ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 519.63
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2025-69-6-447-453

Поступило в редакцию 30.05.2025
Received 30.05.2025

Член-корреспондент П. П. Матус[1], Б. Д. Утебаев[2]

[1]Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
[2]Каракалпакский государственный университет имени Бердаха, Нукус, Республика Узбекистан

КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ОДНОМЕРНЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Предлагаются и исследуются компактные разностные схемы порядка аппроксимации 4 + 1 и 4 + 2 на минимальных шаблонах для одномерного нестационарного квазилинейного уравнения теплопроводности, не требующие итерационного процесса для их реализации. Вычислительный эффект достигается в результате распараллеливания метода прогонки по четным и нечетным узлам. Получены условия монотонности и доказаны двусторонние оценки разностного решения и априорные оценки в равномерной норме. Приводятся также вычислительные эксперименты, иллюстрирующие эффективность предложенных методов, а также их сходимость с соответствующим порядком.

Ключевые слова: компактная разностная схема, уравнение теплопроводности, погрешность аппроксимации, двусторонние оценки, равномерная норма

Для цитирования. Матус, П. П. Компактные разностные схемы для одномерных квазилинейных параболических уравнений / П. П. Матус, Б. Д. Утебаев // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2025. – Т. 69, № 6. – С. 447–453. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2025-69-6-447-453

Corresponding Member Piotr P. Matus[1], Bakhadir D. Utebaev[2]

[1]Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
[2]Karakalpak State University named after Berdakh, Nukus, Republic of Uzbekistan

COMPACT DIFFERENCE SCHEMES FOR ONE-DIMENSIONAL QUASILINEAR PARABOLIC EQUATIONS

Abstract. Compact finite difference schemes of approximation orders 4 + 1 and 4 + 2, constructed on minimal stencils, are presented and investigated for the one-dimensional non-stationary quasilinear heat equation, and do not require an iterative process for their implementation. The computational efficiency is achieved by parallelizing the Thomas algorithm over even and odd grid nodes. The monotonicity conditions are obtained and two-sided estimates of the difference solution and a priori estimates in the uniform norm are proved. Computational experiments are also presented to illustrate the effectiveness of the proposed methods, as well as their convergence with the corresponding order.

Keywords: compact difference scheme, heat equation, approximation error, two-sided estimates, uniform norm

For citation. Matus P. P., Utebaev B. D. Compact difference schemes for one-dimensional quasilinear parabolic equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2025, vol. 69, no. 6, pp. 447–453. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2025-69-6-447-453

Введение. Одной из актуальных задач современной вычислительной математики является разработка алгоритмов высокой точности, позволяющих проводить на современных ПЭВМ математическое моделирование трехмерных задач с достаточно большим числом расчетных точек [1]. Среди многочисленных методов по данному направлению следует выделить так называемые компактные разностные схемы, которые позволяют существенно повысить точность алгоритмов без увеличения стандартного шаблона схемы, аппроксимирующего конкретное уравнение математической физики. Среди наиболее важных исследований в данном направлении мы бы выделили работу российского академика А. А. Самарского [2] и монографию [3], а также работы авторов данной статьи [4–6].

До недавнего времени считалось невозможным обобщение компактных схем высокого порядка на произвольные квазилинейные уравнения из-за необходимости определения шаблонных функционалов в нерасчетных точках [7]. Что касается построения компактных схем для квазилинейных уравнений параболического типа, то при их построении теряется свойство консервативности, которое просто необходимо при моделировании прикладных задач с обобщенными решениями [8].

В настоящей работе предлагаются и исследуются компактные разностные схемы порядка аппроксимации 4 + 1 и 4 + 2 на минимальных шаблонах для одномерного нестационарного квазилинейного уравнения теплопроводности, не требующие итерационного процесса для их реализации. Вычислительный эффект достигается в результате распараллеливания метода прогонки по четным и нечетным узлам. Получены условия монотонности и доказаны двусторонние оценки разностного решения и априорные оценки в равномерной норме. Приводятся также вычислительные эксперименты, иллюстрирующие эффективность предложенных методов, а также их сходимость с соответствующим порядком.

Постановка задачи и разностная схема. В прямоугольнике $\bar{Q}_T = \bar{\Omega}\times[0, T]$, $\bar{\Omega} = \Omega\cup\Gamma$, $\bar{\Omega} = \{x : 0 \le x \le l\}$ рассмотрим начально-краевую задачу для квазилинейного параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t),\ \ Lu = \frac{\partial}{\partial x}\left(k(x, t, u)\frac{\partial u}{\partial x}\right),\ \ 0 < x < l,\ \ 0 < t \le T, \tag{1}$$

$$u(x, 0) = u_0(x),\ \ u(0, t) = \mu_1(t),\ \ u(l, t) = \mu_2(t), \tag{2}$$

$0 < k_1 \le k(x, t, u) \le k_2$ для всех $x \in [0, l]$, $u \in \mathbb{R}$.

Как обычно, предполагаем, что классическое решение $u(x, t)$ дифференциальной задачи (1), (2) существует, единственно и имеет все необходимые по ходу изложения производные в области $\bar{Q}_T$.

Введем равномерные сетки узлов с постоянными шагами h, τ соответственно по пространству и времени

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h\times\bar{\omega}_\tau,\ \bar{\omega}_h = \{x_i = ih,\ i = \overline{0, N},\ hN = l\},\ \bar{\omega}_h = \omega_h\cup\gamma_h,$$
$$\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau,\ n = \overline{0, N_0},\ \ \tau N_0 = T\},\ \ \bar{\omega}_\tau = \omega_\tau\cup\{t_0 = 0\},\ \ \omega_{h\tau} = \omega_h\times\omega_\tau.$$

Множество граничных узлов обозначим $\gamma_h = \{x_i = ih,\ i = 0, N\}$.

В работе используются обозначения из [9].

На равномерной сетке узлов, используя центральную разностную производную, дифференциальную задачу (1), (2) аппроксимируем компактной разностной схемой порядка 4 + 1

$$y_{t,n} = \left(a^n y^{n+1}_{\overset{\circ}{x}}\right)_{\overset{\circ}{x},i} - \frac{h^2}{3}\left(a^n (p^n y_{t,n})_{\overset{\circ}{x}}\right)_{\overset{\circ}{x},i} + \varphi_i^{n+1},\ \ i = \overline{2, N-2}, \tag{3}$$

$$y_i^0 = u_0(x_i),\ \ i = \overline{0, N},\ \ y_0^{n+1} = \mu_1(t_{n+1}),\ y_N^{n+1} = \mu_2(t_{n+1}),\ \ n = \overline{0, N_0 - 1}, \tag{4}$$

$$a^n = 6(p_{i-1}^n + 4p_i^n + p_{i+1}^n)^{-1},\ \ p_i^n = 1/k_i^n,\ \ k_i^n = (x_i, t_n, y_i^n),$$

$$\varphi_i^{n+1} = f_i^{n+1} + \frac{h^2}{3}\left(a^n (p^n f^{n+1})_{\overset{\circ}{x}}\right)_{\overset{\circ}{x},i},$$

$$v = v^n = v(x_i, t_n),\ \hat{v} = v^{n+1},\ v_t = \frac{\hat{v} - v}{\tau},\ v_{\overset{\circ}{x}} = \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h}.$$

Использование центральной разностной производной связано с тем, что шаблонный функционал a_i, предложенный в [2], содержит нерасчетную полуцелую точку $x_{i-0,5} = x_i - 0,5h$, которая не применима для аппроксимации квазилинейных уравнений с коэффициентом $k(x, t, u)$.

Идея реализации предложенной схемы описана в [7] и основана на расщеплении алгоритма по четным и нечетным узлам с последующим применением формул скалярной прогонки [10]. В случае четных узлов $i = 2, 4, \ldots, N-2$, N-четное, разностная схема (3), (4) приводится к каноническому виду трехточечных разностных уравнений на одном временном слое [10]

$$A_i^n y_{i-2}^{n+1} - C_i^n y_i^{n+1} + B_i^n y_{i+2}^{n+1} = -F_i^n, \ \ i = 2, 4, ..., N-2, \tag{5}$$

$$y_0^{n+1} = \mu_1(t^{n+1}), \ y_N^{n+1} = \mu_2(t^{n+1}) \tag{6}$$

с коэффициентами

$$A_i^n = \frac{\tau}{4h^2} a_{i-1}^n \left(1 - \frac{h^2}{3\tau} p_{i-2}^n\right), \ \ B_i^n = \frac{\tau}{4h^2} a_{i+1}^n \left(1 - \frac{h^2}{3\tau} p_{i+2}^n\right), \ \ C_i^n = 1 + \frac{\tau}{4h^2}(a_{i+1}^n + a_{i-1}^n)\left(1 - \frac{h^2}{3\tau} p_i^n\right),$$

$$F_i^n = \left(1 - \frac{p_i^n}{12}(a_{i+1}^n + a_{i-1}^n)\right) y_i^n + \frac{1}{12}(a_{i+1}^n p_{i+2}^n y_{i+2}^n + a_{i-1}^n p_{i-2}^n y_{i-2}^n) + \tau\varphi_i^{n+1}.$$

Отметим, что значения функции y_i^{n+1} для всех четных узлов находятся независимо от значения той же функции в нечетных узлах.

Для нечетных i мы получаем аналогичную систему уравнений

$$A_i^n y_{i-2}^{n+1} - C_i^n y_i^{n+1} + B_i^n y_{i+2}^{n+1} = -F_i^n, \ \ i = 3, 5, ..., N-3, \tag{7}$$

граничные условия которой y_1^{n+1} и y_{N-1}^{n+1} находятся при помощи интерполяционного многочлена Ньютона [11]

$$y_1^{n+1} = y_0^{n+1} + \frac{\Delta y_0^{n+1}}{1!} q + \frac{\Delta^2 y_0^{n+1}}{2!} q(q-1) + \frac{\Delta^3 y_0^{n+1}}{3!} q(q-1)(q-2), \tag{8}$$

$$y_{N-1}^{n+1} = y_N^{n+1} + \frac{\Delta y_{N-2}^{n+1}}{1!} \tilde{q} + \frac{\Delta^2 y_{N-4}^{n+1}}{2!} \tilde{q}(\tilde{q}+1) + \frac{\Delta^3 y_{N-6}^{n+1}}{3!} \tilde{q}(\tilde{q}+1)(\tilde{q}+2), \tag{9}$$

где $q = \frac{1}{2}$, $\tilde{q} = -\frac{1}{2}$, $\Delta y_i^{n+1} = y_{i+2}^{n+1} - y_i^{n+1}$.

Погрешность аппроксимации. Невязка ψ (погрешность аппроксимации на точном решении дифференциальной задачи) разностного уравнения (3) имеет вид

$$\psi = \left(a^n u^{n+1}_{\overset{\circ}{x}}\right)_{\overset{\circ}{x},i} - \frac{h^2}{3}\left(a^n (p^n u_{t,n})_{\overset{\circ}{x}}\right)_{\overset{\circ}{x},i} - u_{t,n} + \varphi_i^{n+1}, \ \ i = \overline{2, N-2}.$$

Используя формулу Тейлора, нетрудно получить представления

$$\left(a u_{\overset{\circ}{x}}\right)_{i+1} = \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial x} + hLu + \frac{2h^2}{3}\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{p}Lu) + \frac{h^3}{3}L(pLu) + O(h^4),$$

$$\left(a u_{\overset{\circ}{x}}\right)_{i-1} = \frac{1}{p}\frac{\partial u}{\partial x} - hLu + \frac{2h^2}{3}\frac{1}{\sqrt{p}}\frac{\partial}{\partial x}(\sqrt{p}Lu) - \frac{h^3}{3}L(pLu) + O(h^4),$$

из которых следует соотношение

$$\left(a u_{\overset{\circ}{x}}\right)_{\overset{\circ}{x}} = Lu + \frac{h^2}{3}L(pLu) + O(h^4).$$

Учитывая, что

$$L(pLu) = L\left(p\frac{\partial u}{\partial t} - pf\right), \ \hat{u} = u + \tau\dot{u} + O(\tau), \ u_t = \dot{u} + O(\tau), \ \dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t},$$

получим

$$\psi = (Lu - \dot{u} + \varphi_i^{n+1}) + \frac{h^2}{3} L\left(p\frac{\partial u}{\partial t} - pf\right) - \frac{h^2}{3}\left(a(pu_{t,n})_{\overset{\circ}{x}}\right)_{\overset{\circ}{x}} + O(h^4 + \tau) =$$

$$= \varphi_i^{n+1} - \left(f + \frac{h^2}{3} L(pf)\right) + O(h^4 + \tau) = O(h^4 + \tau).$$

Найдем теперь погрешность аппроксимации в приграничных узлах. Остаточные слагаемые многочленов (8), (9) имеют вид соответственно

$$R_1(q) = h^4 \frac{q(q-1)(q-2)(q-3)}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi, t), \quad \xi \in [x_0, x_6],$$

$$R_{N-1}(\tilde{q}) = h^4 \frac{\tilde{q}(\tilde{q}+1)(\tilde{q}+2)(\tilde{q}+3)}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi, t), \quad \xi \in [x_{N-6}, x_N],$$

из которых видно, что они имеют четвертый порядок по пространству, т. е.

$$\max_{x \in [x_0, x_6]} \left| R_1(q) \right| \le M_1 h^4, \quad \max_{x \in [x_{N-6}, x_N]} \left| R_{N-1}(\tilde{q}) \right| \le M_2 h^4, \quad M_1, M_2 = \text{const} > 0.$$

Таким образом схема (3), (4) аппроксимирует задачу (1), (2) с порядком 4 + 1 на решении $u(x, t)$ и для сеточной функции ψ имеет место оценка

$$\|\psi\|_C \le M(h^4 + \tau), \quad M = \text{const},$$

где как обычно $\|\cdot\|_C = \max\limits_{x \in \omega_h} |\cdot|, \ \|\cdot\|_{\bar{C}} = \max\limits_{x \in \bar{\omega}_h} |\cdot|.$

Двусторонние и априорные оценки. В соответствии с [10] разностная схема (3), (4) будет монотонной, если выполнены условия принципа максимума

$$A_i^n > 0, \ B_i^n > 0, \ D_i^n = C_i^n - A_i^n - B_i^n > 0,$$

т. е. при

$$\tau > \frac{h^2}{3k_1}. \tag{10}$$

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Л е м м а. *Пусть выполнено условие положительности коэффициентов (10). Тогда для решения задачи (5), (6) в четных узлах* $i = 2, 4, \ldots, N-2$, *имеет место двусторонняя оценка*

$$\min\left\{\min_{x \in \gamma_h} \mu(x, t_{n+1}), \min_{i=2,4,\ldots,N-2} (y_i^n + \tau f_i^{n+1})\right\} \le y_i^{n+1} \le \max\left\{\max_{x \in \gamma_h} \mu(x, t_{n+1}), \max_{i=2,4,\ldots,N-2} (y_i^n + \tau f_i^{n+1})\right\}.$$

Доказательство леммы проводится аналогично утверждениям [12; 13].

Используя индукцию по n получаем двустороннюю оценку вида

$$m_1^{n+1} \le y_i^{n+1} \le m_2^{n+1}, \ i = 0, 2, \ldots, N-2, N,$$

где

$$m_1^{n+1} = \min\left\{\min_{n=0,1,\ldots,N_0-1} \{\mu_1(t_{n+1}), \mu_2(t_{n+1})\}, \min_{i=0,2,\ldots,N} u_0(x_i)\right\} + t_{n+1} \min\left\{0, \min_{n=0,1,\ldots,N_0-1} \min_{i=0,2,\ldots,N} f(x_i, t_{n+1})\right\},$$

$$m_2^{n+1} = \max\left\{\max_{n=0,1,\ldots,N_0-1} \{\mu_1(t_{n+1}), \mu_2(t_{n+1})\}, \max_{i=0,2,\ldots,N} u_0(x_i)\right\} + t_{n+1} \max\left\{0, \max_{n=0,1,\ldots,N_0-1} \max_{i=0,2,\ldots,N} f(x_i, t_{n+1})\right\}.$$

Рассмотрим теперь задачу (7)–(9) для нечетных i.

В силу леммы при выполнении условия (10) получим двустороннюю оценку

$$\min\left\{\min\{y_1^{n+1}, y_{N-1}^{n+1}\}, \min_{i=3,5,\ldots,N-3} (y_i^n + \tau f_i^{n+1})\right\} \le y_i^{n+1} \le$$

$$\le \max\left\{\max\{y_1^{n+1}, y_{N-1}^{n+1}\}, \max_{i=3,5,\ldots,N-3} (y_i^n + \tau f_i^{n+1})\right\}. \tag{11}$$

Так как

$$c\min_{i=0,2,4,6} y_i^{n+1} \le y_1^{n+1} \le c\max_{i=0,2,4,6} y_i^{n+1},$$

$$c\min_{i=N-6,N-4,N-2,N} y_i^{n+1} \le y_{N-1}^{n+1} \le c\max_{i=N-6,N-4,N-2,N} y_i^{n+1},\ \ c=\frac{13}{8},$$

и используя индукцию по n, из (11) получим двустороннюю оценку без предположения на знакоопределенность входных данных для нечетных узлов

$$m_3^{n+1} \le y_i^{n+1} \le m_4^{n+1},\ i=1,3,\dots,N-3,N-1,$$

где

$$m_3^{n+1} = \min\left\{c\min_{n=0,1,\dots,N_0-1}\left\{\min_{i=0,2,4,6} y_i^{n+1},\ \min_{i=N-6,N-4,N-2,N} y_i^{n+1}\right\},\ \min_{i=1,3,\dots,N-1} u_0(x_i)\right\}+$$
$$+\,t_{n+1}\min\left\{0,\ \min_{n=0,1,\dots,N_0-1}\min_{i=1,3,\dots,N-1} f(x_i,t_{n+1})\right\},$$

$$m_4^{n+1} = \max\left\{c\max_{n=0,1,\dots,N_0-1}\left\{\max_{i=0,2,4,6} y_i^{n+1},\ \max_{i=N-6,N-4,N-2,N} y_i^{n+1}\right\},\ \max_{i=1,3,\dots,N-1} u_0(x_i)\right\}+$$
$$+\,t_{n+1}\max\left\{0,\ \max_{n=0,1,\dots,N_0-1}\max_{i=1,3,\dots,N-1} f(x_i,t_{n+1})\right\}.$$

С л е д с т в и е. *Пусть выполнены условия леммы. Тогда для решения разностной схемы (3), (4) имеет место оценка в сеточном аналоге нормы C*

$$\|y(t_n)\|_{\bar{C}} \le c\max\left\{\max_{t\in[0,t_n]}\left\{|\mu_1(t)|,|\mu_2(t)|\right\},\ \|u_0\|_C\right\}+(1+c)t_n\max_{t\in[0,t_n]}\|f(t)\|_C.$$

З а м е ч а н и е. *Аналогично строится компактная схема* 4 + 2

$$y_{t,n} = \frac{1}{2}\left(a^{n+1}y^{n+1}_{\overset{\circ}{x}}\right)_{\overset{\circ}{x},i} + \frac{1}{2}\left(a^{n}y^{n}_{\overset{\circ}{x}}\right)_{\overset{\circ}{x},i} - \frac{h^2}{3}\left(a^{n+\frac{1}{2}}\left(p^{n+\frac{1}{2}}y_{t,n}\right)_{\overset{\circ}{x}}\right)_{\overset{\circ}{x},i} + \varphi_i^{+\frac{1}{2}},\ \ i=\overline{2,N-2},$$

где шаблонный функционал φ *определяется следующим образом:*

$$\varphi_i^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\left(f_i^{n+1} + \frac{h^2}{3}\left(a^{n+1}\left(p^{n+1}f^{n+1}\right)_{\overset{\circ}{x}}\right)_{\overset{\circ}{x},i}\right) + \frac{1}{2}\left(f_i^{n} + \frac{h^2}{3}\left(a^{n}\left(p^{n}f^{n}\right)_{\overset{\circ}{x}}\right)_{\overset{\circ}{x},i}\right).$$

Численные расчеты. В данном разделе приводятся результаты вычислительного эксперимента, полученные при помощи разностной схемы (3), (4), аппроксимирующей краевую задачу (1), (2). Входные данные при $k(u)=u^2$ определяются из точного решения $u(x,t)=e^{x+t}(x+1)^2$ при $l=1$.

Порядок сходимости по временной и пространственной переменным в нормах C и L_2 определяем по правилу Рунге [14]

$$p^h = \log_2\frac{\|z(h,\tau)\|}{\|z(h/2,\tau/2^4)\|},\ \ p^\tau = \log_2\frac{\|z(h,\tau)\|}{\|z(h,\tau/2)\|}.$$

В табл. 1, 2 отражены скорости сходимости приближенного решения к точному.

Т а б л и ц а 1. **Скорость сходимости по пространственному направлению**

T a b l e 1. **Convergence rate in the spatial direction**

$h = 0{,}1$	$\tau = 0{,}1$	$\|z\|_C$	p_C	$\|z\|_{L_2}$	p_{L_2}
h	τ	0,0760	–	0,0564	–
$h/2$	$\tau/2^4$	0,0049	3,9551	0,0036	3,9696
$h/4$	$\tau/4^4$	$3{,}07\cdot10^{-4}$	3,9964	$2{,}27\cdot10^{-4}$	3,9872
$h/8$	$\tau/8^4$	$1{,}92\cdot10^{-5}$	3,9990	$1{,}41\cdot10^{-5}$	4,0089

Т а б л и ц а 2. **Скорость сходимости по временному направлению**

T a b l e 2. **Convergence rate in the time direction**

$h = 1 / 1000$	$\tau = 1 / 100$	$\|z\|_C$	p_C	$\|z\|_{L_2}$	p_{L2}
h	τ	0,0078	–	0,0057	–
h	$\tau / 2$	0,0039	1,0001	0,0029	0,9749
h	$\tau / 4$	0,0019	1,0374	0,0014	1,0506
h	$\tau / 8$	0,00098	0,9551	0,00072	0,9593

Благодарности. Работа первого автора поддержана Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (проект Ф25УЗБ-008), работа второго автора поддержана Министерством высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан (проект FL-8824063232).

Acknowledgements. The work of the first author was supported by the Belarusian Republican Foundation for Fundamental Research (project no. F25UZB-008), and the work of the second author was supported by the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan (project no. FL-8824063232).

Список использованных источников

1. Lemeshevsky, S. Exact Finite-Difference Schemes / S. Lemeshevsky, P. Matus, D. Poliakov. – Berlin, 2016. https://doi.org/10.1515/9783110491326

2. Самарский, А. А. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности / А. А. Самарский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1963. – Т. 3, № 5. – С. 812–840.

3. Толстых, А. И. Компактные разностные схемы и их применение в задачах аэрогидродинамики / А. И. Толстых. – М., 1990. – 230 с.

4. Матус, П. П. Компактные и монотонные разностные схемы для параболических уравнений / П. П. Матус, Б. Д. Утебаев // Математическое моделирование. – 2021. – Т. 33, № 4. – С. 60–78. https://doi.org/10.20948/mm-2021-04-04

5. Матус, П. П. Компактные и монотонные разностные схемы для обобщенного уравнения Фишера / П. П. Матус, Б. Д. Утебаев // Дифференциальные уравнения. – 2022. – Т. 58, № 7. – С. 947–961.

6. Матус, П. П. Монотонные схемы условной аппроксимации и произвольного порядка точности для уравнения переноса / П. П. Матус, Б. Д. Утебаев // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2022. – Т. 62, № 3. – С. 367–380.

7. Матус, П. П. Консервативные компактные и монотонные разностные схемы четвертого порядка для квазилинейных уравнений / П. П. Матус, Г. Ф. Громыко, Б. Д. Утебаев // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2024. – Т. 68, № 1. – С. 7–14. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-1-7-14

8. Mohanty, R. K. High-precision numerical method for 1D quasilinear hyperbolic equations on a time-graded mesh: application to Telegraph model equation / R. K. Mohanty, B. P. Ghosh, G. Khurana // Soft Computing. – 2023. – Vol. 27. – P. 6095–6107. https://doi.org/10.1007/s00500-023-07909-3

9. Samarskii, A. A. Difference Schemes with Operator Factors / A. A. Samarskii, P. P. Matus, P. N. Vabishchevich. – London, 2002. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9874-3

10. Самарский, А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М., 1983. – 616 с.

11. Киреев, В. И. Численные методы в примерах и задачах / В. И. Киреев, А. В. Пантелеев. – М., 2008. – 480 с.

12. Matus, P. On the consistent two-side estimates for the solutions of quasilinear convection-diffusion equations and their approximations on non-uniform grids / P. Matus, D. Poliakov, L. M. Hieu // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2018. – Vol. 340, N 1. – P. 571–581. https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.09.020

13. Консервативные компактные и монотонные разностные схемы четвертого порядка для одномерных и двумерных квазилинейных уравнений / П. П. Матус, Г. Ф. Громыко, В. Д. Утебаев, В. Т. К. Туен // Дифференциальные уравнения. – 2025. – Т. 61, № 8. – С. 1117–1134. https://doi.org/10.7868/S3034503025080097

14. Tingchun, Wang. Convergence of an eight-order compact difference scheme for the nonlinear Schrödinger equation / Wang Tingchun // Advances in Numerical Analysis. – 2012. – Vol. 2012. – Art. 913429. https://doi.org/10.1155/2012/913429

References

1. Lemeshevsky S., Matus P., Poliakov D. *Exact Finite-Difference Schemes*. Berlin, 2016. https://doi.org/10.1515/9783110491326

2. Samarskii A. A. Schemes of high-order accuracy for the multi-dimensional heat conduction equation. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1963, vol. 3, no. 5, pp. 1107–1146. https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90104-6

3. Tolstykh A. I. *Compact Finite Difference Schemes and Application in Aerodynamic Problems*. Moscow, 1990. 230 p. (in Russian).

4. Matus P. P., Utebaev B. D. Compact and monotone difference schemes for parabolic equations. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2021, vol. 13, pp. 1038–1048. https://doi.org/10.1134/s2070048221060132

5. Matus P. P., Utebaev B. D. Compact and monotone difference schemes for the generalized Fisher equation. *Differential Equations*, 2022, vol. 58, no. 7, pp. 937–951. https://doi.org/10.1134/s0012266122070072

6. Matus P. P., Utebaev B. D. Monotone schemes of conditional approximation and arbitrary order of accuracy for the transport equation. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2022, vol. 62, no. 3, pp. 359–371. https://doi.org/10.1134/S0965542522030101

7. Matus P. P., Gromyko G. Ph., Utebaev B. D. Conservative compact and monotone fourth order difference schemes for quasilinear equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2024, vol. 68, no. 1, pp. 7–14 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-1-7-14

8. Mohanty R. K., Ghosh B. P., Khurana G. High-precision numerical method for 1D quasilinear hyperbolic equations on a time-graded mesh: application to Telegraph model equation. *Soft Computing*, 2023, vol. 27, pp. 6095–6107. https://doi.org/10.1007/s00500-023-07909-3

9. Samarskii A. A., Matus P. P., Vabishchevich P. N. *Difference Schemes with Operator Factors*. London, 2002. https://doi.org/10.1007/978-94-015-9874-3

10. Samarskii A. A. *Theory of Difference Schemes*. Moscow, 1983. 616 p. (in Russian).

11. Kireev V. I., Panteleev A. V. *Numerical Methods in Examples and Problems*. Moscow, 2008. 480 p. (in Russian).

12. Matus P., Poliakov D., Hieu L. M. On the consistent two-side estimates for the solutions of quasilinear convection-diffusion equations and their approximations on non-uniform grids. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2018, vol. 340, no. 1, pp. 571–581. https://doi.org/10.1016/j.cam.2017.09.020

13. Matus P. P., Gromyko G. Ph., Utebaev B. D., Tuyen V. T. K. Conservative compact and monotone fourth order difference schemes for one-dimensional and two-dimensional quasilinear equations. *Differential Equations*, 2025, vol. 61, no. 8, pp. 1117–1134 (in Russian). https://doi.org/10.7868/S3034503025080097

14. Tingchun Wang. Convergence of an eight-order compact difference scheme for the nonlinear Schrödinger equation. *Advances in Numerical Analysis*, 2012, vol. 2012, art. 913429. https://doi.org/10.1155/2012/913429

Информация об авторах

Матус Петр Павлович – член-корреспондент, д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. Институт математики НАН Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь). E-mail: piotr.p.matus@gmail.com.

Утебаев Бахадыр Даулетбай улы – канд. физ.-мат. наук, доцент. Каракалпакский государственный университет (ул. Ч. Абдирова, 1, 230112, Нукус, Республика Узбекистан). E-mail: bakhadir1992@gmail.com.

Information about the authors

Matus Piotr P. – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher. Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: piotr.p.matus@gmail.com.

Utebaev Bakhadir D. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor. Karakalpak State University (1, Ch. Abdirov Str., 230112, Nukus, Republic of Uzbekistan). E-mail: bakhadir1992@gmail.com.