ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

## *МАТЕМАТИКА*

## *MATHEMATICS*

УДК 511.42
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-6-447-453

Поступило в редакцию 10.10.2024
Received 10.10.2024

**В. И. Берник[1], Д. В. Васильев[1], А. С. Кудин[1], Ж. И. Пантелеева[2]**

*[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь*
*[2]Белорусский государственный аграрный технический университет, Минск, Республика Беларусь*

# ДЛИНЫ ИНТЕРВАЛОВ, НА КОТОРЫХ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ МОГУТ ПРИНИМАТЬ МАЛЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

*(Представлено академиком Ю. С. Хариным)*

**Аннотация.** Понятие дискриминанта многочлена второй степени позволяет легко получать информацию о его действительных и комплексных корнях. Дискриминант многочлена произвольной степени также является важной характеристикой многочлена, которая оказывается полезной во многих задачах теории диофантовых приближений. В 2023 г. белорусский математик Д. Бодягин решил поставленную в 1960-х годах проблему Давенпорта о диапазоне значений дискриминантов многочленов для случая третьей степени. В данной работе полностью решена проблема делимости дискриминантов многочленов третьей степени на большую степень простого числа.

**Ключевые слова:** диофантовы приближения, $p$-адические числа, дискриминант целочисленного многочлена, теорема Дирихле, теорема Хинчина

**Для цитирования.** Длины интервалов, на которых целочисленные многочлены могут принимать малые значения / В. И. Берник [и др.] // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2024. – Т. 68, № 6. – С. 447–453. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-6-447-453

**Vasili I. Bernik[1], Denis V. Vasilyev[1], Alexey S. Kudin[1], Zhanna I. Panteleeva[2]**

*[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus*
*[2]Belarusian State Agrarian Technical University, Minsk, Republic of Belarus*

# LENGTHS OF THE INTERVALS WHERE INTEGER POLYNOMIALS CAN ATTAIN SMALL VALUES

*(Communicated by Academician Yuriy S. Kharin)*

**Abstract.** The concept of the discriminant of a quadratic polynomial allows for easy extraction of information about its real and complex roots. The discriminant of a polynomial of an arbitrary degree is also an important characteristic of the polynomial, which proves useful in many problems in the theory of Diophantine approximation. In 2023, Belarusian mathematician D. Badziahin solved a problem posed by Davenport in the 1960s concerning the range of values of discriminants in the cubic case. The paper provides a complete solution to the problem of divisibility of discriminants by large powers of prime numbers in the case of cubic polynomials.

**Keywords:** Diophantine approximation, $p$-adic numbers, discriminant of an integer polynomial, Dirichlet's theorem, Khinchine's theorem

**For citation.** Bernik V. I., Vasilyev D. V., Kudin A. S., Panteleeva Zh. I. Lengths of the intervals where integer polynomials can attain small values. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2024, vol. 68, no. 6, pp. 447–453 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-6-447-453

**Введение.** В середине XIX в. П. Дирихле предложил метод, позволяющий получать хорошие приближения иррациональных чисел рациональными числами и трансцендентных чисел алгебраическими числами.

Т е о р е м а  Д и р и х л е. *Для любого действительного числа $x$ из интервала $I = [a; b]$ и натурального числа $Q > 1$ всегда можно найти целые числа $p$ и $1 \le q \le Q$, такие что верно неравенство*

$$|x - p/q| < q^{-1}Q^{-1}. \tag{1}$$

Неравенство (1) можно переписать в виде

$$|qx - p| < Q^{-1} \tag{2}$$

и понимать $qx - p$ как значение линейного многочлена в точке $x$.

Для целочисленного многочлена

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_j \in \mathbb{Z},$$

через $\deg P = n$, $a_n \neq 0$ будем обозначать степень $P(x)$, а $H = H(P) = \max\limits_{0 \le j \le n} |a_j|$ назовем высотой $P(x)$. С помощью принципа ящиков Дирихле легко доказывается теорема 1, обобщающая (2) на многочлены произвольной степени. Далее через $c_1 = c_1(n), c_2, \ldots$ будем обозначать величины, зависящие от $n$ и не зависящие от $H$ и $Q$.

Т е о р е м а 1. *Для любых $x \in I$ и $Q \ge 2$ найдется полином $P(x)$ из класса полиномов*

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(t) \in \mathbb{Z}[t]: \ \deg P \le n, \ H(P) \le Q\},$$

*такой что*

$$|P(x)| < c_1 H^{-n}. \tag{3}$$

Из (3) нетрудно доказать, что для любого трансцендентного числа $x$ неравенство

$$|P(x)| < c_2 H^{-n} \tag{4}$$

имеет бесконечное число решений в полиномах $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Неравенство (4) нельзя принципиально улучшить. Например, при $x_1 = \sqrt[n+1]{2}$ можно вычислить такую величину $c_3(x_1)$, при которой для всех $P(x)$ выполняется неравенство $|P(x_1)| > c_3 H^{-n}$ [1].

Однако неравенство (4) допускает улучшение для «большей части» $x \in I$ в смысле меры Лебега на прямой $\mu_1$.

Т е о р е м а 2. *Для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $|P(x)| < \varepsilon H^{-n}$ имеет для почти всех $x \in I$ бесконечное число решений в целочисленных полиномах $P(x)$.*

Удивительно точную характеристику неравенств вида (3), (4) получил 100 лет назад А. Я. Хинчин [2].

Обозначим через $\Psi(x)$ монотонно убывающую функцию положительного аргумента $x$, а через $\mathcal{L}_n(\Psi)$ – множество $x \in I$, для которых неравенство

$$|P(x)| < H^{-n+1}\Psi(H)$$

имеет бесконечное число решений в полиномах $P(x)$.

Т е о р е м а Х и н ч и н а [2]. *Справедливы равенства*

$$\mu_1(\mathcal{L}_1(\Psi)) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sum\limits_{H=1}^{\infty} \Psi(x) < \infty, \\ \mu_1(I), & \text{если } \sum\limits_{H=1}^{\infty} \Psi(x) = \infty. \end{cases} \tag{5}$$

В [3; 4] теорема Хинчина была обобщена с многочленов первой степени на многочлены произвольной степени. Если $\Psi(H) = H^{-v}$, $v > 1$, то ряд сходится и в этом случае справедливо равенство (5). Эта задача была сформулирована в 1932 г. К. Малером и была названа Проблемой Малера. Она была решена в 1964 г. В. Г. Спринджуком [5]. В 1998–2002 гг. аналог теоремы Хинчина был получен для произвольных кривых и поверхностей [6].

Если взять $v_1 = 2$ и $v_2 = 10^6$, то мера $\mu_1(\mathcal{L}_n(H^{-v}))$ окажется равной нулю, хотя первое из множеств $\mathcal{L}_n(H^{-v_2})$ несомненно «обильнее» второго. В этом случае для различения величин множеств используют понятие размерности Хаусдорфа dim.

Т е о р е м а Б е й к е р а – Ш м и д т а – Б е р н и к а [3]. *Обозначим через* $B(w)$ *множество* $x \in I$, *для которого неравенство* $|P(x)| < H^{-w}$, $w > n$, *имеет бесконечное число решений в полиномах* $P(x)$. *Тогда*

$$\dim B(w) = \frac{n+1}{w+1}.$$

**Основные результаты.** В последние годы в связи с новыми приложениями метрической теории диофантовых приближений на многообразиях [7] вырос интерес к новым задачам в данной области. Определим два класса полиномов из $\mathcal{P}_n(Q)$:

$$\mathcal{P}_n(Q, v) = \{P(t) \in \mathcal{P}_n(Q): \ |P'(\alpha_1)| < Q^{1-v}, \ 0 \le v\},$$

$$T_n(Q, w) = \{P(t) \in \mathcal{P}_n(Q): \ 1 \le |D(P)| < Q^{2n-2-2w}, \ 0 \le w \le n-1\},$$

где $D(P)$ – дискриминант полинома $P(t)$ с корнями $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$:

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \le i < j \le n} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Имеется немало статей, в которых получены результаты о мощности классов $\mathcal{P}_n(Q, v)$ и $T_n(Q, w)$. Оценка снизу

$$\# T_n(Q, w) > c_4 Q^{n+1-\frac{n+2}{n}w} \tag{6}$$

получена для всех $0 \le w \le n-1$. Оценки сверху для $\#\mathcal{P}_n(Q, v)$ получены в [8] при $w < 1{,}5$, а оценки сверху для $\# T_n(Q, w)$ получены при $0 \le w < 0{,}6$. Недавно Д. Бодягин [9; 10] доказал при любом $\varepsilon > 0$ и $Q > Q_0(\varepsilon)$ оценку $\# T_3(Q, w) < Q^{4-5/3w+\varepsilon}$, которая вместе с оценкой (6) дает правильный порядок $\# T_n(Q, w)$ при $n = 3$.

В данном сообщении мы предлагаем единый метод, позволяющий получать новые оценки сверху для $\# T_3(Q, w)$ и $\#\mathcal{P}_3(Q, v)$ не только в поле действительных, но и в поле $p$-адических чисел.

Пусть корни $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ полинома $P(t)$ упорядочены следующим образом:

$$\alpha_1 \le \alpha_2 \le ... \le \alpha_n,$$

и $\alpha$ – корень, ближайший к $x$. В неравенстве

$$|P(x)| < Q^{-s}, \ n \le 3, \tag{7}$$

требуется найти меру множества $x \in I$, для которых выполняется (7). Без ограничения общности положим $j = 1$.

Л е м м а 1. *Справедливы неравенства*

$$|x - \alpha_1| < 2^n |P(x)| |P'(\alpha_1)|^{-1}, \tag{8}$$

$$|x - \alpha_1| < 2^n \min_{2 \le j \le n} (|P(x)| |P'(\alpha_1)|^{-1} |\alpha_1 - \alpha_2| \cdot ... \cdot |\alpha_1 - \alpha_j|)^{1/j}. \tag{9}$$

Лемма 1 доказана в [11]. Недавно было доказано [12], что неравенства (8), (9) – точные, а именно, что всегда существует $j$, для которого выполняется неравенство, противоположное (8), (9). Эти неравенства показывают, что все решения содержатся внутри интервалов $\sigma(P)$, определяемых (8), (9). Проведем классификацию полиномов из множеств $\mathcal{P}_n(Q)$, $\mathcal{P}_n(Q, v)$, $T_n(Q, w)$ при

$Q/2 \le H \le Q.$ Зададим $\varepsilon_1 > 0,$ целое $T = [\varepsilon_1^{-1}] + 1.$ Для полинома $P(x)$ степени $n$ и высоты $H$ определим действительные числа $\rho_j$, целые числа $l_k$ и рациональные числа $p_s$ из условий взаимного расположения корней $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n,$ упорядоченных следующим образом:

$$\left|\alpha_1 - \alpha_2\right| \le \left|\alpha_1 - \alpha_3\right| \le ... \le \left|\alpha_1 - \alpha_n\right|,$$

$$\left|\alpha_1 - \alpha_j\right| = H^{-\rho_j}, \quad \frac{l_j - 1}{T} \le \rho_j < \frac{l_j}{T}, \quad 2 \le j \le n,$$

$$p_s = T^{-1} \sum_{m=s+1}^{n} l_m, \quad 1 \le s \le n-1.$$

В результате все полиномы из $\mathcal{P}_n(Q)$ делятся на конечное число классов, зависящее только от $\varepsilon_1$ и $n$. Обозначим через $\sigma(P)$ интервал, содержащий все решения $x \in I$ неравенства (7), для которых корень $\alpha_1$ является ближайшим корнем. Для доказательства оценок сверху в метрических теоремах необходимо оценить меры объединений

$$V_1 = \bigcup_{P \in \mathcal{P}_n(Q,v)} \sigma(P).$$

Поскольку мера $\mu_1(\sigma(P))$ оценена в лемме 1, то для оценки $\mu_1 V_1$ достаточно получить оценки для количества полиномов с малой производной и ограниченным дискриминантом.

Т е о р е м а 3. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *при* $Q > Q_0(\varepsilon)$ *справедливо неравенство*

$$\#\mathcal{P}_3(Q, v) < Q^{4 - p_1 + \varepsilon}, \quad 0 \le p_1 \le 2. \tag{10}$$

В определении множества $\#T_3(Q, w)$ заменим ограничение на дискриминант на условие $\left|D(P)\right|_p < Q^{-2w}$.

Т е о р е м а 4. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *при* $Q > Q_0(\varepsilon)$ *выполняется неравенство*

$$\#T_3(Q, w) < Q^{4 - 5/3w + \varepsilon}, \quad 1 \le w \le 2.$$

Теорема 3 усиливает результат в [8], а теорема 4 обобщает [9; 11] при $1 \le w \le 2$ на поле $p$-адических чисел.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 3. Предположим, что верно неравенство, противоположное (10):

$$\#\mathcal{P}_3(Q, v) \ge Q^{4 - p_1 + \varepsilon}. \tag{11}$$

Поделим интервал $I$ на равные интервалы $J_i$, длины $Q^{-l_2 T^{-1}}$. Понятно, что из (11) следует существование $i$, таких что на интервале $J_i$ лежат не менее $k_i$ корней $\alpha_1(P_i),\ P_i \in \mathcal{P}_3(Q, v),$ и $k_i > c_5 Q^{4 - p_1 - l_2 T^{-1} + \varepsilon}$. Используя дискриминанты полиномов $P(x)$ как в [5], нетрудно доказать, что $0 \le p_1 \le 2,\ \frac{p_1}{2} < l_2 T^{-1} = p_1$.

Разложим полиномы $P_i(x)$ в ряд Тейлора на интервалах $J_i$:

$$P_i(x) = P_i(\alpha_1) + P_i'(\alpha_1)(x - \alpha_1) + \frac{1}{2} P_i''(\alpha_1)(x - \alpha_1)^2 + a_3 (x - \alpha_1)^3. \tag{12}$$

Так как $P_i(\alpha_1) = 0,\ \left|P_i'(\alpha_1)\right| = \left|a_3(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1 - \alpha_3)\right| = c_6 Q^{1 - p_1},\ \left|x - \alpha_1\right| < c_7 Q^{-l_2 T^{-1} + \varepsilon},\ \left|P_i''(\alpha_1)\right| = c_8 Q^{1 - p_2}$, то (12) можно переписать в виде

$$\left|P_i(x)\right| < c_9 Q^{1 - p_1 - l_2 T^{-1} + \varepsilon}, \quad 1 \le i \le k_i = c_5 Q^{4 - p_1 - l_2 T^{-1} + \varepsilon}. \tag{13}$$

Воспользуемся принципом ящиков Дирихле. Положим

$$m = 4 - p_1 - l_2 T^{-1}, \; m_1 = [m].$$

Если $m = 1 + \varepsilon$, то среди $k_i$ полиномов $P(x)$ найдутся по крайней мере три полинома, у которых коэффициенты $a_3$ полиномов $P_{i1}(x)$, $P_{i2}(x)$, $P_{i3}(x)$ совпадают, и следовательно, полиномы $R_{i3}(x) = P_{i3}(x) - P_{i1}(x)$, $R_{i2}(x) = P_{i2}(x) - P_{i1}(x)$ имеют степень не более двух.

Л е м м а 2 [13]. *Пусть целочисленные полиномы* $P_i(x)$, $i = 1, 2$, *не имеют общих корней и на интервале I длины* $Q^{-\eta}$, $\eta > 0$, *удовлетворяют неравенству*

$$\max_{x \in I}(|P_1(x)|, |P_2(x)|) < Q^{-\tau}, \; \tau > 0,$$

*тогда при любом* $\delta > 0$ *и* $Q > Q_0(\varepsilon)$ *выполняется неравенство*

$$\tau + 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \max(\tau + 1 - k\eta, 0) < 2n + \delta. \tag{14}$$

Воспользуемся неравенствами (13) и (14). Получим при $p_1 \geq 1{,}5$, $\frac{p_1}{2} < l_2 T^{-1} \leq p_1$, $n = 2$, что левая часть (14) имеет вид

$$\tau + 1 + 2(\tau + 1 - l_2 T^{-1}) = l_2 T^{-1} + 3p_1 - 3\varepsilon > 4{,}25 - 3\varepsilon,$$

а правая часть в (14) равна $4 + \delta$. При $3\varepsilon + \delta < 0{,}25$ неравенство (14) противоречиво.

При $0 \leq m < 1$ имеем $l_2 T^{-1} + p_1 > 3$. Разложим полином $P(x)$ в ряд на интервалах $J_i$ длины $Q^{-l_2 T^{-1} - m}$. В этом случае неравенство (14) примет вид

$$l_2 T^{-1} + 3p_1 + m < 6 + \delta,$$

что является противоречием. Если среди полиномов второй степени $R(x)$ не найдется двух полиномов без общих корней, то полиномы $R(x)$ приводимы, и их можно записать в виде

$$R(x) = (a_1 x + b_1)(a_2 x + b_2), \quad |a_1| = Q^{\lambda}, \quad |a_2| = c_{10} Q^{1-\lambda}, \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Найдем такое $a > 0$, что на всех интервалах $J_i$ длины $c_{11} Q^{-l_2 T^{-1}}$ выполняется система неравенств

$$|a_1 x + b_1| < c_{12} Q^{-a}, \quad |a_2 x + b_2| < c_{13} Q^{1 - p_1 - l_2 T^{-1} + \varepsilon_2 + a}. \tag{15}$$

Поскольку (15) выполняется на всем интервале $J_i$, то существует такая точка $x_0 \in J_i$, для которой выполняется система неравенств

$$\begin{matrix} c_{14} Q^{-l_2 T^{-1}} < |x_0 + b_1 / a_1| < |a_1|^{-1} Q^{-a}, \\ c_{15} Q^{-l_2 T^{-1}} < |x_0 + b_2 / a_2| < |a_2|^{-1} Q^{1 - p_1 - l_2 T^{-1} - \varepsilon_2 + a}, \end{matrix} \quad |a_1 a_2| > c_{16} Q. \tag{16}$$

Перемножив неравенства (16), при $Q > Q_0(\varepsilon)$ получаем противоречивое неравенство

$$c_{14} c_{15} Q^{-l_2 T^{-1}} < c_{16} Q^{1 - p_1 - \varepsilon_2}, \quad p_1 \geq l_2 T^{-1}.$$

Для доказательства теоремы 4 проведем классификацию корней из алгебраического замыкания $\overline{\mathbb{Q}}_p$ поля $p$-адических чисел $\mathbb{Q}_p$. Пусть для $\# T_3(Q, w)$ выполнено неравенство, противоположное формулировке теоремы 4. Представим цилиндр $K$ в виде объединения цилиндров $K_i$ с мерой Хаара $\mu_2$ равной $Q^{-l_2 T^{-1}}$. Пусть на одном из таких цилиндров $J_i$ окажется не менее $Q^{4 - 5/3w + \varepsilon/2}$ полиномов $P(\omega)$ с дискриминантами $D(P)$, такими что $|D(P)|_p < c_{17} Q^{-2w}$. Разложим эти полиномы на цилиндре $J_1$ в ряд Тейлора в окрестности корня $\gamma_1$ как в (13). В итоге получим не менее $Q^{4-5/3w-l_2T^{-1}+\varepsilon/2}$ полиномов $P(\omega)$, удовлетворяющих неравенствам

$$\left|P_i(\omega)\right|_p < c_{18}Q^{-2p_1-p_3-\varepsilon/4}. \tag{17}$$

Применим к полиномам (17) принцип ящиков Дирихле, чтобы уменьшить степени $P_i(\omega)$ до второй и первой соответственно. Если среди новых полиномов окажутся полиномы $R_j(\omega)$ без общих корней, то применим к ним следующую лемму.

Л е м м а 3. *Пусть целочисленные полиномы* $P_i(\omega)$, $i=1,2,$ *не имеют в цилиндре K меры Хаара* $Q^{-\eta}$, $\eta>0$, *общих корней. Пусть*

$$\max_{\omega\in K}\left(\left|P_1(\omega)\right|_p, \left|P_2(\omega)\right|_p\right) < Q^{-\tau_1},\ \ \tau_1>0.$$

*Тогда при любом* $\delta>0$ *и* $Q>Q_0(\varepsilon)$ *справедливо неравенство*

$$\tau_1 + 2\sum_{k=1}^{n}\max(\tau_1 - k\eta, 0) < 2n+\delta.$$

Для неприводимых полиномов $R_j(\omega)$ лемма 3 приводит к противоречию. Приводимые полиномы $R_j(\omega)$ второй степени разложим на линейные множители

$$R_j(\omega) = (a_1\omega+b_1)(a_2\omega+b_2).$$

Поскольку мы можем точно оценить как сверху, так и снизу меры множеств $\omega\in\mathbb{Q}_p$, для которого верны неравенства $\left|a_i\omega+b_i\right|_p < Q^{-w_i}$, $\ w_i>0,\ \ i=1,2,$ то получим для $R_j(\omega)$ неравенства, аналогичные (16), которые приведут к противоречию.

**Заключение.** Получены точные теоремы о количестве многочленов, у которых дискриминант не превосходит заданной величины и делится на заданную степень простого числа. Теоремы могут использоваться при проектировании антенных устройств [7] и в криптографии [14].

## Список использованных источников

1. Касселс, Дж. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений / Дж. В. С. Касселс. – М., 1961. – 213 с.

2. Khintchine, A. Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen / A. Khintchine // Mathematische Annalen. – 1924. – Vol. 92. – P. 115–125. https://doi.org/10.1007/bf01448437

3. Берник, В. И. Применение размерности Хаусдорфа в теории диофантовых приближений / В. И. Берник // Acta Arith. – 1982. – Т. 42, № 3. – С. 219–253. https://doi.org/10.4064/aa-42-3-219-253

4. Beresnevich, V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers / V. Beresnevich // Acta Arith. – 1999. – Vol. 50, N 2. – P. 97–112. https://doi.org/10.4064/aa-90-2-97-112

5. Спринджук, В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск, 1967. – 181 с.

6. Beresnevich, V. V. A Groshev type theorem for convergence on manifolds / V. V. Beresnevich // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. – 2002. – Vol. 94. – P. 99–130. https://doi.org/10.1023/a:1015662722298

7. Beresnevich, V. Number theory meets wireless communications: an introduction for dummies like us / V. Beresnevich, S. Velani // Number Theory Meets Wireless Communications / eds. V. Beresnevich [et al.]. – Springer International Publishing, 2020. – P. 1–67. https://doi.org/10.1007/978-3-030-61303-7_1

8. Берник, В. И. О числе целочисленных многочленов заданной степени и ограниченной высоты с малой производной в корне многочлена / В. И. Берник, Д. В. Васильев, А. С. Кудин // Тр. Ин-та математики. – 2014. – Т. 22, № 2. – С. 3–8.

9. Badziahin, D. Simultaneous Diophantine approximation to points on the Veronese curve [Electronic resource] / D. Badziahin. – Mode of access: https://arxiv.org/abs/2403.17685. – Date of access: 20.06.2024.

10. Вклад Йонаса Кубилюса в метрическую теорию диофантовых приближений зависимых переменных / В. В. Бересневич [и др.] // Журн. БГУ. Математика. Информатика. – 2021. – № 3. – С. 34–50 (на англ. яз.). https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-3-34-50

11. Bernik, V. I. Metric Diophantine approximation on manifolds / V. I. Bernik, M. M. Dodson // Cambridge Tracts in Mathematics. – 1999. – N 137. – 172 p. https://doi.org/10.1017/cbo9780511565991

12. Кемеш, О. Н. Точные оценки меры малых значений целочисленных полиномов / О. Н. Кемеш, Ж. И. Пантелеева, А. В. Титова // Весн. Магілёўскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя А. А. Куляшова. Сер. B. – 2021. – № 1 (57). – С. 81–86.

13. Метрическая теория диофантовых приближений и асимптотические оценки для количества многочленов с заданными дискриминантами, делящимися на большую степень простого числа / В. И. Берник [и др.] // Докл. Нац. акад. наук Беларуси. – 2023. – Т. 67, № 4. – С. 271–278. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-4-271-278

14. Криптология: учебник / Ю. С. Харин [и др.]. – Минск, 2013. – 511 с.

## References

1. Cassels J. W. S. *An introduction to diophantine approximation.* Cambridge University Press, 1957. 166 p.

2. Khintchine A. Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen. *Mathematische Annalen*, 1924, vol. 92, pp. 115–125 (in German). https://doi.org/10.1007/bf01448437

3. Bernik V. I. Application of Hausdorff dimension in the theory of Diophantine approximation. *Acta Arithmetica*, 1982, vol. 42, no. 3, pp. 219–253 (in Russian). https://doi.org/10.4064/aa-42-3-219-253

4. Beresnevich V. On approximation of real numbers by real algebraic numbers. *Acta Arithmetica*, 1999, vol. 90, no. 2, pp. 97–112. https://doi.org/10.4064/aa-90-2-97-112

5. Sprindzhuk V. G. *Mahler's problem in metric number theory*. Minsk, 1967. 181 p. (in Russian).

6. Beresnevich V. V. A Groshev type theorem for convergence on manifolds. *Acta Mathematica Hungarica*, 2002, vol. 94, pp. 99–130. https://doi.org/10.1023/a:1015662722298

7. Beresnevich V., Velani S. Number theory meets wireless communications: an introduction for dummies like us. Beresnevich V., ed. *Number Theory Meets Wireless Communications*. Springer International Publishing, 2020, pp. 1–67. https://doi.org/10.1007/978-3-030-61303-7_1

8. Bernik V. I., Vasiliev D. V., Kudin A. S. On the number of integer polynomials of a given degree and bounded height with a small derivative at the root of the polynomial. *Trudy Instituta Matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2014, no. 2, pp. 3–8 (in Russian).

9. Badziahin D. *Simultaneous Diophantine approximation to points on the Veronese curve*. Available at: https://arxiv.org/abs/2403.17685 (accessed 20 June 2024).

10. Beresnevich V. V., Bernik V. I., Götze F., Zasimovich E. V., Kalosha N. I. Contribution of Jonas Kubilius to the metric theory of Diophantine approximation of dependent variables. *Journal of the Belarusian State University. Mathematics and Informatics*, 2021, no. 3, pp. 34–50. https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-3-34-50

11. Bernik V. I., Dodson M. M. Metric Diophantine approximation on manifolds. *Cambridge Tracts in Mathematics*, 1999, no. 137. 172 p. https://doi.org/10.1017/cbo9780511565991

12. Kemesh O. N., Panteleeva Zh. I., Titova A. V. Exact estimates of the measure of small values of integer polynomials *Vesnik Magileŭskaga dzyarzhaŭnaga ŭniversiteta imya A. A. Kulyashova. Seryya V = Bulletin Mogilev State A. Kuleshov University, Seria B*, 2021, no. 1 (57), pp. 81–86 (in Russian).

13. Bernik V. I., Vasilyev D. V., Kalosha N. I., Panteleeva Zh. I. Metric theory of diophantine approximation and asymptotic estimates for the number of polynomials with given discriminants divisible by a large power of a prime number. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2023, vol. 67, no. 4, pp. 271–278 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2023-67-4-271-278

14. Kharin Yu. S., Agievich S. V., Vasilyev D. V., Matveev G. V. *Cryptology*. Minsk, 2013. 511 p. (in Russian).

## Информация об авторе

*Берник Василий Иванович* – д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: bernik.vasili@mail.ru.

*Васильев Денис Владимирович* – канд. физ.-мат. наук. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vasilyev@im.bas-net.by.

*Кудин Алексей Сергеевич* – канд. физ.-мат. наук. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: knxd@yandex.ru.

*Пантелеева Жанна Ивановна* – ст. преподаватель. Белорусский государственный аграрный технический университет (пр. Независимости, 99, 220012, Минск, Республика Беларусь). E-mail: janna.panteleeva001@gmail.com.

## Information about the author

*Bernik Vasiliy I.* – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: bernik.vasili@mail.ru.

*Vasilyev Denis V.* – Ph. D. (Physics and Mathematics). Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vasilyev@im.bas-net.by.

*Kudin Alexey S.* – Ph. D. (Physics and Mathematics). Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vasilyev@im.bas-net.by.

*Panteleeva Zhanna I.* – Senior Lecturer. Belarusian State Agrarian Technical University (99, Nezavisimosti Ave., 220012, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: janna.panteleeva001@gmail.com.