говорить, что почти все точки в смысле категории ему не удовлетворяют, если множество точек, удовлетворяющих этому свойству, является множеством первой категории по Бэру. Если $M$ – топологическое пространство и $M_0 \subset M$, то будем говорить, что пространство $M$ является *существенным расширением* подпространства $M_0$, если $M_0$ имеет первую категорию в пространстве $M$.

1.2. Пусть $M$ – некоторое множество вектор-функций, определенных на всей числовой оси $\mathbb{R}$. Метрика в $M$, задаваемая равенством

$$\operatorname{dist}_u(f, g) = \min\{1, \sup_{t\in\mathbb{R}} \| f(t) - g(t) \|\} \text{ для всех } f, g \in M,$$

называется метрикой *равномерной сходимости на оси*, а метрика, задаваемая равенством

$$\operatorname{dist}_c(f, g) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \min\{\| f(t) - g(t) \|, |t|^{-1}\} \text{ для всех } f, g \in M,$$

– метрикой *равномерной сходимости на отрезках*. Несложно видеть, что сходимость последовательности $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ в метрике $\operatorname{dist}_u$ равносильна равномерной сходимости на оси, а сходимость в метрике $\operatorname{dist}_c$ – равномерной сходимости на каждом отрезке.

Далее через $\mathcal{B}$ обозначаем множество ограниченных непрерывно дифференцируемых вектор-функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, а через $\mathcal{P}_\omega$ – его подмножество, состоящее из ω-периодических вектор-функций. Введем на множестве $\mathcal{B}$ метрику $\operatorname{dist}_u$ равномерной сходимости на оси и обозначим получившееся метрическое пространство через $\mathcal{B}_u$.

1.3. Рассмотрим линейную неоднородную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1}$$

где $n \in \mathbb{N}$ фиксировано, с непрерывными ω-периодическими $(n \times n)$-матрицей коэффициентов $A(t)$ и свободным членом $f(t)$. Ее решения – непрерывно дифференцируемые вектор-функции $x(\cdot): \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. Как сказано выше, согласно теореме Массеры, если у системы (1) имеется ограниченное решение, то у нее имеется и ω-периодическое решение. Подчеркнем, что утверждается не ω-периодичность этого ограниченного решения, а только факт существования у системы (1) ω-периодического решения. В общем случае ограниченное решение ω-периодической системы (1) может не быть ни ω-периодическим, ни периодическим.

Сформулированная в конце введения проблема имеет следующую формальную постановку.

З а д а ч а. *Можно ли расширить класс $\mathcal{B}$ ограниченных вектор-функций до некоторого класса так, чтобы из того, что ω-периодическая система (1) имеет решение в этом более широком классе следовало бы, что она имеет и ω-периодическое решение?*

В дальнейшем, сравнивая между собой класс функций и некоторый его подкласс, мы, чтобы понять соотношение между ними, будем пользоваться языком категорий Бэра. Так, следующее утверждение показывает, что теорема Массеры, сводящая вопрос о существовании решения из множества $\mathcal{P}_\omega$ к вопросу о существовании решения из множества $\mathcal{B}$, означает, что последний вопрос значительно проще, поскольку пространство $\mathcal{B}_u$ является существенным расширением его подпространства $\mathcal{P}_\omega$. Действительно, имеет место

П р е д л о ж е н и е 1. *Множество $\mathcal{P}_\omega$ замкнуто и нигде не плотно в пространстве $\mathcal{B}_u$; в частности, оно имеет в $\mathcal{B}_u$ первую категорию по Бэру.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Чтобы установить замкнутость множества $\mathcal{P}_\omega$, в пространстве $\mathcal{B}_u$ достаточно показать, что для любой вектор-функции $y \notin \mathcal{P}_\omega$ найдется такой шар $\mathcal{B}_y$ с центром в $y$, что $B_y \bigcap \mathcal{P}_\omega = \varnothing$. Покажем это.

Так как $y \notin \mathcal{P}_\omega$, то $y(0) \neq y(\omega)$. Обозначим $r = \| y(0) - y(\omega) \| / 2$ и рассмотрим открытый шар $B_r(y)$ с центром в точке $y$ и радиуса $r$. В этот шар не попадает ни одна ω-периодическая вектор-функция. В самом деле, предположим, что найдется ω-периодическая вектор-функция $g$, принадлежащая шару $B_r(y)$. Обозначим $a = g(0) = g(\omega)$. Так как расстояние $\mathrm{dist}_u$ от $g$ до $y$ меньше $r$, то $\| y(0) - a \| < r$ и $\| y(\omega) - a \| < r$. Тогда получаем неравенство $2r = \| y(0) - y(\omega) \| \leqslant \| y(0) - a \| + {}$ ${}+ \| y(\omega) - a \| < 2r$. Получено противоречие, которое доказывает, что $B_y \bigcap \mathcal{P}_\omega = \varnothing$. Следовательно, множество $\mathcal{B} \setminus \mathcal{P}_\omega$ открыто в метрическом пространстве $\mathcal{B}_u$, а значит, множество $\mathcal{P}_\omega$ замкнуто в этом пространстве.

Точно так же доказывается, что множество $\mathcal{P}_\omega$ нигде не плотно в пространстве $\mathcal{B}_u$. Действительно, возьмем какой-либо шар $B$. В нем найдется вектор-функция $y$, для которой $y(0) \neq y(\omega)$. Рассмотрим определенный выше шар $B_r(y)$. Для него, как показано выше, $B_y \bigcap \mathcal{P}_\omega = \varnothing$. Остается в открытом множестве $B \bigcap B_r(y)$ выбрать какой-либо шар $B_0$. Очевидно, что $B_0 \subset B$ и $B_0 \bigcap \mathcal{P}_\omega = \varnothing$. Следовательно, множество $\mathcal{P}_\omega$ нигде не плотно в метрическом пространстве $\mathcal{B}_u$. Предложение доказано.

Таким образом, почти все в смысле категории Бэра функции пространства $\mathcal{B}_u$ не являются ω-периодическими. Тем не менее, согласно теореме Массеры, только из факта существования решения, принадлежащего «широкому» классу (классу $\mathcal{B}$) вытекает существование решения, принадлежащего «узкому» классу (классу $\mathcal{P}_\omega$).

**2. Основные результаты.**

2.1. Введем следующее

О п р е д е л е н и е. *Будем говорить, что вектор-функция* $x(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ *растет медленнее линейной функции, если имеет место хотя бы одно из соотношений*

$$\lim_{t \to -\infty} (\| x(t) \| / t) = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{t \to +\infty} (\| x(t) \| / t) = 0. \tag{2}$$

Класс непрерывно дифференцируемых вектор-функций $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, которые растут медленнее линейной функции, обозначим через $\mathcal{L}$. Очевидно, что $\mathcal{B} \subset \mathcal{L}$ и это включение собственное. Действительно, например, не ограниченная на $\mathbb{R}$ вектор-функция $(\ln(t^2 + 1), 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$ удовлетворяет второму условию в (2), т. е. растет медленнее линейной функции. Поэтому следующее утверждение усиливает теорему Массеры.

Т е о р е м а 1. *У* ω*-периодической системы (1) тогда и только тогда существует* ω*-периодическое решение, когда у нее существует решение, которое растет медленнее линейной функции.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь очевидным образом вытекает из цепочки включений $\mathcal{P}_\omega \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{L}$.

Д о с т а т о ч н о с т ь утверждения теоремы равносильна доказательству того, что если у системы (1) нет ω-периодических решений, то у нее нет и решений, которые растут медленнее линейной функции.

В доказательстве теоремы Массеры показано (см., напр., [18, с. 221–222] или [19, с. 484]), что если у системы (1) нет ω-периодических решений, то для любого ее решения $x(\cdot)$ при всех $m \in \mathbb{N}$ для норм векторов имеет место равенство

$$\langle x(\omega m), c \rangle = \langle x(0), c \rangle + m \langle b, c \rangle \tag{3}$$

для некоторых ненулевых и не ортогональных друг другу векторов $b$ и $c$, где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – естественное (стандартное) умножение в пространстве $\mathbb{R}^n$. Из равенства (3) очевидно следует, что при всех достаточно больших $m$ справедливо неравенство

$$\| x(\omega m) \| \| c \| \geqslant m | \langle b, c \rangle | - \| x(0) \| \| c \|,$$

разделив обе части которого на $m\omega \| c \|$, получим

$$\frac{\| x(\omega m) \|}{\omega m} \geqslant \frac{| \langle b, c \rangle |}{\omega \| c \|} - \frac{\| x(0) \|}{\omega m} \to \frac{| \langle b, c \rangle |}{\omega \| c \|} > 0 \text{ при } m \to +\infty.$$

Таким образом, отсутствие у системы (1) ω-периодических решений влечет за собой отсутствие у нее решений, для которых выполняется второе соотношение в (2).

Сделав в системе (1) замену независимой переменной $t \mapsto -t$ и воспользовавшись для получившейся системы проведенными рассуждениями, заключаем, что отсутствие у системы (1) ω-периодических решений влечет за собой отсутствие у нее решения, для которых выполняется первое соотношение в (2). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. *Скажем, что вектор-функция* $x(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ *растет* ω*-медленнее линейной функции, если имеет место хотя бы одно из соотношений*

$$\lim_{\mathbb{Z}\ni m\to-\infty}(\| x(\omega m)\|/m)=0 \text{ или } \lim_{\mathbb{Z}\ni m\to+\infty}(\| x(\omega m)\|/m)=0,$$

*где* $\mathbb{Z}$ *– множество целых чисел. Очевидно, что введенный класс вектор-функций, который обозначим через* $\mathcal{L}(\omega)$, *содержит в качестве собственного подкласса класс* $\mathcal{L}$ *вектор-функций, растущих медленнее линейной.*

Как следует из доказательства достаточности теоремы 1, если в ее формулировке вместо класса $\mathcal{L}$ взять более широкий класс $\mathcal{L}(\omega)$, то теорема останется верной.

Поэтому сформулированную выше задачу также решает усиливающая теорему 1 следующая

Т е о р е м а 1′. *У* ω*-периодической системы (1) тогда и только тогда существует* ω*-периодическое решение, когда у нее существует решение, которое растет* ω*-медленнее линейной функции.*

Хотя теорема 1′ и усиливает теорему 1, но это усиление формальное, поскольку, как показывает следующее утверждение, если решение ω-периодической системы (1) принадлежит классу $\mathcal{L}(\omega)$, то оно принадлежит и классу $\mathcal{L}$.

Л е м м а 1. *Если решение* $x(\cdot)$ ω*-периодической системы (1) растет* ω*-медленнее линейной функции, то оно растет и медленнее линейной функции.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть решение $x(t)$ ω-периодической системы (1) удовлетворяет второму соотношению в (2). Оценим по норме решение $x(t)$. Имеем

$$\|\dot{x}(t)\|=\|A(t)\|\|x(t)\|+\|f(t)\|,\quad t\in\mathbb{R}.$$

Так как матрица $A(\cdot)$ и свободный член $f(\cdot)$ периодические, то, в частности, они ограничены на оси, т. е. найдутся такие положительные постоянные $a$ и $b$, что $\|A(t)\|\leqslant a$ и $\|f(t)\|\leqslant b$ при всех $t\in\mathbb{R}$. Поэтому из предыдущего неравенства получаем

$$\|\dot{x}(t)\|\leqslant a\|x(t)\|+b,\quad t\in\mathbb{R},$$

или, воспользовавшись хорошо известным неравенством $\|x(t)\|\leqslant\|\dot{x}(t)\|$, будем иметь

$$\|x(t)\|\leqslant a\|x(t)\|+b,\quad t\in\mathbb{R}.$$

Проинтегрировав это неравенство по отрезку $[\omega m, t]$, где $t\in[\omega m,\omega(m+1)]$, после очевидных оценок и преобразований вследствие неравенства Гроноулла–Беллмана (см., напр., [18, с. 108–109] или [19, с. 37–38]) придем к оценке

$$\|x(t)\|\leqslant(\|x(\omega m)\|+b\omega)e^{\omega a},$$

откуда получаем

$$\frac{\|x(t)\|}{t}\leqslant\frac{\|x(\omega m)\|}{m}\frac{e^{\omega a}}{\omega}+\frac{be^{\omega a}}{m},$$

т. е. $(\|x(t)\|/t)\to 0$ при $t\to+\infty$.

Доказательство леммы в случае, если решение $x(t)$ удовлетворяет первому соотношению в (2), аналогично. Лемма доказана.

З а м е ч а н и е 2. *В этом замечании в свою очередь формально усилим теорему 1′. Скажем, что вектор-функция* $x(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ *растет* ω*-слабее линейной функции, если имеет место хотя бы одно из соотношений*

$$\lim_{\mathbb{Z}\ni m\to-\infty}(\min\{\|x(t)\|: t\in[\omega(m-1),\omega m)\}/m)=0,$$
$$\lim_{\mathbb{Z}\ni m\to+\infty}(\min\{\|x(t)\|: t\in[\omega m,\omega(m+1))\}/m)=0. \qquad (4)$$

Обозначим через $\mathcal{L}^*$ класс так определенных вектор-функций. Очевидно, что класс $\mathcal{L}^*$ содержит в качестве собственного подкласса класс $\mathcal{L}(\omega)$. Рассуждая так же, как в доказательстве леммы 1, заключаем, что из второго (первого) соотношения в (4) вытекает второе (первое) соотношение в (2). Следовательно, из леммы 1 следует, что имеет место

Л е м м а 1′. *Если решение $x(\cdot)$ ω-периодической системы (1) растет ω-слабее линейной функции, то оно растет и медленнее линейной функции.*

Поэтому справедлива формально усиливающая теоремы 1 и 1′ следующая

Т е о р е м а 1″. *У ω-периодической системы (1) тогда и только тогда существует ω-периодическое решение, когда у нее существует решение, которое растет ω-слабее линейной функции.*

Хотя теоремы 1, 1′ и 1″ как показано в замечаниях, равносильны, при практическом применении теорема 1″ удобнее, так как установить принадлежность вектор-функции классу $\mathcal{L}^*$ проще, чем более узким по сравнению с ним классам $\mathcal{L}$ или $\mathcal{L}(\omega)$. Так как теоремы 1, 1′ и 1″ равносильны, то в дальнейшем мы рассматриваем только теорему 1, поскольку условия (2) предпочтительнее условий (3) и (4), так как не используют величину ω – период системы (1).

2.2. Вследствие теоремы 1 естественно возникает вопрос, насколько существенно расширение $\mathcal{L}$ множества $\mathcal{B}$?

Если рассматривать в $\mathcal{L}$ метрику $\mathrm{dist}_u$ равномерной сходимости на оси, то с точки зрения категорий различий между $\mathcal{L}$ и $\mathcal{B}$ нет, поскольку, как несложно видеть, в этой метрике $\mathcal{L}$ является объединением двух открытых множеств: интересующего нас множества $\mathcal{B}$ и его дополнения $\mathcal{L}\setminus\mathcal{B}$.

Рассмотрим в $\mathcal{L}$ метрику $\mathrm{dist}_c$ равномерной сходимости на отрезках. Получившееся метрическое пространство обозначим через $\mathcal{L}_c$.

П р е д л о ж е н и е 2. *Множество $\mathcal{B}$ имеет в метрическом пространстве $\mathcal{L}_c$ первую категорию по Бэру.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Через $\mathcal{B}_m$ обозначим множество тех вектор-функций $f\in\mathcal{B}$, для которых $\|f(t)\|<m$ для всех $t\in\mathbb{R}$. Тогда $\mathcal{B}=\bigcup_{m\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_m$. Докажем, что множество $\mathcal{B}_m$ нигде не плотно в $\mathcal{L}_c$, откуда, очевидно, и будет следовать сформулированное утверждение.

Рассмотрим какой-либо открытый шар $B_r$ в пространстве $\mathcal{L}_c$ с центром в точке $g$. Тогда включение $f\in B_r$ равносильно неравенству $\mathrm{dist}_c(g,f)<r$, которое, в свою очередь, равносильно неравенству $\|g(t)-f(t)\|<r$ при всех $|t|\leqslant 1/r$. Выберем какую-либо функцию $f\in B_r$ и продолжим ее за пределы отрезка $|t|\leqslant 1/r$ так, чтобы она была не ограниченной и росла медленнее линейной функции. Обозначим эту продолженную функцию через $\widetilde{f}$ (для определенности без нарушения общности считаем, что $\|\widetilde{f}\|(t)/t\to 0$ при $t\to+\infty$).

Очевидно, что $\widetilde{f}$ принадлежит шару $B_r$. Так как $\widetilde{f}$ не ограничена, то найдется такой момент $\tau>0$, что $\|\widetilde{f}(\tau)\|\geqslant m+1$. Обозначим $\rho=[\tau]+1$ и рассмотрим в $\mathcal{L}_c$ шар $B_{1/\rho}(\widetilde{f})$ с центром в точке $\widetilde{f}$ и радиуса $1/\rho$. Предположим, что найдется функция $h\in\mathcal{B}_m$, принадлежащая шару $B_{1/\rho}(\widetilde{f})$. Это равносильно тому, что

$$\|\widetilde{f}(t)-h(t)\|<1/\rho \text{ при } |t|\leqslant\rho=[\tau]+1.$$

В частности, при $t=\tau$ должно выполняться неравенство $\|\widetilde{f}(\tau)-h(\tau)\|<1/([\tau]+1)$. Но левая часть последнего неравенства не меньше $\|\widetilde{f}(\tau)\|-\|h(\tau)\|>m+1-m=1$, а правая меньше единицы. Противоречие. Следовательно, $B_{1/\rho}(\widetilde{f})\bigcap\mathcal{B}_m=\varnothing$.

Остается в открытом множестве $B\bigcap B_{1/\rho}(\widetilde{f})$ выбрать какой-либо шар $B_0$. Очевидно, что $B_0\subset B$ и $B_0\bigcap\mathcal{B}_m=\varnothing$. Следовательно, множество $\mathcal{B}_m$ нигде не плотно в метрическом пространстве $\mathcal{L}_c$. Предложение доказано.

Таким образом, в метрическом пространстве $\mathcal{L}_c$ почти все функции в смысле категории не ограничены на оси, т. е. не принадлежат множеству $\mathcal{B}$, т. е. пространство $\mathcal{L}_c$ является существенным расширением подпространства $\mathcal{B}$.

**Заключение.** Введен класс $\mathcal{L}$ вектор-функций, определенных на оси и названных *растущими медленнее линейной функции*, содержащий класс $\mathcal{B}$ ограниченных вектор-функций в качестве собственного подкласса. Доказано, что обыкновенная неоднородная линейная ω-периодическая система тогда и только тогда имеет ω-периодическое решение, когда она имеет решение, принадлежащее классу $\mathcal{L}$. Заменив в этом утверждении класс $\mathcal{L}$ классом $\mathcal{B}$, получаем классическую теорему Массеры о существовании ω-периодических решений ω-периодических линейных систем. Следовательно, доказанное утверждение усиливает теорему Массеры. Качество этого усиления характеризует следующее утверждение: в метрическом пространстве $(\mathcal{L}, \mathrm{dist}_c)$, где $\mathrm{dist}_c$ – метрика равномерной сходимости вектор-функций на отрезках, множество $\mathcal{B}$ имеет первую категорию по Бэру.

**Благодарности.** Авторы признательны Е. А. Барабанову за полезные обсуждения результатов.

**Acknowledgements.** The authors are grateful to E. A. Barabanov for helpful discussions of the results.

## Список использованных источников

1. Еругин, Н. П. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами / Н. П. Еругин. – Минск, 1963. – 272 с.

2. Чезари, Л. Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных систем / Л. Чезари. – М., 1964. – 478 с.

3. Якубович, В. А. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения / В. А. Якубович, В. М. Старжинский. – М., 1972. – 720 с.

4. Massera, J. L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales / J. L. Massera // Bol. de la Facultad de Ingenieria. – 1950. – Vol. 4, N 1. – P. 37–45.

5. Деменчук, А. Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управление / А. Деменчук. – Saarbrücken, 2012. – 186 с.

6. Massera, J. L. The existence of periodic solutions of systems of differential equations / J. L. Massera // Duke Math. J. – 1950. – Vol. 17, N 4. – P. 457–475. https://doi.org/10.1215/s0012-7094-50-01741-8

7. Makay, G. On some possible extensions of Massera's theorem / G. Makay // Electronic J. Qual. Theory Differ. Equ. – 1999. – N 16. – 8 p. https://doi.org/10.14232/ejqtde.1999.5.16

8. Murakami, S. Massera's theorem for almost periodic solutions of functional differential equations / S. Murakami, T. Naito, N. V. Minh // J. Math. Soc. Japan. – 2004. – Vol. 56, N 1. – P. 247–268. https://doi.org/10.2969/jmsj/1191418705

9. Okada, Y. Massera type theorems in hyperfunctions with refleexive Banach values / Y. Okada // RIMS Kuokyuroku Bessatsu. – 2013. – Vol. B40. – P. 001–014.

10. Kato, J. Bounded Solutions and Periodic Solutions to Linear Differential Equations in Banach Spaces / J. Kato, T. Naito, J. S. Shin // Vietnam J. of Math. – 2002. – Vol. 30. – P. 561–575.

11. Fleury, M. Massera's theorems for various types of equations with discontinuous solution / M. Fleury, J. G. Mesquita, A. Slavik // J. of Differ. Equ. – 2020. – Vol. 269, N 12. – P. 11667–11693. https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.08.043

12. Sharma, R. R. An abstract measure differential equation / R. R. Sharma // Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol. 32. – P. 503–510. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1972-0291600-3

13. Yong, L. Massera type criterion for linear functional differential equations with advanced and delay / Li Yong, Lin Zhenghua, Li Zhaoxing // J. Math. Anal. Appl. – 1996. – Vol. 200, N 3. – P. 717–725. https://doi.org/10.1006/jmaa.1996.0235

14. Zubelevich, O. A note on theorem of Massera / O. Zubelevich // Regul. Chaotic Dyn. – 2006. – Vol. 11, N 4. – P. 475–481. https://doi.org/10.1070/rd2006v011n04abeh000365

15. Игнатьев, А. О. О некоторых свойствах решений систем линейных разностных уравнений с периодическими правыми частями / А. О. Игнатьев // Дифференц. уравнения. – 2023. – Т. 59, № 4. – С. 494–500. https://doi.org/10.31857/S0374064123040064

16. Mingarelli, A. B. A counter-example in the theory of almost periodic differential equations / A. B. Mingarelli, F. Q. Pu, L. Zheng // Rocky Mounth. J. Math. – 1995. – Vol. 25, N 1. – P. 437–440. https://doi.org/10.1216/rmjm/1181072293

17. Александрян, Р. А. Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян. – М., 1979. – 336 с.

18. Демидович, Б. П. Лекции по математической теории устойчивости / Б. П. Демидович. – М., 1967. – 472 с.

19. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М., 1970. – 720 с.

## References

1. Erugin N. P. *Linear ordinary differential systems with periodic and quasiperiodic coefficients*. Minsk, 1963. 272 p. (in Russian).

2. Cesari L. *Asymptotic Behavior and Stability Problems in Ordinary Differential Equations*. Springer Berlin, Heidelberg, 1959. 271 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-40368-6

3. Yakubovich V. A., Starzhinsky V. M. *Linear differential equations with periodic coefficients and their applications*. Moscow, 1972. 720 p. (in Russian).

4. Massera J. L. Observaciones sobre las soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales. *Boletin de la Facultad de Ingenieria*, 1950, vol. 4, no. 1, pp. 37–45.

5. Demenchuk A. *Asynchronous oscillations in differential systems. Conditions of existence and control*. Saarbrücken, 2012. 186 p. (in Russian).

6. Massera J. L. The existence of periodic solutions of systems of differential equations. *Duke Mathematical Journal.* 1950, vol. 17, no. 4, pp. 457–475. https://doi.org/10.1215/s0012-7094-50-01741-8

7. Makay G. On some possible extensions of Massera's theorem. Electronic *Journal of Qualitative Theory of Differential Equations*, 1999, no. 16, 8 p. https://doi.org/10.14232/ejqtde.1999.5.16

8. Murakami S., Naito T., Minh N. V. Massera's theorem for almost periodic solutions of functional differential equations. *Journal of the Mathematical Society of Japan*, 2004, vol. 56, no. 1, pp. 247–268. https://doi.org/10.2969/jmsj/1191418705

9. Okada Y. Massera type theorems in hyperfunctions with refleexive Banach values. *RIMS Kuokyuroku Bessatsu*, 2013, vol. B40, pp. 001–014.

10. Kato J., Naito T., Shin J. S. Bounded Solutions and Periodic Solutions to Linear Differential Equations in Banach Spaces. *Vietnam Journal of Mathematics*, 2002, vol. 30, pp. 561–575.

11. Fleury M., Mesquita J. G., Slavik A. Massera's theorems for various types of equations with discontinuous solution. *Journal of Differential Equations*, 2020, vol. 269, no. 12, pp. 11667–11693. https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.08.043

12. Sharma R. R. An abstract measure differential equation. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1972, vol. 32, pp. 503–510. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1972-0291600-3

13. Li Yong, Lin Zhenghua, Li Zhaoxing. A Massera type criterion for linear functional differential equations with advance and delay. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1996, vol. 200, no. 3, pp. 717–725. https://doi.org/10.1006/jmaa.1996.0235

14. Zubelevich O. A note on theorem of Massera. *Regular and Chaotic Dynamics*, 2006, vol. 11, no. 4, pp. 475–481. https://doi.org/10.1070/rd2006v011n04abeh000365

15. Ignat'ev A. O. On some properties of solutions of systems of linear difference equations with periodic right-hand sides. *Differential Equations*, 2023, vol. 59, pp. 502–509. https://doi.org/10.1134/s0012266123040067

16. Mingarelli A. B., Pu F. Q., Zheng L. A counter-example in the theory of almost periodic differential equations. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 1995, vol. 25, no. 1, pp. 437–440. https://doi.org/10.1216/rmjm/1181072293

17. Aleksandryan R. A., Mirzakhanyan E. A. *General topology*. Moscow, 1979. 336 p. (in Russian).

18. Demidovich B. P. *Lectures on the mathematical theory of stability*. Moscow, 1967. 472 p. (in Russian).

19. Hartman F. *Ordinary differential equations*. Moscow, 1964. 478 p. (in Russian).

## Информация об авторах

*Деменчук Александр Константинович* – д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: demenchuk@im.bas-net.by.

*Конюх Александр Владимирович* – канд. физ.-мат. наук, доцент. Белорусский государственный экономический университет (пр. Партизанский, 26, 220070, Минск, Республика Беларусь). E-mail: al3128@gmail.com.

## Information about the authors

*Demenchuk Aleksandr K.* – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Science of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: demenchuk@im.bas-net.by.

*Konuh Aleksandr V.* – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor. Belarusian State Economic University (26, Partizanski Ave., 220070, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: al3128@gmail.com.