ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 519.622.26+512.622.25
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2025-69-2-95-100

Поступило в редакцию 03.06.2024
Received 03.06.2024

М. М. Чернявский

Витебский государственный университет имени П. М. Машерова, Витебск, Республика Беларусь

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ КРАТНЫХ КОРНЕЙ ПОЛИНОМОВ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Аннотация. Для многочленов f, обладающих кратными корнями, получены явные формулы для высших производных от результантов $R(f, f^{(k)})$ ($f^{(k)}$ – производная порядка k). На этой базе доказаны существенно отличающиеся от известных результатов утверждения, связывающие высшие производные результантов и кратные корни.

Ключевые слова: корень полинома, результант, кратные корни, явные формулы

Для цитирования. Чернявский, М. М. Рациональные выражения для кратных корней полиномов / М. М. Чернявский // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2025. – Т. 69, № 2. – С. 95–100. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2025-69-2-95-100

Mikhail M. Chernyavsky

Vitebsk State University named after P. M. Masherov, Vitebsk, Republic of Belarus

RATIONAL EXPRESSIONS FOR MULTIPLE ROOTS OF POLYNOMIALS

(Communicated by Corresponding Member Valentin V. Gorokhovik)

Abstract. For polynomials possessing multiple roots we deduce explicit formulas for higher derivatives of resultants $R(f, f^{(k)})$ ($f^{(k)}$ is a derivative of order k). On this basis a number of results linking higher derivatives of resultants and multiple roots of polynomials that differ in ideas from the well-known ones are obtained.

Keywords: root of a polynomial, resultant, multiple roots, exact formulas

For citation. Chernyavsky M. M. Rational expressions for multiple roots of polynomials. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2025, vol. 69, no. 2, pp. 95–100 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2025-69-2-95-100

Введение. Известным математическим инструментом для обнаружения общих корней пар полиномов и кратных корней полиномов являются результанты и дискриминанты. Для пары полиномов f и g их результант $R(f, g)$ – функция от их коэффициентов. Нули результанта $R(f, g)$ соответствуют наборам коэффициентов f и g таким, что f и g имеют общий корень. В частности, если f имеет корень кратности $s \geq 2$, то $R(f, f^{(k)}) = 0$, $1 \leq k < s$ ($f^{(k)}$ – производная порядка k). При этом вычисление этого кратного корня является отдельной проблемой. Получение явных формул, выражающих значения кратных корней полиномов через коэффициенты, до конца XX в. представляло собой трудную задачу, поскольку в большинстве своем требовало объемных аналитических промежуточных вычислений, не поддававшихся ручному счету. Относительно новым подходом в данном направлении является выражение кратного корня (и определенных комбинаций кратных корней, если кратный корень не единственный) в терминах частных производных от некоторых результантов и дискриминантов.

Среди авторитетных работ по теории алгебраических уравнений, где можно найти сведения о вычислении единственного корня полинома кратности 2 в терминах частных производных первого порядка от результантов и дискриминантов, необходимо отметить монографию [1, глава 12] (см. теорема 1 настоящего сообщения). Существенное развитие идей этой книги в направлении поиска формул для кратных корней многочленов представлено в [2]. Ключевой в этой работе является теорема 1 (теорема 2 настоящего сообщения), где получено выражение единственного корня кратности $s \geq 3$ через частные производные первого порядка от результанта многочлена и его производной порядка $s - 1$. Для доказательства теоремы 2 в [2] использован ряд специфических методов алгебры и комплексного анализа, в том числе известные формулы для результантов, теория вычетов и вид полинома f на стратах Гильберта. Такая техника, безусловно, отвечает фундаментальности рассматриваемой темы, но затрудняет восприятие материала работы специалистами в области прикладных наук, на которых, в частности, ориентированы конечные результаты.

В настоящем сообщении получены явные формулы для высших производных от результантов $R(f, f^{(k)})$ для многочлена f, обладающего кратными корнями. На этой базе доказан ряд существенно отличающихся от теоремы 2 результатов, связывающих высшие производные результантов и кратные общие корни. Кроме того, эти результаты применяются для уточнения теоремы 2.

Результант и дискриминант. Здесь приведены необходимые для дальнейшего изложения определения и свойства результанта и дискриминанта. Подробности см. в [3, § 54].

Пусть $f(z) := \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}$ $(a_0 \neq 0)$ и $g(z) := \sum_{j=0}^{m} b_j z^{m-j}$ $(b_0 \neq 0)$ – два многочлена, имеющие корни $\{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ и $\{\beta_j\}_{j=1}^{m}$ соответственно. *Результантом* многочленов f и g называется произведение

$$R(f, g) := a_0^m b_0^n \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (\alpha_i - \beta_j).$$

Многочлены f и g используются в определении результанта не симметричным образом. Очевидно,

$$R(g, f) = (-1)^{mn} R(f, g).$$

Если многочлены f и g имеют хотя бы один общий корень, то значение результанта, составленного из них, равно нулю. Это свойство результанта можно использовать для проверки наличия кратных корней у полинома, для чего достаточно вычислить результант многочлена и его первой производной.

Так как $f(z) = a_0 \prod_{i=1}^{n} (z - \alpha_i)$, $g(z) = b_0 \prod_{j=1}^{m} (z - \beta_j)$, то их результант $R(f, g)$ можно представить в виде

$$R(f, g) = a_0^m \, g(\alpha_1) g(\alpha_2) \cdot \ldots \cdot g(\alpha_n) = (-1)^{mn} \, b_0^n \, f(\beta_1) f(\beta_2) \cdot \ldots \cdot f(\beta_m). \tag{1}$$

Известно также, что результант можно представить в виде следующего определителя, который иногда называют *формулой Сильвестра* или *результантом в форме Сильвестра*:

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_n & & \\ & a_0 & a_1 & \ldots & a_n & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & a_0 & a_1 & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & \ldots & b_m & & \\ & b_0 & b_1 & \ldots & b_m & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & b_0 & b_1 & \ldots & b_m \end{vmatrix}. \tag{2}$$

В данном определителе m строк с коэффициентами полинома $f(z)$ и n строк с коэффициентами полинома $g(z)$. В ячейках определителя, где оставлены пустые поля, подразумеваются нули.

Формула (2) естественным образом приводит нас к рассмотрению результанта как функции от коэффициентов многочленов f и g, т. е. $R(f, g)(a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m)$. Именно в таком смысле мы будем понимать результант в данной работе.

Дискриминантом многочлена $f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \quad (a_0 \neq 0),$ имеющего корни $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$, называют величину

$$D(f) \; = \; a_0^{2n-2} \prod_{i>j} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Значение результанта многочлена и его первой производной прямо пропорционально значению дискриминанта $D(f)$. А именно, имеет место соотношение

$$R(f, f') = (-1)^{n(n-1)/2} a_0 D(f). \tag{3}$$

Алгоритмы получения точных рациональных выражений для кратных корней полиномов (известные результаты). Известны следующие алгоритмы получения точных рациональных выражений для кратных корней полиномов на базе вычисления производных результантов и дискриминантов.

В [1] представлено следующее утверждение.

Т е о р е м а 1 [1, p. 404]. *Если для полинома* $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n$ *дискриминант* $D(f)$ *равен нулю, но по крайней мере одна частная производная* $\partial D(f) / \partial a_i \; (i = 0, 1, \ldots, n)$ *отлична от нуля, то* f *имеет единственный корень* w *кратности* 2, *и его можно найти из пропорции*

$$(w^n \; : \; w^{n-1} \; : \; \ldots \; : \; w \; : \; 1) = \left(\frac{\partial D(f)}{\partial a_0} \; : \; \frac{\partial D(f)}{\partial a_1} \; : \; \ldots \; : \; \frac{\partial D(f)}{\partial a_{n-1}} \; : \; \frac{\partial D(f)}{\partial a_n} \right). \tag{4}$$

В случае, когда исходный полином $f(x)$ имеет хотя бы один кратный корень, все частные производные первого порядка от результанта $R(f, g)$ по коэффициентам полинома $g(x) = f'(x)$ равны нулю (теорема 3 настоящего сообщения). В этом случае для вычисления значения кратного корня необходимо привлечение высших производных, к чему в [1] никаких предпосылок не дано.

Развитию идей из [1] по рациональному выражению кратных корней полинома посвящена [2], где ключевой является следующая

Т е о р е м а 2 [2, теорема 1]. *Если* $s \geq 3$, *то ненулевое решение алгебраического уравнения с комплексными коэффициентами*

$$f = f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0 \tag{5}$$

z_1 *кратности* s *выражается через частные производные* $\partial R / \partial a_i$, *где* $R = R(f, f^{(s-1)})$ – *результант многочлена и его производной порядка* $s - 1$ *по формулам*

$$z_1 = \frac{\partial R}{\partial a_{n-(s-2)}} : \frac{\partial R}{\partial a_{n-(s-3)}} = \frac{\partial R}{\partial a_{n-(s-3)}} : \frac{\partial R}{\partial a_{n-(s-4)}} \; \ldots = \frac{\partial R}{\partial a_{n-2}} : \frac{\partial R}{\partial a_{n-1}} = \frac{\partial R}{\partial a_{n-1}} : \frac{\partial R}{\partial a_n}. \tag{6}$$

Если $s = 2$, *то двукратное ненулевое решение уравнения* (5) z_1 *выражается через производные* $\partial D / \partial a_i$ *дискриминанта* D *по формулам*

$$z_1 = \frac{\partial D}{\partial a_1} : \frac{\partial D}{\partial a_2} = \ldots = \frac{\partial D}{\partial a_{n-2}} : \frac{\partial D}{\partial a_{n-1}} = \frac{\partial D}{\partial a_{n-1}} : \frac{\partial D}{\partial a_n}.$$

Вторая часть этой теоремы совпадает с теоремой 1 и выражением (4).

В настоящем сообщении доказан ряд существенно отличающихся от теоремы 2 результатов, связывающих высшие производные от результантов и кратные корни. Кроме того, эти результаты применяются для уточнения теоремы 2.

Полученные результаты являются естественным развитием идей, отраженных в [4].

Кратные корни многочлена и производные результантов. Здесь представлено основное утверждение работы.

Рассмотрим многочлен $f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i} \quad (a_0 \neq 0)$. В соответствии с (1) запишем результант многочлена $f(z)$ и его k-й производной $f^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^{n-k} b_j z^{n-k-j}$ в виде

$$R(f, f^{(k)}) \coloneqq R = a_0^m g_1 g_2 \cdot \ldots \cdot g_{n-1} g_n = (-1)^{mn} b_0^n f_1 f_2 \cdot \ldots \cdot f_{n-k}, \tag{7}$$

где

$$g_i \equiv f^{(k)}(z_i) = \sum_{j=0}^{n-k} b_j z_i^{n-k-j} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \; - \tag{8}$$

значение k-й производной $f^{(k)}$ многочлена f на его i-м корне (z_i, $i = 1, \ldots, n$ – корни f);

$$f_i \equiv f(y_i) = \sum_{j=0}^{n} a_j y_i^{n-j} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-k) \; - \tag{9}$$

значение многочлена f на i-м корне его k-й производной $f^{(k)}$ (y_i, $i = 1, \ldots, n-k$ – корни $f^{(k)}$).

Т е о р е м а 3. *Пусть* $z_1 = z_2 = \ldots = z_s = w$ *– корень кратности, как минимум,* s $(2 \le s < n)$ *для полинома* $f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}$ $(a_0 \ne 0)$. *Тогда для результанта* $R \coloneqq R(f, f^{(k)})$, *где* $f^{(k)}(z) = \sum_{j=0}^{n-k} b_j z^{n-k-j}$, $1 \le k < s$, *имеют место следующие равенства:*

1)

$$\frac{\partial R}{\partial a_j} = (-1)^{(n-k)n} b_0^n w^{n-j} \prod_{i=2}^{n-k} f_i \quad (j = 0, \ldots, n),$$

где f_i заданы формулой (9);

2) для $1 \le r < s$

$$\frac{\partial^r R}{\partial b_{j_r} \ldots \partial b_{j_1}} = 0 \quad (j_k = 0, 1, \ldots, n-k); \tag{10}$$

3)

$$\frac{\partial^s R}{\partial b_{j_s} \ldots \partial b_{j_1}} = a_0^{n-k} s!\, w^{s(n-k)-(j_s+\ldots+j_1)} \prod_{i=s+1}^{n} g_i \qquad (j_k = 0, 1, \ldots, n-k), \tag{11}$$

где g_i заданы формулой (8).

Если $s = n$, т. е. $f(z) = a_0(z - w)^n$, *то для $r < n$ выполняется равенство (10) и*

$$\frac{\partial^n R}{\partial b_{j_n} \ldots \partial b_{j_1}} = a_0^{n-k} n!\, w^{n(n-k)-(j_n+\ldots+j_1)} \qquad (j_k = 0, 1, \ldots, n-k).$$

Приложения основной теоремы. Следующее утверждение вытекает из теоремы 3 и является некоторой альтернативой теореме 1.

Т е о р е м а 4. *Полином* $f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}$ $(a_0 \ne 0,\ a_n \ne 0)$ *представляется в виде*

$$f(z) = a_0 (z - w)^2 (z - z_3)(z - z_4) \ldots (z - z_{n-1})(z - z_n), \tag{12}$$

где $z_i \ne z_j$, $i \ne j$ *и* $w \ne z_i$; *тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие соотношения:*

1) $R(f, f') = 0$ *(либо $D(f) = 0$ в силу (3));*

2) $\dfrac{\partial^2 R(f, f')}{\partial b_{n-1}^2} \ne 0$, *где* b_j $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ *– коэффициенты полинома* $g(z) = f'(z)$.

При этом для корня w выполняются соотношения

$$\frac{\partial^2 R}{\partial b_{j_2} \partial b_{j_1}} : \frac{\partial^2 R}{\partial b_{k_2} \partial b_{k_1}} = w^{(k_2+k_1)-(j_2+j_1)} \quad (j_r, k_r = 0, 1, \ldots, n-1).$$

З а м е ч а н и е. 1) Из выражения (11) непосредственно следует, что в случае, когда полином имеет один кратный корень кратности два (все остальные корни у него только простые), то все вторые производные от результанта (7) одновременно не равны нулю, т. е. проверять справедливость соотношения (12) можно только по одной из вторых производных от результанта (11), например, по $\dfrac{\partial^2 R}{\partial b_{n-1}^2}$.

2) Из равенства нулю результанта от многочлена и его первой производной (что гарантирует наличие хотя бы одного кратного корня) всегда следует равенство нулю всех первых производных $\partial R(f, f')/\partial b_j$ $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ (теорема 3, равенство (10)). Поэтому проверка этих выражений не входит в число необходимых и достаточных условий выполнения соотношения (12).

Теорема 2 также является следствием теоремы 3. А именно, справедливо следующее уточнение теоремы 2.

Т е о р е м а 5. *Если полином* $f(z) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i z^{n-i}$ $(a_0 \neq 0)$ *представляется в виде*

$$f(z) = a_0(z-w)^s (z - z_{s+1})(z - z_{s+2})\ldots(z - z_{n-1})(z - z_n),$$

где $2 \le s < n$; $w \neq z_i$ *(т. е. w – корень кратности s), то выполняются следующие соотношения:*

1) $R(f, f^{(k)}) = 0 \quad (1 \le k < s)$;

2) для $R = R(f, f^{(s-1)})$ *вектор производных* $\left[\dfrac{\partial R}{\partial a_0}, \dfrac{\partial R}{\partial a_1}, \ldots, \dfrac{\partial R}{\partial a_n}\right]$ *имеет вид*

$$\left[\frac{\partial R}{\partial a_0}, \frac{\partial R}{\partial a_1}, \ldots, \frac{\partial R}{\partial a_n}\right] = \gamma(s, n) \prod_{i=2}^{n-s+1} f_i [w^n, w^{n-1}, \ldots, w, 1], \qquad (13)$$

где $\gamma(s, n) = (-1)^{(n-s+1)n} (n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-s+2)a_0)^n$.

Если $a_n \neq 0$ *и все корни* z_i, $i = s+1, \ldots, n$, *имеют кратности меньше s, то все производные* $\dfrac{\partial R}{\partial a_j}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, *не равны нулю; и, значит, выполняются соотношения (6).*

З а м е ч а н и е. Формула (13) показывает, в частности, что количество искомых рациональных выражений, типа упомянутых в (6), не зависит от числа *s* (как в теореме 2), а определяется только степенью исходного полинома.

Следующее обобщение теоремы 4 вытекает из теоремы 3 и является некоторой альтернативой теореме 5 (теореме 2).

Т е о р е м а 6. *Полином* $f(z) = \sum\limits_{i=}^{n} a_i z^{n-i}$ $(a \ \neq 0,\ a_n \neq 0)$ *представляется в виде*

$$f(z) = a_0(z-w)^s (z - z_{s+1})(z - z_{s+2})\ldots(z - z_{n-1})(z - z_n),$$

где $2 \le s < n$; $w \neq z_i$, $z_i \neq z_j$, *i≠j; тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие соотношения:*

1) $R(f, f^{(s-1)}) = 0$,

2) $R(f, f^{(s)}) \neq 0$,

3) $\dfrac{\partial^s R(f, f')}{\partial b_{n-1}^s} \neq 0$, *где* b_j $(j = 0, 1, \ldots, n-1)$ *– коэффициенты полинома* $g(z) = f'(z)$. *При этом для корня w выполняются соотношения*

$$\frac{\partial^s R(f, f')}{\partial b_{j_s}\ldots\partial b_{j_1}} : \frac{\partial^s R(f, f')}{\partial b_{k_s}\ldots\partial b_{k_1}} = w^{(k_s + \ldots + k_1) - (j_s + \ldots + j_1)} \quad (j_r, k_r = 0, 1, \ldots, n-1).$$

З а м е ч а н и е. При наличии корня кратности *s* все результанты вида $R(f, f^{(k)}) = 0$ автоматически при $1 \le k < s$, поэтому такая проверка не входит в число необходимых и достаточных условий теоремы 6.

Условие 2) в теореме 6 является избыточным, так как в случае наличия корня кратности $s + 1$ или выше у полинома $f(z)$ не выполнится условие 3) (так как $g_{s+1} = 0$), но, при этом, зачастую на практике на этапе «узнавания» о наивысшей степени кратности корня проверить его легче, чем условие 3) (команда для вычисления результанта имеется в математических пакетах и легко реализуется в цикле перебора значений $R(f, f^{(k)})$). Уже после установления числа s целесообразно проверять условие 3).

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект Ф23М-003).

Acknowledgements. The study was carried out with financial support from the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project Ф23М-003).

Список использованных источников

1. Gelfand, I. M. Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants / I. M. Gelfand, M. M. Kapranov, A. V. Zelevinsky. – Boston, 1994. – 528 p. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4771-1

2. Антипова, И. А. Рациональные выражения для кратных корней алгебраических уравнений / И. А. Антипова, Е. Н. Михалкин, А. К. Цих // Математический сборник. – 2018. – Т. 209, № 10. – С. 3–30. https://doi.org/10.4213/sm8950

3. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – 19-е изд., стер. – СПб., 2013. – 432 с.

4. Чернявский, М. М. Модификация формул Эйткена и алгоритмы аналитического нахождения кратных корней полиномов / М. М. Чернявский, Ю. В. Трубников // Веснiк Вiцебскага дзяржаўнага ўнiверсiтэта. – 2021. – № 1 (110). – С. 13–25.

References

1. Gelfand I. M., Kapranov M. M., Zelevinsky A. V. *Discriminants, Resultants, and Multidimensional Determinants*. Boston, 1994. 528 p. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4771-1

2. Antipova I. A., Mihalkin E. N., Tsikh A. K. Rational expressions for multiple roots of algebraic equations. *Sbornik: Mathematics*, 2018, vol. 209, no. 10, pp. 1419–1444. https://doi.org/10.1070/sm8950

3. Kurosh A. G. *Higher Algebra Course*. 19th ed. Saint Petersburg, 2013. 432 p. (in Russian).

4. Chernyavsky M. M., Trubnikov Yu. V. Modification of Aitken's formulas and algorithms for analytical finding of multiple roots of polynomials. *Vesnik Vitsebskaga dzyarzhaunaga universiteta = Bulletin of Vitebsk State University*, 2021, no. 1 (110), pp. 13–25 (in Russian).

Информация об авторе

Чернявский Михаил Михайлович – ст. преподаватель. Витебский государственный университет имени П. М. Машерова (пр-т Московский, 33, 210038, Витебск, Республика Беларусь). E-mail: misha360ff@mail.ru.

Information about the author

Chernyavsky Mikhail M. – Lecturer. Vitebsk State University named after P. M. Masherov (33, Moskovskiy Ave., 210038, Vitebsk, Republic of Belarus). E-mail: misha360ff@mail.ru.