

ISSN 1561-8323 (Print)  
ISSN 2524-2431 (Online)

**МАТЕМАТИКА**  
**MATHEMATICS**

УДК 512.542  
<https://doi.org/10.29235/1561-8323-2025-69-5-359-366>

Поступило в редакцию 30.07.2025  
Received 30.07.2025

**И. Н. Сафонова, В. В. Скрундь**

*Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь*

**МИНИМАЛЬНЫЕ  $\tau$ -ЗАМКНУТЫЕ  $\sigma$ -ЛОКАЛЬНЫЕ НЕ  $\mathfrak{H}$ -ФОРМАЦИИ  
КОНЕЧНЫХ ГРУПП**

*(Представлено академиком Н. А. Изобовым)*

**Аннотация.** Получено описание минимальных  $\tau$ -замкнутых  $\sigma$ -локальных не  $\mathfrak{H}$ -формаций для произвольной  $\sigma$ -локальной формации  $\mathfrak{H}$  классического типа, т. е.  $\sigma$ -локальной формации, которая имеет такое  $\sigma$ -локальное определение, все неабелевы значения которого  $\sigma$ -локальные формации. Данный результат дает решение задачи Л. А. Шеметкова (1980 г.) об описании критических формаций в классе  $\tau$ -замкнутых  $\sigma$ -локальных формаций, где  $\sigma$  – некоторое разбиение множества всех простых чисел,  $\tau$  – произвольный подгрупповой функтор.

**Ключевые слова:** конечная группа, формационная  $\sigma$ -функция,  $\sigma$ -локальная формация, подгрупповой функтор,  $\tau$ -замкнутая формация, критическая  $\sigma$ -локальная формация, формация классического типа

**Для цитирования.** Сафонова, И. Н. Минимальные  $\tau$ -замкнутые  $\sigma$ -локальные не  $\mathfrak{H}$ -формации конечных групп / И. Н. Сафонова, В. В. Скрундь // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2025. – Т. 69, № 5. – С. 359–366. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2025-69-5-359-366>

**Inna N. Safonova, Valentina V. Skrundz**

*Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus*

**MINIMAL  $\tau$ -CLOSED  $\sigma$ -LOCAL NON- $\mathfrak{H}$ -FORMATIONS OF FINITE GROUPS**

*(Communicated by Academician Nikolay A. Izobov)*

**Abstract.** A description of minimal  $\tau$ -closed  $\sigma$ -local non- $\mathfrak{H}$ -formations is obtained for an arbitrary  $\sigma$ -local formation  $\mathfrak{H}$  of classical type, i. e., a  $\sigma$ -local formation that has such a  $\sigma$ -local definition, all non-abelian values of which are  $\sigma$ -local formations. This result provides a solution to L. A. Shemetkov's problem (1980) on describing critical formations in the class of  $\tau$ -closed  $\sigma$ -local formations, where  $\sigma$  is some partition of the set of all prime numbers,  $\tau$  is an arbitrary subgroup functor.

**Keyword:** finite group, formation  $\sigma$ -function,  $\sigma$ -local formation, subgroup functor,  $\tau$ -closed formation, critical  $\sigma$ -local formation, formation of classical type

**For citation.** Safonova I. N., Skrundz V. V. Minimal  $\tau$ -closed  $\sigma$ -local non- $\mathfrak{H}$ -formation of finite groups. *Doklady National'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2025, vol. 69, no. 5, pp. 359–366. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2025-69-5-359-366>

**Введение.** При изучении внутренней структуры и классификации локальных формаций важную роль играют минимальные локальные не  $\mathfrak{H}$ -формации [1] или  $\mathfrak{H}_I$ -критические формации [2], т. е. такие локальные формации  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ , все собственные локальные подформации которых содержатся в классе групп  $\mathfrak{H}$ . Общая проблема изучения критических формаций поставлена Л. А. Шеметковым [1] на VI Всесоюзном симпозиуме по теории групп. Решению данной задачи в классе локальных формаций посвящен цикл работ А. Н. Скибы 1980–1993 гг. Наиболее общим и завершающим результатом построенной им теории стало описание  $\mathfrak{H}_I$ -критических формаций для

произвольной формации  $\mathfrak{H}$  классического типа [3] (формация  $\mathfrak{H}$  называется *формацией классического типа*, если она имеет такой локальный экран, все неабелевы значения которого локальны). Теории  $\mathfrak{H}_l$ -критических формаций широко использовались при изучении локальных формаций с заданной структурой подформаций, описании несократимых факторизаций локальных формаций, изучении полугрупп локальных формаций и др. [4; 5].

Развитие теории  $\sigma$ -локальных формаций привело к необходимости разработки методов теории критических формаций. Отметим, что задача Л. А. Шеметкова о классификации критических формаций в классе  $\sigma$ -локальных формаций решена в [6; 7] для произвольной  $\sigma$ -локальной формации  $\mathfrak{H}$  классического типа.

При решении многих задач теории групп и их классов часто возникает необходимость рассматривать классы групп, замкнутые относительно заданных систем подгрупп согласованных с гомоморфизмами. Наиболее общий подход в этом направлении исследований был предложен А. Н. Скибой на основе понятия подгруппового функтора и функторно замкнутого класса групп.

Пусть каждой группе  $G$  сопоставлена некоторая система ее подгрупп  $\tau(G)$ . Тогда  $\tau$  называется *подгрупповым функтором* (в смысле А. Н. Скибы [5, с. 16]), если выполняются условия: (1)  $G \in \tau(G)$  для каждой группы  $G$ ; (2) для любого эпиморфизма  $\varphi: A \rightarrow B$  и для любых групп  $H \in \tau(A)$  и  $T \in \tau(B)$  имеем  $H^\varphi \in \tau(B)$  и  $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$ .

Класс групп  $\mathfrak{F}$  называется  $\tau$ -замкнутым, или *функторно замкнутым*, если  $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$  для любой группы  $G \in \mathfrak{F}$ . Подгруппу  $A \in \tau(G)$  называют  $\tau$ -подгруппой группы  $G$ .

Теория  $\tau$ -замкнутых локальных формаций представлена в [5]. Ключевым инструментом при изучении внутренней структуры функторно замкнутых локальных формаций, а также их классификации стали  $\mathfrak{H}_l^\tau$ -критические формации.

В теории  $\tau$ -замкнутых  $\sigma$ -локальных формаций изучение  $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -критических формаций начато авторами в [8; 9], где доказан критерий для формаций такого вида и дано описание  $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -критических формаций для ряда конкретных классов групп  $\mathfrak{H}$ . При этом, следуя [1; 2],  $\tau$ -замкнутую  $\sigma$ -локальную формацию  $\mathfrak{F}$  мы называем *минимальной  $\tau$ -замкнутой  $\sigma$ -локальной не  $\mathfrak{H}$ -формацией*, или  *$\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -критической формацией*, если  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ , но все ее собственные  $\tau$ -замкнутые  $\sigma$ -локальные подформации содержатся в классе групп  $\mathfrak{H}$ .

В настоящем сообщении решена задача Л. А. Шеметкова (1980 г.) о классификации критических формаций в классе  $\tau$ -замкнутых  $\sigma$ -локальных формаций, а также обобщены и развиты основные результаты работ [3; 5, гл. 2; 7] и др.

**Основные определения и обозначения.** Все рассматриваемые в работе группы предполагаются конечными. Основные определения, обозначения теории  $\sigma$ -свойств групп, а также теории  $\sigma$ -локальных формаций можно найти в [10–15]. Пусть  $\sigma = \{\sigma_i \mid i \in I\}$  – некоторое разбиение множества всех простых чисел. Если  $n$  – целое число,  $G$  – группа и  $\mathfrak{F}$  – класс групп, то  $\sigma(n)$  обозначает множество  $\{\sigma_i \mid \sigma_i \cap \pi(n) \neq \emptyset\}$ ;  $\sigma(G) = \sigma(|G|)$ ;  $\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{G \in \mathfrak{F}} \sigma(G)$ .

Группа  $G$  называется [10]  $\sigma$ -*примарной*, если  $G$  является  $\sigma_i$ -группой для некоторого  $i$ ;  $\sigma$ -*нильпотентной*, если  $G$  является прямым произведением  $\sigma$ -примарных групп;  $\sigma$ -*разрешимой*, если каждый главный фактор группы  $G$  является  $\sigma$ -примарным. Класс всех  $\sigma$ -разрешимых групп обозначают через  $\mathfrak{S}_\sigma$ , а через  $\mathfrak{N}_\sigma$  обозначают класс всех  $\sigma$ -нильпотентных групп.

Функция  $f$  вида  $f: \sigma \rightarrow \{\text{формации групп}\}$  называется *формационной  $\sigma$ -функцией* [11]. Для всякой формационной  $\sigma$ -функции  $f$  класс  $LF_\sigma(f)$  определяется следующим образом:

$$LF_\sigma(f) = (G \mid G = 1 \text{ или } G \neq 1 \text{ и } G / O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i) \text{ для всех } \sigma_i \in \sigma(G)).$$

Если для некоторой формационной  $\sigma$ -функции  $f$  имеет место  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(f)$ , то говорят, что формация  $\mathfrak{F}$  является  $\sigma$ -*локальной*, а  $f$  –  $\sigma$ -*локальным определением формации  $\mathfrak{F}$* .

Пусть  $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$ . Тогда  $\Pi' = \sigma \setminus \Pi$ . Группу  $G$  называют  $\Pi$ -группой, если  $\sigma(G) \subseteq \Pi$ . Через  $\mathfrak{S}_\Pi$  обозначают класс всех  $\Pi$ -групп, а через  $\mathfrak{N}_\Pi$  – класс всех  $\sigma$ -нильпотентных  $\Pi$ -групп. В частности, если  $\Pi = \{\sigma_i\}$ , то  $\mathfrak{S}_{\sigma_i}$  – класс всех  $\sigma_i$ -групп,  $\mathfrak{S}_{\sigma_i'}$  – класс всех  $\sigma_i'$ -групп.

Формационная  $\sigma$ -функция  $f$  называется  $\tau$ -значной, если  $f(\sigma_i)$  –  $\tau$ -замкнутая формация для каждого  $\sigma_i \in \sigma(LF_\sigma(f))$ ; *внутренней*, если  $f(\sigma_i) \subseteq LF_\sigma(f)$  для всех  $i$ ; *полной*, если  $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} f(\sigma_i)$  для всех  $i$ . Если  $F$  – полная внутренняя формационная  $\sigma$ -функция и  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$ , то  $F$  называют *каноническим  $\sigma$ -локальным определением  $\mathfrak{F}$* .

Подгрупповой функтор  $\tau$  называют [5]: *замкнутым*, если для любых двух групп  $G$  и  $H \in \tau(G)$  имеет место  $\tau(H) \subseteq \tau(G)$ ; *тривиальным*, если  $\tau(G) = \{G\}$  для любой группы  $G$ .

На множестве всех подгрупповых функторов частичный порядок  $\leq$  вводят полагая, что  $\tau_1 \leq \tau_2$ , если  $\tau_1(G) \subseteq \tau_2(G)$  для любой группы  $G$  [5]. Для любой совокупности подгрупповых функторов  $\{\tau_j \mid j \in J\}$  их пересечение  $\tau = \bigcap_{j \in J} \tau_j$  определяют следующим образом:  $\tau(G) = \bigcap_{j \in J} \tau_j(G)$  для любых групп  $G$ . Если  $\tau$  – произвольный подгрупповой функтор, то  $\bar{\tau}$  – пересечение всех замкнутых подгрупповых функторов  $\tau_i$ , для которых  $\tau \leq \tau_i$ , называют *замыканием функтора  $\tau$*  [5].

Совокупность всех  $\tau$ -замкнутых  $\sigma$ -локальных формаций будем обозначать через  $I_\sigma^\tau$ . Формации из  $I_\sigma^\tau$  мы называем  $I_\sigma^\tau$ -формациями. Для любого набора групп  $\mathfrak{X}$  символ  $I_\sigma^\tau \text{form} \mathfrak{X}$  обозначает  $I_\sigma^\tau$ -формацию, порожденную  $\mathfrak{X}$ , т. е. пересечение всех  $I_\sigma^\tau$ -формаций, содержащих  $\mathfrak{X}$ . Если  $\mathfrak{X} = \{G\}$  для некоторой группы  $G$ , то  $I_\sigma^\tau \text{form} G$  называют *однопорожденной  $\tau$ -замкнутой  $\sigma$ -локальной формацией*. Напомним также, что  $\tau$ -замкнутую формацию, порожденную совокупностью групп  $\mathfrak{X}$ , обозначают символом  $\tau \text{form} \mathfrak{X}$ .

$I_\sigma^\tau$ -Формацию  $\mathfrak{F}$  называют *неприводимой  $\tau$ -замкнутой  $\sigma$ -локальной формацией*, или  $I_\sigma^\tau$ -неприводимой формацией, если  $\mathfrak{F} \neq I_\sigma^\tau \text{form}(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{X}_i)$ , где  $\{\mathfrak{X}_i \mid i \in I\}$  – набор всех собственных  $I_\sigma^\tau$ -подформаций из  $\mathfrak{F}$ . Если же найдутся такие собственные  $\tau$ -замкнутые  $\sigma$ -локальные подформации  $\mathfrak{X}$  и  $\mathfrak{H}$  из  $\mathfrak{F}$ , что  $\mathfrak{F} = I_\sigma^\tau \text{form}(\mathfrak{X} \cup \mathfrak{H})$ , то  $\mathfrak{F}$  называют *приводимой  $\tau$ -замкнутой  $\sigma$ -локальной формацией*, или  $I_\sigma^\tau$ -приводимой формацией.

Пусть  $\{f_j \mid j \in J\}$  – некоторый набор  $\tau$ -значных формационных  $\sigma$ -функций. Мы используем символ  $\bigcap_{j \in J} f_j$  для обозначения формационной  $\sigma$ -функции  $h$  такой, что  $h(\sigma_i) = \bigcap_{j \in J} f_j(\sigma_i)$ . Если  $\{f_j \mid j \in J\}$  – набор всех  $\tau$ -значных  $\sigma$ -локальных определений формации  $\mathfrak{F}$ , то  $f = \bigcap_{j \in J} f_j$  называют *наименьшим  $\tau$ -значным  $\sigma$ -локальным определением формации  $\mathfrak{F}$* .

**Вспомогательные результаты.** Доказательство основного результата базируется на следующих доказанных нами вспомогательных утверждениях.

**Л е м м а 1.** Пусть  $\mathfrak{F} = LF_\sigma(F)$ , где  $F$  – каноническое  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{F}$  и пусть  $\mathfrak{H}$  – такая непустая формация, что  $\sigma(\mathfrak{H}) \subseteq \sigma(\mathfrak{F})$ . Тогда формация  $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = LF_\sigma(H)$ , где  $H$  – каноническое  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{F}\mathfrak{H}$ , при этом справедливы утверждения:

- 1)  $H(\sigma_i) = F(\sigma_i)\mathfrak{H}$ , если  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{F})$ ;
- 2)  $H(\sigma_i) = \emptyset$ , если  $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{F})$ .

Доказательство леммы осуществляется с привлечением [12, лемма 2.1; 4, лемма 3.35].

**Л е м м а 2.** Пусть  $G = P \wr H = K \rtimes H$  – регулярное сплетение групп  $P$  и  $H$ , где  $P$  – неединичная  $\sigma_i$ -группа для некоторого  $i \in I$ ,  $K$  – база сплетения  $G$ , а  $H$  – такая монолитическая группа с монолитом  $Q$ , что  $\sigma_i \notin \sigma(Q)$  и  $\Phi(H) = 1$ . И пусть  $\mathfrak{X}$  – множество всех собственных  $\bar{\tau}$ -подгрупп группы  $H$ . Тогда формация  $\mathfrak{F} = I_\sigma^\tau \text{form} G$  является  $I_\sigma^\tau$ -неприводимой и ее максимальная  $\tau$ -замкнутая  $\sigma$ -локальная подформация  $\mathfrak{H}$  имеет такое внутреннее  $\tau$ -значное  $\sigma$ -локальное определение  $h$ , что  $h(\sigma_i) = \tau \text{form}(\mathfrak{X} \cup \{H/Q\})$ ,  $h(\sigma_j) = \tau \text{form}(G/O_{\sigma_j', \sigma_j}(G))$  для всех  $\sigma_j \in \sigma(G) \setminus \{\sigma_i\}$  и  $h(\sigma_j) = \emptyset$  для всех  $\sigma_j \notin \sigma(G)$ .

Доказательство леммы основано на следующих результатах: [5, лемма 2.1.5]; [6, лемма 3.2]; [13, теорема 1.1, лемма 3.2, следствие 3.1]; [15, следствие 1.2].

**Л е м м а 3.** Пусть  $\mathfrak{M}$  – непустая формация,  $\emptyset \neq \Pi \subseteq \sigma$ . Тогда каноническое  $\sigma$ -локальное определение  $H$  формации  $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\Pi'} \mathfrak{M} \Pi \mathfrak{M}$  такое, что  $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i'} \mathfrak{M}$  для всех  $\sigma_i \in \Pi$  и  $H(\sigma_i) = \mathfrak{H}$  для всех  $\sigma_i \in \Pi'$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\Pi'} \mathfrak{M} \Pi$ . Согласно [7, лемма 2.1(1)] формация  $\mathfrak{G}_{\Pi'}$  имеет такое  $\sigma$ -локальное определение  $t$ , что  $t(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\Pi'}$  при всех  $\sigma_i \in \Pi'$  и  $t(\sigma_i) = \emptyset$  при всех

$\sigma_i \in \Pi$ . При этом по [7, лемма 2.1(2)] формация  $\mathfrak{N}_\Pi$  имеет такое  $\sigma$ -локальное определение  $N$ , что  $N(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$  при всех  $\sigma_i \in \Pi$  и  $N(\sigma_i) = \emptyset$  при всех  $\sigma_i \in \Pi'$ . Ввиду [12, теорема 1.14(i)] формация  $\mathfrak{F}$  имеет такое  $\sigma$ -локальное определение  $f$ , что  $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\Pi'} \mathfrak{N}_\Pi$  при всех  $\sigma_i \in \Pi'$  и  $f(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i}$  при всех  $\sigma_i \in \sigma$ . Значит, по лемме 1 формация  $\mathfrak{H}$  имеет такое  $\sigma$ -локальное определение  $H$ , что  $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\Pi'} \mathfrak{N}_\Pi \mathfrak{M}$ , если  $\sigma_i \in \Pi'$ , и  $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{M}$ , если  $\sigma_i \in \Pi$ . Кроме того, поскольку  $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\Pi'} \mathfrak{N}_\Pi \mathfrak{M} = \mathfrak{H}$  для всех  $\sigma_i \in \Pi'$  и  $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{G}_{\Pi'} \mathfrak{N}_\Pi \mathfrak{M} = \mathfrak{H}$  для всех  $\sigma_i \in \Pi$ , то  $\sigma$ -функция  $H$  является внутренней. Отметим также, что  $H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} H(\sigma_i)$  для всех  $i$ . Следовательно,  $H$  – каноническое  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{H}$ . Лемма доказана.

**Л е м м а 4.** Пусть  $A$  – монолитическая группа с не  $\sigma$ -примарным монолитом  $P$ ,  $\mathfrak{X}$  – множество всех собственных  $\tau$ -подгрупп группы  $A$ . Тогда  $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \text{form} A$  –  $l_\sigma^\tau$ -неприводимая формация, и ее максимальная  $\tau$ -замкнутая  $\sigma$ -локальная подформация  $\mathfrak{H}$  имеет такое внутреннее  $\sigma$ -локальное определение  $h$ , что  $h(\sigma_i) = \tau \text{form}(\mathfrak{X} \cup \{A/P\})$  для всех  $\sigma_i \in \sigma(P)$ ,  $h(\sigma_i) = \tau \text{form}(A/O_{\sigma_i', \sigma_i}(A))$  для всех  $\sigma_i \in \sigma(A) \setminus \sigma(P)$  и  $h(\sigma_i) = \emptyset$  для всех  $\sigma_i \notin \sigma(A)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $\mathfrak{H} = LF_\sigma(h)$ , где  $h$  –  $\sigma$ -функция из условия леммы. Ввиду [12, лемма 2.1; 15, теорема 3.7] формация  $\mathfrak{H}$  является  $\tau$ -замкнутой. Докажем, что  $(\mathfrak{X} \cup \{A/P\}) \subseteq \mathfrak{H}$ . Пусть  $G \in (\mathfrak{X} \cup \{A/P\})$ ,  $\sigma_i \in \sigma(G)$ . Тогда если  $\sigma_i \in \sigma(P)$ , то  $h(\sigma_i) = \tau \text{form}(\mathfrak{X} \cup \{A/P\})$  и  $G/O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \in h(\sigma_i)$ . Пусть  $\sigma_i \in \sigma(G) \setminus \sigma(P)$ . Тогда поскольку  $G \in \mathfrak{F}$ , то  $G/O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \in f(\sigma_i)$ , где  $f$  – наименьшее  $\tau$ -значное  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{F}$ . По [13, теорема 1.1] имеем  $f(\sigma_i) = \tau \text{form}(A/O_{\sigma_i', \sigma_i}(A)) = h(\sigma_i)$ . Поэтому  $G/O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \in h(\sigma_i)$ . Значит,  $G/O_{\sigma_i', \sigma_i}(G) \in h(\sigma_i)$  для всех  $\sigma_i \in \sigma(G)$ . Следовательно,  $G \in LF_\sigma(h) = \mathfrak{H}$ . Значит,  $(\mathfrak{X} \cup \{A/P\}) \subseteq \mathfrak{H}$ . Последнее означает, что  $h(\sigma_i) = \tau \text{form}(\mathfrak{X} \cup \{A/P\}) \subseteq \mathfrak{H}$  для всех  $\sigma_i \in \sigma(P)$ . Пусть  $\sigma_i \in \sigma(A) \setminus \sigma(P)$ . Тогда  $P \subseteq O_{\sigma_i', \sigma_i}(A)$  и  $A/O_{\sigma_i', \sigma_i}(A)$  – гомоморфный образ группы  $A/P$ . Поэтому  $A/O_{\sigma_i', \sigma_i}(A) \subseteq \tau \text{form}(\mathfrak{X} \cup \{A/P\}) \subseteq \mathfrak{H}$ . Последнее влечет  $h(\sigma_i) \subseteq \mathfrak{H}$ . Отсюда получаем, что  $\sigma$ -функция  $h$  является внутренней.

Пусть  $\mathfrak{M}$  – произвольная собственная  $l_\sigma^\tau$ -подформация из  $\mathfrak{F}$ ,  $m$  – ее наименьшее  $\tau$ -значное  $\sigma$ -локальное определение. Докажем, что  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ . По [13, следствие 3.1] имеем  $m \leq f$ . Ввиду [13, теорема 1.1] для всех  $\sigma_i \in \sigma(A) \setminus \pi(P)$  имеет место  $h(\sigma_i) = f(\sigma_i)$ . Следовательно, для всех  $\sigma_i \in \sigma(A) \setminus \pi(P)$  имеем  $m(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_i)$ . Пусть  $\sigma_i \in \sigma(P)$ . Тогда поскольку  $P$  не  $\sigma$ -примарная группа, то  $O_{\sigma_i', \sigma_i}(A) = 1$  и  $f(\sigma_i) = \tau \text{form}(A/O_{\sigma_i', \sigma_i}(A)) = \tau \text{form} A$  в силу [13, теорема 1.1]. Если  $f(\sigma_i) = m(\sigma_i)$ , то  $A \in m(\sigma_i)$ . Но  $m$  – внутреннее  $\sigma$ -локальное определение  $\mathfrak{M}$ . Значит,  $A \in \mathfrak{M}$ . Поэтому  $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \text{form} A \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ . Следовательно,  $\mathfrak{F} = \mathfrak{M}$ . Последнее противоречит определению формации  $\mathfrak{M}$ . Значит,  $m(\sigma_i) \subset f(\sigma_i)$ . В силу [5, лемма 2.1.5] формация  $f(\sigma_i) = \tau \text{form} A$  является  $\tau$ -неприводимой и всякая ее собственная  $\tau$ -подформация входит в  $\tau \text{form}(\mathfrak{X} \cup \{A/P\}) = h(\sigma_i)$ . Значит,  $m(\sigma_i) \subseteq h(\sigma_i)$ . Следовательно,  $m \leq h$  и  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$ .

По определению  $\sigma$ -функции  $h$  имеем  $h(\sigma_i) \subseteq f(\sigma_i)$  для всех  $\sigma_i$ . Поэтому  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ . Если  $\sigma_i \in \sigma(P)$ , то  $h(\sigma_i) = \tau \text{form}(\mathfrak{X} \cup \{A/P\}) \subset f(\sigma_i)$ . Значит,  $l(\sigma_i) \subset f(\sigma_i)$ , где  $l$  – наименьшее  $\tau$ -значное  $\sigma$ -локальное определение  $\mathfrak{H}$ . Отсюда  $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{F}$ . Из последнего следует, что  $\mathfrak{F} - l_\sigma^\tau$ -неприводимая формация и  $\mathfrak{H}$  – ее единственная максимальная  $l_\sigma^\tau$ -подформация. Лемма доказана.

**Л е м м а 5.** Пусть  $\mathfrak{M}$  –  $\sigma$ -локальная формация,  $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\sigma_i'} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{M}$ . Тогда  $\mathfrak{F}$  в том и только том случае является  $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -критической формацией, когда  $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \text{form} G$ , где  $G$  – такая монолитическая  $\tau$ -минимальная не  $\mathfrak{H}$ -группа с монолитом  $P = G^\mathfrak{H}$ , что  $\sigma_i \in \sigma(P)$ , и либо  $P$  – не  $\sigma$ -примарная группа, а  $G$  –  $\tau$ -минимальная не  $(\mathfrak{G}_{\sigma_i'} \mathfrak{M})$ -группа с  $P = G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i'} \mathfrak{M}}$ , либо  $G = P \rtimes H$ , где  $P = C_G(P)$  –  $p$ -группа,  $p \in \sigma_i$ , а  $H$  – такая монолитическая  $\tau$ -минимальная не  $(\mathfrak{G}_{\sigma_i'} \mathfrak{M})$ -группа с монолитом  $Q = H^{\mathfrak{G}_{\sigma_i'} \mathfrak{M}}$ , что  $Q \not\subseteq \Phi(H)$  и  $\sigma_i \notin \sigma(Q)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о** леммы осуществляется с привлечением лемм 3 и 4, а также следующих известных результатов: [5, лемма 2.1.5, следствие 1.2.23], [6, теорема 3.1, лемма 3.2], [12, теорема 1.13, лемма 2.1], [13, теорема 1.1, лемма 3.2, следствие 3.1].

**Л е м м а 6.** Пусть  $\mathfrak{M}$  – непустая абелева формация,  $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}_{\sigma_i'} \mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{M}$ . Тогда  $\mathfrak{F}$  в том и только том случае является  $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -критической формацией, когда  $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \text{form} G$ , где  $G$  – такая монолити-

ческая  $\bar{\tau}$ -минимальная не  $\mathfrak{H}$ -группа с монолитом  $P = G^{\mathfrak{H}}$ , что  $\sigma_i \in \sigma(P)$ , и либо  $P = G^{\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{M}}$  – не  $\sigma$ -примарная группа и  $G$  –  $\bar{\tau}$ -минимальная не  $(\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{M})$ -группа, либо  $G = P \rtimes H$ , где  $P = C_G(P)$  –  $p$ -группа,  $p \in \sigma_i$ , а  $H$  удовлетворяет одному из следующих условий: 1)  $H$  – монолитическая  $\bar{\tau}$ -минимальная не  $(\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{M})$ -группа с таким монолитом  $Q = H^{\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{M}} \not\subseteq \Phi(H)$ , что  $\sigma_i \notin \sigma(Q)$ ; 2)  $H$  – минимальная не  $\mathfrak{M}$ -группа одного из следующих типов: а) группа кватернионов порядка 8, если  $2 \notin \sigma_i$ ; б) экстраспециальная группа порядка  $q^3$  простой нечетной экспоненты  $q \notin \sigma_i$ ; в) циклическая  $q$ -группа,  $q \notin \sigma_i$ .

**Доказательство** леммы базируется на леммах 2–5, а также следующих известных фактах: [4, лемма 8.12], [5, лемма 1.2.22, следствие 1.2.23, лемма 2.1.5, лемма 2.2.4], [6, теорема 3.1, лемма 3.2], [12, лемма 2.1], [13, теорема 1.1, лемма 3.2].

**Лемма 7.** Пусть  $H$  – каноническое  $\sigma$ -локальное определение формации  $\mathfrak{H}$  и  $G = P \rtimes K$  – монолитическая группа с монолитом  $P = C_G(P) = O_p(G) = G^{\mathfrak{H}}$ ,  $p \in \sigma_i \in \sigma$ . Тогда  $G$  в том и только том случае является  $\bar{\tau}$ -минимальной не  $\mathfrak{H}$ -группой, когда  $K$  –  $\bar{\tau}$ -минимальная не  $H(\sigma_i)$ -группа.

**Доказательство. Необходимость.** Пусть  $G$  –  $\bar{\tau}$ -минимальная не  $\mathfrak{H}$ -группа и  $M \in \bar{\tau}(K) \setminus \{K\}$ . Если при изоморфизме  $G/P \simeq K$  подгруппе  $M$  в группе  $G/P$  соответствует подгруппа  $D/P$ , то  $D \in \bar{\tau}(G) \setminus \{G\}$ . Следовательно,  $D \in \mathfrak{H}$ . Поэтому  $D/O_{\sigma_i', \sigma_i}(D) \in H(\sigma_i)$ . Тогда поскольку  $D = D \cap G = D \cap PK = P \rtimes (D \cap K)$ , то  $O_{\sigma_i', \sigma_i}(D) = O_{\sigma_i}(D)$ . Кроме того, имеет место  $O_{\sigma_i}(D)/P = O_{\sigma_i}(D/P)$ . Значит, поскольку  $D/O_{\sigma_i', \sigma_i}(D) \in H(\sigma_i)$ , то  $M/O_{\sigma_i}(M) \in H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} H(\sigma_i)$ . Поэтому  $M \in H(\sigma_i) = \mathfrak{G}_{\sigma_i} H(\sigma_i)$ . Таким образом, каждая собственная  $\bar{\tau}$ -подгруппа группы  $K$  принадлежит  $H(\sigma_i)$ . Если при этом группа  $K \in H(\sigma_i)$ , то  $G \in \mathfrak{H}$  ввиду [13, лемма 2.4]. Получаем противоречие. Следовательно,  $K$  –  $\bar{\tau}$ -минимальная не  $H(\sigma_i)$ -группа.

**Достаточность.** Пусть  $K$  –  $\bar{\tau}$ -минимальная не  $H(\sigma_i)$ -группа и  $M \in \bar{\tau}(G) \setminus \{G\}$ . Докажем, что  $M \in \mathfrak{H}$ . Если  $G = PM$ , то поскольку  $P = C_G(P)$  – монолит группы  $G$ , имеет место равенство  $M \cap P = 1$ . Значит,  $M \simeq M/P \cap M \simeq MP/P = G/P \in \mathfrak{H}$ .

Допустим теперь, что  $PM \not\simeq G$ . Тогда  $PM/P \in \bar{\tau}(G/P) \setminus \{G/P\}$ . Но  $G/P \simeq K$ . Поэтому в  $K$  найдется такая собственная  $\bar{\tau}$ -подгруппа  $D$ , что  $MP/P \simeq D \in H(\sigma_i)$ . Следовательно,  $M/M \cap P \simeq MP/P \in H(\sigma_i)$ . Значит,  $M \in \mathfrak{G}_{\sigma_i} H(\sigma_i) = H(\sigma_i)$ . Поэтому каждая собственная  $\bar{\tau}$ -подгруппа из  $G$  принадлежит  $\mathfrak{H}$ . Так как по условию  $P = G^{\mathfrak{H}}$ , то  $G$  –  $\bar{\tau}$ -минимальная не  $\mathfrak{H}$ -группа. Лемма доказана.

**Основной результат.** В данном разделе мы даем описание  $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -критических формаций, где  $\tau$  – некоторый подгрупповой функтор,  $\mathfrak{H}$  – произвольная  $\sigma$ -локальная формация классического типа.

**Теорема.** Пусть  $\mathfrak{H}$  –  $\sigma$ -локальная формация классического типа и  $H$  – ее каноническое  $\sigma$ -локальное определение. Тогда  $\mathfrak{F}$  в том и только том случае является  $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -критической формацией, когда  $\mathfrak{F} = I_\sigma^\tau \text{form} G$ , где  $G$  – такая монолитическая  $\bar{\tau}$ -минимальная не  $\mathfrak{H}$ -группа с монолитом  $P = G^{\mathfrak{H}}$ , что выполняется одно из следующих условий:

- 1)  $G = P$  – такая простая  $\sigma_i$ -группа, что  $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$  и  $\tau(G) = \{1, G\}$ ;
- 2)  $P$  – не  $\sigma$ -примарная группа и  $G$  –  $\bar{\tau}$ -минимальная не  $H(\sigma_i)$ -группа с  $P = G^{H(\sigma_i)}$  для всех  $\sigma_i \in \sigma(P)$ ;
- 3)  $G = P \rtimes K$ , где  $P = C_G(P)$  –  $p$ -группа,  $p \in \sigma_i$ , а  $K$  – либо монолитическая  $\bar{\tau}$ -минимальная не  $H(\sigma_i)$ -группа с монолитом  $Q = K^{H(\sigma_i)} \not\subseteq \Phi(K)$ , где  $\sigma_i \notin \sigma(Q)$ , либо минимальная не  $H(\sigma_i)$ -группа одного из следующих типов: а) группа кватернионов порядка 8, если  $2 \notin \sigma_i$ ; б) экстраспециальная группа порядка  $q^3$  простой нечетной экспоненты  $q \notin \sigma_i$ ; в) циклическая  $q$ -группа,  $q \notin \sigma_i$ .

**Доказательство.** Приведем общую схему доказательства теоремы.

**Необходимость.** В силу [12, лемма 2.1] имеем  $\mathfrak{H} = (\cap_{\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})} \mathfrak{G}_{\sigma_i'} \mathfrak{G}_{\sigma_i} h(\sigma_i)) \cap \mathfrak{G}_{\sigma(\mathfrak{H})}$ . Согласно условию теоремы  $\mathfrak{H}$  имеет такое  $\sigma$ -локальное определение  $h$ , все неабелевы значения которого  $\sigma$ -локальны. Без потери общности можно считать, что  $h$  – внутреннее  $\sigma$ -локальное опре-

деление  $\mathfrak{H}$ . Поскольку каждая собственная  $l_\sigma^\tau$ -формация из  $\mathfrak{F}$  входит в  $\mathfrak{H}$ , но при этом  $\mathfrak{F} \not\subseteq \mathfrak{H}$ , то либо  $\mathfrak{F}$  – минимальная  $\tau$ -замкнутая  $\sigma$ -локальная не  $\mathfrak{G}_{\sigma(\mathfrak{H})}$ -формация, либо найдется такое  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$ , что  $\mathfrak{F}$  – минимальная  $\tau$ -замкнутая  $\sigma$ -локальная не  $(\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i} h(\sigma_i))$ -формация.

Если  $\mathfrak{F}$  является минимальной  $\tau$ -замкнутой  $\sigma$ -локальной не  $\mathfrak{G}_{\sigma(\mathfrak{H})}$ -формацией, то в силу [9, теорема 4.1] имеем  $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\sigma_i} = l_\sigma^\tau \text{form} G$ , где  $G$  – такая простая  $\sigma_i$ -группа, что  $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$  и  $\tau(G) = \{1, G\}$ . Значит, формация  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет условию 1) теоремы.

Пусть теперь  $\sigma_i \in \sigma(\mathfrak{H})$  такое, что  $\mathfrak{F}$  – минимальная  $\tau$ -замкнутая  $\sigma$ -локальная не  $(\mathfrak{G}_{\sigma_i} \mathfrak{G}_{\sigma_i} h(\sigma_i))$ -формация. Если формация  $h(\sigma_i)$  –  $\sigma$ -локальна, то применяя [12, лемма 2.1(5)], леммы 4, 5 и [13, следствие 3.1] имеем  $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \text{form} G$ , где  $G$  – такая монолитическая  $\bar{\tau}$ -минимальная не  $\mathfrak{H}$ -группа с монолитом  $P = G^{\mathfrak{H}}$ , что  $\sigma_i \in \sigma(P)$ , и либо  $P$  – не  $\sigma$ -примарная группа и  $G$  –  $\bar{\tau}$ -минимальная не  $H(\sigma_i)$ -группа с  $P = G^{H(\sigma_i)}$  для всех  $\sigma_i \in \sigma(P)$ , либо  $G = P \rtimes K$ , где  $P = C_G(P)$  –  $p$ -группа,  $p \in \sigma_i$ , а  $K$  – либо монолитическая  $\bar{\tau}$ -минимальная не  $H(\sigma_i)$ -группа с монолитом  $Q = K^{H(\sigma_i)} \not\subseteq \Phi(K)$  и  $\sigma_i \notin \sigma(Q)$ . Значит,  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет условию 2) или 3) теоремы.

Если  $h(\sigma_i)$  – абелева формация, то используя леммы 4 и 1, а также [13, теорема 1.1] и [5, лемма 2.1.5] получаем, что  $\mathfrak{F} = l_\sigma^\tau \text{form} G$ , где  $G$  – такая монолитическая  $\bar{\tau}$ -минимальная не  $\mathfrak{H}$ -группа с монолитом  $P = G^{\mathfrak{H}}$ , что  $\sigma_i \in \sigma(P)$ , и либо  $P = G^{H(\sigma_i)}$  – не  $\sigma$ -примарная группа и  $G$  –  $\bar{\tau}$ -минимальная не  $H(\sigma_i)$ -группа, либо  $G = P \rtimes K$ , где  $P = C_G(P)$  –  $p$ -группа,  $p \in \sigma_i$ , а  $K$  удовлетворяет одному из следующих условий: 1)  $K$  – монолитическая  $\bar{\tau}$ -минимальная не  $H(\sigma_i)$ -группа с таким монолитом  $Q = H^{H(\sigma_i)} \not\subseteq \Phi(H)$ , что  $\sigma_i \notin \sigma(Q)$ ; 2)  $H$  – минимальная не  $H(\sigma_i)$ -группа одного из следующих типов: а) группа кватернионов порядка 8, если  $2 \notin \sigma_i$ ; б) экстраспециальная группа порядка  $q^3$  простой нечетной экспоненты  $q \notin \sigma_i$ ; в) циклическая  $q$ -группа,  $q \notin \sigma_i$ . Следовательно, формация  $\mathfrak{F}$  удовлетворяет условию 2) или 3) теоремы.

**Д о с т а т о ч н о с т ь.** Ввиду [6, теорема 3.1] достаточно доказать, что  $f(\sigma_j)$  является минимальной  $\tau$ -замкнутой не  $H(\sigma_j)$ -формацией для всякого  $\sigma_j \in \sigma(P)$ , где  $f$  – наименьшее  $\tau$ -значное  $\sigma$ -локальное определение  $\mathfrak{F}$ . Применяя [6, лемма 3.2; 5, лемма 2.2.4; 4, лемма 8.12] мы доказываем, что  $f(\sigma_j)$  является минимальной  $\tau$ -замкнутой не  $H(\sigma_j)$ -формацией для всякого  $\sigma_j \in \sigma(P)$ , а значит, по [6, теорема 3.1] формация  $\mathfrak{F}$  является минимальной  $\tau$ -замкнутой  $\sigma$ -локальной не  $\mathfrak{H}$ -формацией. Теорема доказана.

В случае когда  $\tau$  – тривиальный подгрупповой функтор из теоремы 3.8 получаем

**С л е д с т в и е 1** [7, теорема А]. Пусть  $\mathfrak{H}$  –  $\sigma$ -локальная формация классического типа и  $H$  – ее каноническое  $\sigma$ -локальное определение. Тогда  $\mathfrak{F}$  в том и только том случае является минимальной  $\sigma$ -локальной не  $\mathfrak{H}$ -формацией, когда  $\mathfrak{F} = l_\sigma \text{form} G$ , где  $G$  – такая монолитическая группа с монолитом  $P = G^{\mathfrak{H}}$ , что выполняется одно из следующих условий: 1)  $G = P$  – простая  $\sigma_i$ -группа,  $\sigma_i \notin \sigma(\mathfrak{H})$ ; 2)  $P$  – не  $\sigma$ -примарная группа и  $P = G^{H(\sigma_i)}$  для всех  $\sigma_i \in \sigma(P)$ ; 3)  $G = P \rtimes K$ , где  $P = C_G(P)$  –  $p$ -группа,  $p \in \sigma_i$ , а  $K$  – либо монолитическая группа с монолитом  $Q = K^{H(\sigma_i)} \not\subseteq \Phi(K)$ , где  $\sigma_i \notin \sigma(Q)$ , либо минимальная не  $H(\sigma_i)$ -группа одного из следующих типов: а) группа кватернионов порядка 8, если  $2 \notin \sigma_i$ ; б) экстраспециальная группа порядка  $q^3$  простой нечетной экспоненты  $q \notin \sigma_i$ ; в) циклическая  $q$ -группа,  $q \notin \sigma_i$ .

В классическом случае, когда  $\sigma = \sigma^1 = \{\{2\}, \{3\}, \{5\}, \dots\}$  из теоремы получаем

**С л е д с т в и е 2** [5, теорема 2.2.10]. Пусть  $\mathfrak{H}$  – формация классического типа и  $h$  – ее канонический экран. Тогда  $\mathfrak{F}$  в том и только том случае является минимальной  $\tau$ -замкнутой не  $\mathfrak{H}$ -формацией, когда  $\mathfrak{F} = \tau^l \text{form} G$ , где  $G$  – такая монолитическая  $\bar{\tau}$ -минимальная не  $\mathfrak{H}$ -группа с монолитом  $P = G^{\mathfrak{H}}$ , что выполняется одно из следующих условий: 1)  $G = P$  – группа простого порядка  $p \notin \pi(\mathfrak{H})$ ; 2)  $P$  – неабелева группа и  $G$  –  $\bar{\tau}$ -минимальная не  $h(p)$ -группа с  $P = G^{h(p)}$  для всех  $p \in \pi(P)$ ; 3)  $G = P \rtimes K$ , где  $P = C_G(P)$  –  $p$ -группа, а  $K$  – либо монолитическая  $\bar{\tau}$ -минимальная не  $h(p)$ -группа с монолитом  $Q = K^{h(p)} \not\subseteq \Phi(K)$ , где  $p$  не делит  $|Q|$ , либо минимальная не  $h(p)$ -группа одного из следующих типов: а) группа кватернионов порядка 8; б) экстраспециальная группа порядка  $q^3$  простой нечетной экспоненты  $q$ ; в) примарная циклическая группа.

Если при этом  $\tau$  – тривиальный подгрупповой функтор из теоремы получаем

**С л е д с т в и е 3** [3, теорема]. Пусть  $\mathfrak{H}$  – некоторая формация классического типа и  $h$  – ее максимальный внутренний экран. Формация  $\mathfrak{F}$  в том и только том случае является  $\mathfrak{H}$ -критической, когда  $\mathfrak{F} = \text{lform} G$ , где  $G$  – такая монолитическая группа с монолитом  $P = G^{\mathfrak{H}}$ , что выполняется одно из следующих условий: 1)  $P = G$  – группа простого порядка; 2)  $P$  – неабелева группа и  $P = G^{h(p)}$  для всех  $p \in \pi(P)$ ; 3)  $G = P \rtimes H$ , где  $P = C_G(P)$  –  $p$ -группа, а  $H$  – такая монолитическая группа с монолитом  $Q = H^{h(p)}$  ( $p$  не делит  $|Q|$ ), что либо  $\Phi(H) = 1$  и  $H^{h(q)} \subseteq Q$  для всех  $q \in \pi(Q)$ , либо  $H$  – минимальная не  $h(p)$ -группа одного из следующих типов: а) циклическая примарная группа; б) группа кватернионов порядка 8; в) неабелева группа порядка  $q^3$  простой нечетной экспоненты  $q$ .

**Благодарности.** Исследования поддержаны Министерством образования Республики Беларусь (проект № 20211328).

**Acknowledgements.** Research was supported by the Ministry of Education of the Republic of Belarus (project no. 20211328).

### Список использованных источников

1. Шеметков, Л. А. Экраны ступенчатых формаций / Л. А. Шеметков // Труды VI Всесоюзного симпозиума по теории групп. – Киев, 1980. – С. 37–50.
2. Скиба, А. Н. О критических формациях / А. Н. Скиба // Известия АН БССР. Серия физико-математических наук. – 1980. – № 4. – С. 27–33.
3. Скиба, А. Н. О критических формациях / А. Н. Скиба // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев, 1993. – С. 258–268.
4. Шеметков, Л. А. Формации алгебраических систем / Л. А. Шеметков, А. Н. Скиба. – М., 1989. – 257 с.
5. Скиба, А. Н. Алгебра формаций / А. Н. Скиба. – Мн., 1997. – 239 с.
6. Сафонова, И. Н. О минимальных  $\sigma$ -локальных не  $\mathfrak{H}$ -формациях конечных групп / И. Н. Сафонова // Проблемы физики, математики и техники. – 2020. – № 4 (45). – С. 105–112.
7. Сафонова, И. Н. О критических  $\sigma$ -локальных формациях конечных групп / И. Н. Сафонова // Труды Института математики. – 2023. – Т. 31, № 2. – С. 63–80.
8. Сафонова, И. Н. К теории  $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -критических формаций конечных групп / И. Н. Сафонова, В. В. Скрундь // Международная конференция «Алгебра и динамические системы», посвященная 90-летию со дня рождения В. А. Белогова, Нальчик, 3–7 июня 2025 г. – Нальчик, 2025. – С. 137–140.
9. Сафонова, И. Н. О  $\mathfrak{H}_\sigma^\tau$ -критических формациях конечных групп / И. Н. Сафонова, В. В. Скрундь // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 3 (64). – С. 99–111.
10. Skiba, A. N. On  $\sigma$ -subnormal and  $\sigma$ -permutable subgroups of finite groups / A. N. Skiba // Journal of Algebra. – 2015. – Vol. 436. – P. 1–16. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.04.010>
11. Скиба, А. Н. Об одном обобщении локальных формаций / А. Н. Скиба // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 1 (34). – С. 79–82.
12. Chi, Z. On  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups / Z. Chi, V. G. Safonov, A. N. Skiba // Communications in Algebra. – 2019. – Vol. 47, N 3. – P. 957–968. <https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1498875>
13. Safonova, I. N. Some properties of  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups / I. N. Safonova // Asian-European Journal of Mathematics. – 2022. – Vol. 15, N 7. – Art. 2250138 (12 p.). <https://doi.org/10.1142/s1793557122501388>
14. Safonova, I. N. On the  $\tau$ -closedness of  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formation / I. N. Safonova // Advances in Group Theory and Applications. – 2024. – Vol. 18. – P. 123–136.
15. Сафонова, И. Н. О  $n$ -кратной  $\sigma$ -локальности непустой  $\tau$ -замкнутой формации конечных групп / И. Н. Сафонова // Труды Института математики НАН Беларуси. – 2024. – Т. 32, № 1. – С. 31–37.

### References

1. Shemetkov L. A. Screens of step formations. *Trudy VI Vsesoyuznogo simpoziuma po teorii grupp* [Proceedings of the VI All-Union Symposium on Group Theory]. Kyiv, 1980, pp. 37–50 (in Russian).
2. Skiba A. N. On critical formations. *Izvestiya AN BSSR*, 1980, no. 4, pp. 27–33 (in Russian).
3. Skiba A. N. On critical formations. *Beskonechnye gruppy i primykayushchie algebraicheskie struktury* [Infinite Groups and Adjoining Algebraic Structures]. Kyiv, 1993, pp. 258–268 (in Russian).
4. Shemetkov L. A., Skiba A. N. *Formations of Algebraic Systems*. Moscow, 1989. 257 p. (in Russian).
5. Skiba A. N. *Algebra of Formations*. Minsk, 1997. 239 p. (in Russian).
6. Safonova I. N. On minimal  $\sigma$ -local non- $\mathfrak{H}$ -formations of finite groups. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technology*, 2020, no. 4 (45), pp. 105–112 (in Russian).
7. Safonova I. N. On critical  $\sigma$ -local formations of finite groups. *Trudy Instituta Matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2023, vol. 31, no. 2, pp. 63–80 (in Russian).

8. Safonova I. N., Skrund V. V. On the theory of  $\mathfrak{H}_\sigma^5$ -critical formations of finite groups. *Mezhdunarodnaya konferentsiya "Algebra i dinamicheskie sistemy"*, posvyashchennaya 90-letiyu so dnya rozhdeniya V. A. Belonogova, Nal'chik, 3–7 iyunya 2025 g. [International Conference "Algebra and Dynamical Systems" dedicated to the 90th anniversary of V. A. Belonogov, Nalchik, 3–7 June 2025]. Nalchik, 2025, pp. 137–140 (in Russian).
9. Safonova I. N., Skrundz V. V. On  $\mathfrak{H}_\sigma^5$ -critical formations of finite groups. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technology*, 2025, no. 3 (64), pp. 99–111 (in Russian).
10. Skiba A. N. On  $\sigma$ -subnormal and  $\sigma$ -permutable subgroups of finite groups. *Journal of Algebra*, 2015, vol. 436, pp. 1–16. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.04.010>
11. Skiba A. N. On one generalization of the local formations. *Problemy fiziki, matematiki i tekhniki = Problems of Physics, Mathematics and Technology*, 2018, no. 1 (34), pp. 79–82 (in Russian).
12. Chi Z., Safonov V. G., Skiba A. N. On  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups. *Communications in Algebra*, 2019, vol. 47, no. 3, pp. 957–968. <https://doi.org/10.1080/00927872.2018.1498875>
13. Safonova I. N. Some properties of  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formations of finite groups. *Asian-European Journal of Mathematics*, 2022, vol. 15, no. 7, art. 2250138 (12 p). <https://doi.org/10.1142/s1793557122501388>
14. Safonova I. N. On the  $\tau$ -closedness of  $n$ -multiply  $\sigma$ -local formation. *Advances in Group Theory and Applications*, 2024, vol. 18, pp. 123–136.
15. Safonova I. N. On  $n$ -multiple  $\sigma$ -locality of a non-empty  $\tau$ -closed formation of finite groups. *Trudy Instituta Matematiki NAN Belarusi = Proceedings of the Institute of Mathematics of the NAS of Belarus*, 2024, vol. 32, no. 1, pp. 32–38 (in Russian).

### Информация об авторах

Сафонова Инна Николаевна – канд. физ.-мат. наук, доцент. Белорусский государственный университет (пр-т Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: in.safonova@mail.ru. ORCID: 0000-0001-6896-7208.

Скрундз Валентина Викторовна – аспирант. Белорусский государственный университет (пр-т Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь). E-mail: vallik@mail.ru.

### Information about the authors

Safonova Inna N. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: in.safonova@mail.ru. ORCID: 0000-0001-6896-7208.

Skrundz Valentina V. – Postgraduate Student. Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: vallik@mail.ru.