ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.925
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2025-69-3-183-191

Поступило в редакцию 29.01.2025
Received 29.01.2025

А. К. Деменчук

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь

УПРАВЛЕНИЕ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ВЫРОЖДЕННЫМ ПРАВЫМ НИЖНИМ ДИАГОНАЛЬНЫМ БЛОКОМ УСРЕДНЕНИЯ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Аннотация. Рассматривается линейная система управления с периодической матрицей коэффициентов и программным управлением. Матрица при управлении постоянная, прямоугольная и ее ранг не является максимальным. Предполагается, что управление является периодическим, при этом модуль его частот, т. е. наименьшая аддитивная группа вещественных чисел, включающая все показатели Фурье этого коэффициента, содержится в частотном модуле матрицы коэффициентов. Ставится следующая задача: выбрать такое управление из допустимого множества, чтобы у системы появились периодические решения, спектр частот (множество показателей Фурье) которых содержит наперед заданное подмножество, а пересечение модулей частот решения и матрицы коэффициентов тривиально. Поставленная задача названа задачей управления асинхронным спектром с целевым множеством частот. Решение сформулированной задачи существенным образом зависит от структуры среднего значения матрицы коэффициентов. К настоящему времени такая задача решена для систем с нулевым средним. Кроме того, изучен случай, когда у матрицы при управлении есть нулевые строки, усреднение матрицы коэффициентов имеет вырожденный левый верхний диагональный блок, а остальные ее блоки – нулевые. Вопрос для системы с вырожденным правым нижним блоком усреднения оставался открытым. В настоящей работе для указанного класса систем исследуется задача управления асинхронным спектром. Установлено, в частности, что для ее разрешимости необходимо, чтобы блок, образованный первыми строками матрицы коэффициентов, имел неполный столбцовый ранг.

Ключевые слова: периодические линейные системы управления, среднее значение, показатели Фурье, асинхронный спектр

Для цитирования. Деменчук, А. К. Управление асинхронным спектром линейных периодических систем с вырожденным правым нижним диагональным блоком усреднения матрицы коэффициентов / А. К. Деменчук // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2025. – Т. 69, № 3. – С. 183–191. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2025-69-3-183-191

Aleksandr K. Demenchuk

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus

CONTROL PROBLEM OF THE ASYNCHRONOUS SPECTRUM OF LINEAR PERIODIC SYSTEMS WITH DEGENERATE RIGHT LOWER DIAGONAL BLOCK OF AVERAGING OF COEFFICIENT MATRIX

(Communicated by Academician Nikolay A. Izobov)

Abstract. The present study considers a linear control system with a periodic matrix of coefficients and program control. The matrix under control is constant, rectangular, and its rank is not maximum. It is assumed that the control is periodic, and that the modulus of its frequencies, i. e. the smallest additive group of real numbers, including all the Fourier exponents of this coefficient, is contained in the frequency modulus of the coefficient matrix. The following problem is posed: to select such a control from an admissible set that the system would have periodic solutions, the frequency spectrum (the set of Fourier exponents) of which contains a predetermined subset, and the intersection of the modules of the frequencies of the solution and the matrix of coefficients is trivial. The posed problem can thus be termed the ‘problem of control of the asynchronous spectrum with the target set of frequencies’. The solution to the posed problem essentially depends on the structure of the average value of the matrix of coefficients. To date, this problem has been solved for systems with zero mean. In addition, the case is studied when the matrix under control has zero rows, the averaging of the matrix of coefficients has a degenerate left upper diagonal block, and the rest of its blocks are zero. The question for a system with a nontrivial right lower averaging block remained open. In the present work, we study the problem of control of the asynchronous spectrum for the indicated class of systems. It has been established, in particular, that for the solvability of this problem it is necessary that the block formed by the rows of the matrix of coefficients has an incomplete column rank.

Keywords: periodic linear control systems, mean value, Fourier exponents, asynchronous spectrum

For citation. Demenchuk A. K. Control problem of the asynchronous spectrum of linear periodic systems with degenerate right lower diagonal block of averaging of coefficient matrix. *Doklady Natsional’noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2025, vol. 69, no. 3, pp. 183–191 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2025-69-3-183-191

Введение. Рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

в которой $A(t)$ – непрерывная ω-периодическая $(n \times n)$-матрица; B – постоянная $(n \times r)$-матрица $r \leq n$; u – управление. Вопросы управляемости линейных систем изучались во многих работах в предположении совпадения частот решения и самой системы [1; 2].

Вместе с тем, как показали Х. Массера [3], Я. Курцвейль и О. Вейвода [4] и др., система обыкновенных дифференциальных периодических (почти периодических) уравнений может допускать решения, пересечение частотного модуля которых с модулем частот системы тривиально. Позднее такого рода решения были названы сильно нерегулярными, их частотный спектр – асинхронным, а описываемые ими колебания – асинхронными. Отметим, что в периодическом случае нерегулярность означает несоизмеримость периодов решения и системы.

Задача построения периодических дифференциальных систем, обладающих сильно нерегулярными решениями, сформулирована в [5] как задача управления асинхронным спектром. В [6, гл. III] исследована разрешимость такой задачи для некоторых классов линейных периодических систем с линейной по фазовым переменным периодической обратной связью.

В данной работе в качестве управляющего воздействия $u(\cdot)$ в системе (1) будем использовать непрерывные на вещественной оси периодические r-вектор-функции, множество показателей Фурье которых $\mathrm{Exp}(u)$ содержится в модуле частот $\mathrm{Mod}(A)$ матрицы коэффициентов $A(\cdot)$. Тогда применительно к системе (1) задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L состоит в следующем: выбрать такое программное управление

$$u = U(t)$$

из указанного допустимого множества, чтобы система

$$\dot{x} = A(t)x + Bu(t) \tag{2}$$

имела сильно нерегулярное периодическое решение с заданным спектром частот L (целевым множеством).

Вопросы разрешимости сформулированной задачи для системы (1) с программным управлением и нулевым средним значением матрицы коэффициентов исследованы в [7], а с невырожденным средним – в [8]. Случай максимального ранга матрицы при управлении, который равен числу ее столбцов, изучен в [9]. В [10] рассмотрена система (1) с нулевыми строками матрицы при управлении, при этом среднее значение матрицы коэффициентов имеет невырожденный левый верхний диагональный блок и остальные ее блоки – нулевые. Вопрос исследования системы (1) с нетривиальным правым нижним блоком усреднения матрицы коэффициентов оставался открытым. В настоящем сообщении приведем решение задачи управления асинхронным спектром в случае, когда указанный диагональный блок является вырожденным.

Необходимые обозначения и постановка задачи. Пусть $P = (p_{ij})$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, – некоторая матрица и $1 \le k_1 < \ldots < k_s \le n$, $1 \le l_1 < \ldots < l_q \le m$ – две упорядоченные последовательности натуральных чисел. Через $P_{k_1 \ldots k_s}^{l_1 \ldots l_q}$ обозначим матрицу размера $s \times q$, образованную из элементов матрицы P, стоящих на пересечении строк с номерами $k_1, \ldots, k_s$ и столбцов с номерами $l_1, \ldots, l_q$

$$P_{k_1 \ldots k_s}^{l_1 \ldots l_q} = \begin{pmatrix} p_{k_1 l_1} & \cdots & p_{k_1 l_q} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k_s l_1} & \cdots & p_{k_s l_q} \end{pmatrix}.$$

Для непрерывной на всей числовой оси ω-периодической вещественнозначной матрицы (вектора) $F(t)$ определим ее среднее значение

$$\hat{F} = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} F(t) dt$$

и осциллирующую часть $\tilde{F}(t) = F(t) - \hat{F}$. Пусть $\mathrm{Mod}(F)$ – модуль частот матрицы $F(t)$, т. е. множество всевозможных линейных комбинаций с целыми коэффициентами показателей Фурье этой матрицы. Через $\mathrm{rank}_{\mathrm{col}} F$ обозначим столбцовый ранг матрицы $F(t)$ – наибольшее число ее линейно независимых столбцов. Подобным образом можно определить и строчный ранг матрицы. Очевидно, что в общем случае строчный и столбцовый ранги матрицы $F(t)$ не обязаны совпадать. Будем говорить, что $F(t)$ – матрица неполного столбцового ранга, если ее столбцовый ранг меньше числа столбцов.

Принимая во внимание основной результат работы [9] далее считаем, что ранг матрицы B не является максимальным, т. е. меньше числа ее столбцов, и строки с номерами $k_1, \ldots, k_d$, $1 \le k_1 < \ldots < k_d \le n$, нулевые

$$\mathrm{rank} B = r_1 < r, \quad B_{k_1 \ldots k_d}^{1 \ldots r} = 0 \quad (d = n - r_1). \tag{3}$$

Последнее ограничение не является потерей общности рассуждений, так как этого можно добиться с помощью линейной неособенной замены переменных системы (1), используя алгоритмы элементарных преобразований строк матрицы.

Будем также предполагать, что среднее значение матрицы коэффициентов представимо в виде

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{k_1 \ldots k_d}^{k_1 \ldots k_d} & \hat{A}_{k_1 \ldots k_d}^{k_{d+1} \ldots k_n} \\ \hat{A}_{k_{d+1} \ldots k_n}^{k_1 \ldots k_d} & \hat{A}_{k_{d+1} \ldots k_n}^{k_{d+1} \ldots k_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{A}_{k_{d+1} \ldots k_n}^{k_{d+1} \ldots k_n} \end{pmatrix}, \quad \hat{A}_{k_{d+1} \ldots k_n}^{k_{d+1} \ldots k_n} = \mathrm{diag}\,(\hat{a}_{k_{d+1} k_{d+1}}, \ldots, \hat{a}_{k_n k_n}), \tag{4}$$

причем, считаем, что среди диагональных элементов правого нижнего блока $\hat{A}_{k_{d+1} \ldots k_n}^{k_{d+1} \ldots k_n}$ имеются нулевые, т. е. он является вырожденным. Без ограничения общности допускаем, что нулевые элементы стоят в начале диагонали

$$\hat{a}_{k_{d+j} k_{d+j}} = 0, \quad j = \overline{1, m}, \quad 1 \le m < n - d, \tag{5}$$

поскольку этого можно добиться с помощью перестановки последних $n - d$ уравнений системы (1) в требуемом порядке.

В настоящем сообщении для описанного класса систем (1) исследуем вопрос о разрешимости задачи управления асинхронным спектром.

Основной результат. Пусть $k_{d+1}, \ldots, k_n$, $1 \le k_{d+1} < \ldots < k_n \le n$, – номера ненулевых строк матрицы B. С учетом нумерации нулевых и ненулевых строк этой матрицы для упрощения записи примем следующие обозначения:

$$A_{11}(t) = A_{k_1 \ldots k_d}^{k_1 \ldots k_d}(t), \quad A_{12}(t) = A_{k_1 \ldots k_d}^{k_{d+1} \ldots k_n}(t), \quad A_{21}(t) = A_{k_{d+1} \ldots k_n}^{k_1 \ldots k_d}(t), \quad A_{22}(t) = A_{k_{d+1} \ldots k_n}^{k_{d+1} \ldots k_n}(t),$$
$$x' = \operatorname{col}(x_{k_1}, \ldots, x_{k_d}), \quad x'' = \operatorname{col}(x_{k_{d+1}}, \ldots, x_{k_n}).$$

Если у некоторого вектора $(\cdot)$ произвольным образом поменять местами его элементы, то через $\operatorname{ord}_{\text{row}}(\cdot)$ обозначим обратную процедуру упорядочивания элементов по возрастанию их номеров. Тогда, в частности, будем иметь $\operatorname{ord}_{\text{row}}(\operatorname{col}(x', x'')) = x$.

Применительно к матрице при управлении B для краткости положим

$$B_{11} = B_{k_1 \ldots k_d}^{1 \ldots r}, \quad B_{21} = B_{k_{d+1} \ldots k_n}^{1 \ldots r}.$$

Из условия (3) вытекает, что $(d \times r)$-матрица B_{11} нулевая, а $(r_1 \times r)$-матрица B_{21}, составленная из ненулевых строк матрицы B с номерами $1 \le k_{d+1} < \ldots < k_n \le r$, имеет максимальный ранг, равный числу ее строк

$$\operatorname{rank} B_{21} = r_1. \tag{6}$$

Через $A^{(1)}(t)$ обозначим $(d \times n)$-матрицу, составленную из матриц $A_{11}(t)$, $A_{12}(t)$. Иначе говоря, матрица $A^{(1)}(t)$ образована строками матрицы коэффициентов $A(t)$ с номерами $k_1, \ldots, k_d$.

Справедлива

Т е о р е м а. *Для класса линейных систем (1), (3)–(5) задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L разрешима тогда и только тогда, когда $L = \{0\}$ и выполняется неравенство*

$$\operatorname{rank}_{\text{col}} A^{(1)}(t) = k < n. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть для указанного класса линейных систем выполнены условия теоремы. Программное управление, решающее задачу, будем искать в виде

$$u = U(t) = \hat{U} + \tilde{U}(t),$$

где $\tilde{U}(t)$ – осциллирующая составляющая, т. е. периодический вектор с нулевым средним значением, множество частот которого содержится в $\operatorname{Mod}(A)$, а $\hat{U}$ – стационарная составляющая программного управления $U(t)$. Из [11] следует, что в смысле существования искомых сильно нерегулярных периодических решений $x = x(t)$ система (2) эквивалентна следующей системе, состоящей из двух подсистем:

$$\dot{x} = \hat{A}x + B\hat{U}, \quad \tilde{A}(t)x + B\tilde{U}(t) = 0. \tag{8}$$

Поэтому поставленная задача сводится к построению такой вектор-функции $U(t)$ из допустимого множества, чтобы система (8) имела сильно нерегулярное периодическое решение. В силу вещественности собственных значений матрицы $\hat{A}$ из строения первой подсистемы в (8) вытекает, что ее периодическое решение, а значит и периодическое решение всей системы (8) может быть только стационарным. Следовательно, $x = x(t) \equiv \text{const}$.

В принятых ранее обозначениях систему (8) можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{x}'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} \hat{U},$$
$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{11}(t) & \tilde{A}_{12}(t) \\ \tilde{A}_{21}(t) & \tilde{A}_{22}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} \tilde{U}(t) = 0,$$

откуда в силу условия (3) получаем состоящую из четырех подсистем систему

$$\dot{x}' = \hat{A}_{11}x' + \hat{A}_{12}x'', \quad \dot{x}'' = \hat{A}_{21}x' + \hat{A}_{22}x'' + B_{21}\hat{U},$$
$$\tilde{A}_{11}(t)x' + \tilde{A}_{12}(t)x'' = 0, \quad \tilde{A}_{21}(t)x' + \tilde{A}_{22}(t)x'' + B_{21}\tilde{U}(t) = 0.$$

С учетом предположений (4), (5) о структуре усреднения $\hat{A}$ матрицы коэффициентов, последняя система примет вид

$$\begin{gathered}\dot{x}' = \operatorname{diag}(0, \ldots, 0)x', \quad \dot{x}'' = \operatorname{diag}(0, \ldots, 0, \hat{a}_{k_{d+m+1}k_{d+m+1}}, \ldots, \hat{a}_{k_n k_n})x'' + B_{21}\hat{U}, \\ \tilde{A}_{11}(t)x' + A_{12}(t)x'' = 0, \quad A_{21}(t)x' + \tilde{A}_{22}(t)x'' + B_{21}\tilde{U}(t) = 0.\end{gathered} \tag{9}$$

Представим вектор x'' в виде

$$x'' = \operatorname{col}(x''_{(1)}, x''_{(2)}), \tag{10}$$

где векторы $x''_{(1)}$ и $x''_{(2)}$ составлены соответственно из первых m и последних $r_1 - m$ компонент вектора x''. Пусть также $B_{21}^{(1)}$ и $B_{21}^{(2)}$ – блоки, образованные первыми m и последними $r_1 - m$ строками матрицы B_{21}. Тогда с учетом представления (10) система (9) запишется следующим образом:

$$\begin{gathered}\dot{x}' = 0, \quad \dot{x}''_{(1)} = \operatorname{diag}(0, \ldots, 0)x''_{(1)} + B_{21}^{(1)}\hat{U}, \\ \dot{x}''_{(2)} = \operatorname{diag}(\hat{a}_{k_{d+m+1}k_{d+m+1}}, \ldots, \hat{a}_{k_n k_n})x''_{(2)} + B_{21}^{(2)}\hat{U}, \\ A_{11}(t)x' + A_{12}(t)x'' = 0, \quad A_{21}(t)x' + \tilde{A}_{22}(t)x'' + B_{21}\tilde{U}(t) = 0.\end{gathered} \tag{11}$$

Используя принятые выше обозначения выпишем отдельно четвертую подсистему из системы (9)

$$A^{(1)}(t)\operatorname{col}(x', x''_{(1)}, x''_{(2)}) = 0. \tag{12}$$

В силу оценки (7) столбцовый ранг блока $A^{(1)}(t)$, составленного из строк матрицы коэффициентов исходной системы, является неполным. Тогда согласно [6, с. 43] найдется постоянная неособенная $(n \times n)$-матрица Q такая, что у матрицы $A_Q^{(1)}(t) = A^{(1)}(t)Q$ первые $n - k$ столбцов будут нулевыми, а остальные k столбцов будут линейно независимыми.

Систему (12) при помощи замены переменных

$$\operatorname{col}(x', x'') = \operatorname{col}(x', x''_{(1)}, x''_{(2)}) = Qy \tag{13}$$

приведем к системе

$$A_Q^{(1)}(t)y = 0. \tag{14}$$

Отметим, что матрица $A_Q^{(1)}(t)$ является ω-периодической. Исследуем систему (14) на предмет структуры сильно нерегулярных периодических решений $y = y(t)$. Поскольку последние k столбцов матрицы $A_Q^{(1)}(t)(t)$ линейно независимы, то в силу [6, с. 41] соответствующие компоненты вектора $y(t)$ должны быть нулевыми

$$y(t) = \operatorname{col}(y^{(1)}(t), 0, \ldots, 0),$$

где $y^{(1)}(t) = \operatorname{col}(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_k(t))$, $\alpha_j(t)$, $j = \overline{1, n-k}$, – некоторые произвольные периодические функции периода Ω, несоизмеримого с ω. Поскольку выше показано, что искомое сильно нерегулярное периодическое решение $x(t)$ является стационарным, то в силу неособенности преобразования (14) вектор $y = y(t)$ также будет постоянным. Значит, $\alpha_j(t) \equiv C_j$, $j = \overline{1, n-k}$, и

$$y(t) = \mathrm{col}(C_1, \ldots, C_{n-k}, 0, \ldots, 0), \tag{15}$$

где C_j, $j = \overline{1, n-k}$, – некоторые произвольные вещественные постоянные.

Тогда на основании (13), (15) компоненты сильно нерегулярного периодического решения $x = x(t)$ системы (11) представимы следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathrm{col}(x'(t), x''(t)) = \mathrm{col}(x'(t), x''_{(1)}(t), x''_{(2)}(t)) = \\ = Q\mathrm{col}(C_1, \ldots, C_{n-k}, 0, \ldots, 0), \end{aligned} \tag{16}$$

где константы C_j, $j = \overline{1, k}$, определены в (15).

Обозначим матрицу, составленную из первых $n - k$ столбцов матрицы Q через $Q_{n,n-k}$. Разбиение матрицы $Q_{n,n-k}$ на три вертикальных блока $Q^{(1)}_{n,n-k}$, $Q^{(2)}_{n,n-k}$, $Q^{(3)}_{n,n-k}$ размерностей соответственно $d \times (n - k)$, $m \times (n - k)$, $(n - d - m) \times (n - k)$ позволит найти из (16) векторы

$$\begin{gathered} x'(t) = Q^{(1)}_{n,n-k}\mathrm{col}(C_1, \ldots, C_{n-k}), \\ x''_{(1)}(t) = Q^{(2)}_{n,n-k}\mathrm{col}(C_1, \ldots, C_{n-k}), \quad x''_{(2)}(t) = Q^{(3)}_{n,n-k}\mathrm{col}(C_1, \ldots, C_{n-k}). \end{gathered} \tag{17}$$

В силу построения все векторы (17) удовлетворяют четвертой подсистеме из (11). Несложно убедиться в том, что вектор $x'(t)$, в частности, удовлетворяет без дополнительных ограничений первой подсистеме из (11). Вектор же $x''_{(1)}(t)$ является решением второй подсистемы из (11) только при выполнении условия

$$B^{(1)}_{21}\hat{U} = 0. \tag{18}$$

В свою очередь вектор $x''_{(2)}(t)$ удовлетворяет третьей подсистеме из (11), если имеет место равенство

$$\mathrm{diag}(\hat{a}_{k_{d+m+1}k_{d+m+1}}, \ldots, \hat{a}_{k_n k_n})Q^{(2)}_{n,n-k}\mathrm{col}(C_1, \ldots, C_{n-k}) + B^{(2)}_{21}\hat{U} = 0. \tag{19}$$

Значит, вектор (17) будет решением первых четырех подсистем системы (11) при выполнении условий (18) и (19), которые представляют собой линейные алгебраические системы m и $n - d - m$ уравнений соответственно относительно неизвестного вектора $\hat{U}$. Объединим эти условия следующим образом:

$$B_{21}\hat{U} = \mathrm{col}(0, \ldots, 0, \mathrm{diag}(\hat{a}_{k_{d+m+1}k_{d+m+1}}, \ldots, \hat{a}_{k_n k_n})Q^{(2)}_{n,n-k}\mathrm{col}(C_1, \ldots, C_{n-k})) = H(C_1, \ldots, C_{n-k}). \tag{20}$$

Рассмотрим линейную неоднородную алгебраическую систему

$$B_{21}z = H(C_1, \ldots, C_{n-k}) \tag{21}$$

относительно неизвестного постоянного вектора z. В силу (6) ранг матрицы B_{21} равен числу ее строк, которое меньше числа столбцов. Поэтому ранги основной и расширенной матриц системы (21) совпадают, что свидетельствует о разрешимости этой системы. Пусть

$$z = z(C_1, \ldots, C_{n-k}) \tag{22}$$

– некоторое решение системы (21), где $z(C_1, \ldots, C_{n-k})$ – линейная форма постоянных $C_1, \ldots, C_{n-k}$.

Тогда вектор

$$\hat{U} = z(C_1, \ldots, C_{n-k}) \tag{23}$$

будет решением системы (20). Иначе говоря, выбор стационарной составляющей управления в виде (22), (23) обеспечивает выполнение условий (18), (19). Следовательно, вектор (17) будет решением первых четырех подсистем системы (11).

Наконец, осталось выяснить, когда вектор (17) будет удовлетворять последней подсистеме из (11). Для этого составим вспомогательную систему относительно неизвестной ω-периодической вектор-функции $\tilde{U}(t)$ с нулевым средним

$$B_{21}\tilde{U}(t) = -A_{21}(t)Q_{n,n-k}^{(1)}\operatorname{col}(C_1,\ldots,C_{n-k}) -$$
$$-\tilde{A}_{22}(t)\operatorname{col}(Q_{n,n-k}^{(2)}\operatorname{col}(C_1,\ldots,C_{n-k}), Q_{n,n-k}^{(3)}\operatorname{col}(C_1,\ldots,C_{n-k})) = F(t, C_1,\ldots,C_{n-k}), \tag{24}$$

где вектор-функция $F(t, C_1,\ldots,C_{n-k})$ будет ω-периодической по t и имеет нулевое среднее значение в силу свойств матриц $A_{21}(t)$, $\tilde{A}_{22}(t)$. Пусть $E_{r_1r_1}$ – единичная $(r_1 \times r_1)$-матрица. Так как ранг матрицы B_{21} равен числу ее строк, то матричное уравнение

$$B_{21}V + E_{r_1r_1} = 0$$

разрешимо относительно постоянной $(r \times r_1)$-матрицы V. Возьмем какое-либо его решение $V = V_E$. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что вектор

$$\tilde{U}(t) = V_E F(t, C_1,\ldots,C_{n-k}) \tag{25}$$

ω-периодический по t, имеет нулевое среднее значение и удовлетворяет системе (24). Другими словами, выбор осциллирующей составляющей управления в виде (25) обеспечивает выполнение условия (24). При этом несложно убедиться, что при подстановке в пятую подсистему из (11) векторов (17), (24) получим верное тождество. Следовательно, вектор (17) будет решением и последней подсистемы системы (11).

В итоге построено управление (23), (25) такое, что система (11) будет иметь решение (17), записав которое в виде

$$x(t) = \operatorname{ord}_{\text{row}}(\operatorname{col}(x'(t), x''(t))), \tag{26}$$

получим искомое решение системы (8). Как отмечено выше, вектор, определяемый равенством (26), будет удовлетворять также и системе (2).

Н е о б х о д и м о с т ь. Предположим, что построено управление $U(t)$ из допустимого множества такое, что система (2) имеет нетривиальное периодическое решение $x = x(t)$ с частотным спектром L. Из [11] следует, что вектор $x(t)$ удовлетворяет тождеству

$$-\dot{x}(t) + \hat{A}x(t) + B\hat{U} \equiv 0,$$

т. е. является решением линейной дифференциальной системы с постоянными матрицей коэффициентов $\hat{A}$ и постоянной неоднородной частью $B\hat{U}$. Отсюда, в силу условия (4) на матрицу $\hat{A}$ вытекает, что $x(t) \equiv \text{const}$. Следовательно, $L = \{0\}$.

Кроме этого должно выполняться тождество

$$\tilde{A}(t)x(t) \equiv 0,$$

из которого для компонет $x'(t) = \operatorname{col}(x_{k_1}(t),\ldots,x_{k_d}(t))$, $x''(t) = \operatorname{col}(x_{k_{d+1}}(t),\ldots,x_{k_n}(t))$ вектора $x(t)$ в силу предположений (3), (4) получаем тождество

$$A_{11}(t)x'(t) + A_{12}(t)x''(t) = A^{(1)}(t)\operatorname{col}(x'(t), x''(t)) \equiv 0.$$

Так как пересечение частотных модулей матрицы $A(t)$ и решения $x(t)$ тривиально, то таким же будет и пересечение частотных модулей ее блока $A^{(1)}(t)$ и вектора $\operatorname{col}(x'(t), x''(t))$, $\operatorname{ord}_{\text{row}}(\operatorname{col}(x'(t), x''(t))) = x(t)$. Поэтому из последнего тождества согласно [6, с. 41] следует, что матрица $A^{(1)}(t)$ имеет неполный столбцовый ранг, т. е. выполняется оценка (7).

Теорема доказана.

Благодарности. Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси в рамках ГПФИ «Конвергенция–2025» (подпрограмма «Математические модели и методы»).

Acknowledgements. The work was carried out at the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus within the framework of the SPFI “Convergence–2025” (subprogram “Mathematical Models and Methods”).

Список использованных источников

1. Зубов, В. И. Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – М., 1975. – 495 с.

2. Макаров, Е. К. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем / Е. К. Макаров, С. Н. Попова. – Минск, 2012. – 407 с.

3. Massera, J. L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales / J. L. Massera // Boletin de la Facultad de Ingenieria. – 1950. – Vol. 4, N 1. – P. 37–45.

4. Курцвейль, Я. О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Я. Курцвейль, О. Вейвода // Чехословацкий математический журнал. – 1955. – Т. 5, № 3. – С. 362–370.

5. Деменчук, А. К. Задача управления спектром сильно нерегулярных периодических колебаний / А. К. Деменчук // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2009. – Т. 53, № 4. – С. 37–42.

6. Деменчук, А. К. Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления / А. К. Деменчук. – Saarbrucken, 2012. – 186 с.

7. Деменчук, А. К. Управление асинхронным спектром линейных систем с нулевым средним значением матрицы коэффициентов / А. К. Деменчук // Труды Института математики. – 2018. – Т. 26, № 1. – С. 31–34.

8. Деменчук, А. К. Управление асинхронным спектром линейных систем с невырожденным средним значением матрицы коэффициентов / А. К. Деменчук // Труды Института математики. – 2020. – Т. 28, № 1–2. – С. 11–16.

9. Деменчук, А. К. Управление асинхронным спектром линейных систем с матрицей при управлении максимального ранга / А. К. Деменчук // Труды Института математики. – 2019. – Т. 27, № 1–2. – С. 23–28.

10. Деменчук, А. К. Управление асинхронным спектром линейных систем с невырожденным диагональным блоком усреднения матрицы коэффициентов / А. К. Деменчук // Труды Института математики. – 2022. – Т. 30, № 1–2. – С. 22–29.

11. Грудо, Э. И. О периодических решениях с несоизмеримыми периодами линейных неоднородных периодических дифференциальных систем / Э. И. Грудо, А. К. Деменчук // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, № 3. – С. 409–416.

References

1. Zubov V. I. *Lectures on Control Theory*. Moscow, 1975. 495 p. (in Russian).

2. Makarov E. K., Popova S. N. *Controllability of Asymptotic Invariants of Nonstationary Linear Systems*. Minsk, 2012. 407 p. (in Russian).

3. Massera J. L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales. *Boletin de la Facultad de Ingenieria*, 1950, vol. 4, no. 1, pp. 37–45.

4. Kurzweil J., Vejvoda O. On the periodic and almost periodic solutions of a system of ordinary differential equations. *Chekhoslovatskii matematicheskii zhurnal = Czechoslovak Mathematical Journal*, 1955, vol. 5, no. 3, pp. 362–370 (in Russian).

5. Demenchuk A. K. The control problem of the spectrum of strongly irregular periodic oscillations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2009, vol. 53, no. 4, pp. 37–42 (in Russian).

6. Demenchuk A. *Asynchronous Oscillations in Differential Systems. Conditions of Existence and Control*. Saarbrucken, 2012. 186 p. (in Russian).

7. Demenchuk A. K. Control of the asynchronous spectrum of linear systems with zero mean value of the matrix of coefficients. *Trudy Instituta Matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2018, vol. 26, no. 1, pp. 31–34 (in Russian).

8. Demenchuk A. K. Control of the asynchronous spectrum of linear systems with a non-degenerate mean value of the matrix of coefficients. *Trudy Instituta Matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2020, vol. 28, no. 1–2, pp. 11–16 (in Russian).

9. Demenchuk A. K. Asynchronous spectrum control of linear systems with a matrix under maximum rank control. *Trudy Instituta Matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2019, vol. 27, no. 1–2, pp. 23–28 (in Russian).

10. Demenchuk A. K. Control of the asynchronous spectrum of linear systems with a non-degenerate diagonal averaging block of the matrix of coefficients. *Trudy Instituta Matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2022, vol. 30, no. 1–2, pp. 22–29 (in Russian).

11. Grudo E. I., Demenchuk A. K. On periodic solutions with incommensurable periods of linear nonhomogeneous periodic differential systems. *Differential Equations*, 1987, vol. 23, no. 3, pp. 409–416 (in Russian).

Информация об авторе

Деменчук Александр Константинович – д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: demenchuk@im.bas-net.by.

Information about the author

Demenchuk Aleksandr K. – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Science of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: demenchuk@im.bas-net.by.