

ISSN 1561-8323 (Print)  
ISSN 2524-2431 (Online)

**МАТЕМАТИКА**  
**MATHEMATICS**

УДК 519.63  
<https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-1-7-13>

Поступило в редакцию 09.12.2025  
Received 09.12.2025

**Член-корреспондент П. П. Матус<sup>1</sup>, В. Т. К. Туен<sup>1</sup>, Б. В. Фалейчик<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Институт математики Национальной академии наук Беларуси,  
ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь*  
<sup>2</sup>*Белорусский государственный университет,  
пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь*

**КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ  
НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ РУНГЕ–КУТТЫ**

**Аннотация.** Впервые строятся устойчивые экономичные компактные разностные схемы порядка точности  $2 + 4$  и  $4 + 4$  для простейшего параболического уравнения на основе использования идеи метода прямых и методов Рунге–Кутты для решения систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. При построении вычислительного алгоритма используется только трехточечный шаблон при аппроксимации уравнения по пространственной переменной, что позволяет использовать известный метод прогонки для обращения обратной матрицы за  $O(N)$  арифметических операций, где  $N$  – число точек сетки по пространству. Построение компактных схем аналогичного порядка на основе обычного интегро-интерполяционного метода приводит лишь к абсолютно неустойчивым алгоритмам. Показаны результаты вычислительного эксперимента, иллюстрирующие эффективность предложенного алгоритма.

**Ключевые слова:** компактная разностная схема, параболическое уравнение, устойчивость, методы Рунге–Кутты, вычислительный эксперимент

**Для цитирования.** Матус, П. П. Компактные разностные схемы для параболических уравнений на основе методов Рунге–Кутты / П. П. Матус, В. Т. К. Туен, Б. В. Фалейчик // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2026. – Т. 70, № 1. – С. 7–13. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-1-7-13>

**Corresponding Member Piotr P. Matus<sup>1</sup>, V. T. K. Tuyen<sup>1</sup>, Boris V. Faleichik<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus,  
11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus*  
<sup>2</sup>*Belarusian State University,  
4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus*

**COMPACT DIFFERENCE SCHEMES FOR PARABOLIC EQUATIONS  
ON THE BASE OF RUNGE–KUTTA METHODS**

**Abstract.** In this work, for the first time, stable and economical compact finite-difference schemes of order of accuracy  $2 + 4$  and  $4 + 4$  are constructed for the simplest parabolic equation, based on the idea of the method of lines and Runge–Kutta methods for solving systems of nonlinear ordinary differential equations. In constructing the computational algorithm, only a three-point stencil is used for approximating the equation by the spatial variable, which allows us to use the well-known tridiagonal matrix algorithm for inverting the matrix in  $O(N)$  arithmetic operations, where  $N$  is the number of grid points in space. When constructing compact schemes of the same order based on the conventional integro-interpolation method leads only to absolutely unstable algorithms. Results of computational experiments are presented, illustrating the efficiency of the proposed algorithm.

**Keywords:** compact difference scheme, parabolic equation, stability, Runge–Kutta methods, computational experiment

**For citation.** Matus P. P., Tuyen V. T. K., Faleichik B. V. Compact difference schemes for parabolic equations on the base of Runge–Kutta methods. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2026, vol. 70, no. 1, pp. 7–13 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-1-7-13>

**Введение.** В настоящее время для повышения точности вычислительного процесса на стандартных шаблонах, аппроксимирующих нестационарные уравнения математической физики,

широко используются так называемые компактные разностные схемы [1] порядка точности  $4 + 2$  (4-й по пространству и 2-й по времени). основополагающей работой в этом направлении является классическая статья А. Самарского [2]. В дальнейшем эти идеи были развиты на разностные схемы для квазилинейных параболических уравнений [3].

Недостатком указанных компактных схем порядка  $4 + 2$  является неэквивалентность использования сеточных шагов по пространству и времени  $h$  и  $\tau$  соответственно, что приводит, вообще говоря, к необходимости использования соотношения Куранта  $\tau \sim h^2$ . Последнее соотношение делает бессмысленным применение неявных безусловно устойчивых алгоритмов.

Первые компактные схемы естественного порядка точности  $4 + 4$  были предложены в классе трехслойных схем при использовании регуляризатора Б. Н. Четверушкина  $R = \tau(\partial^2 u / \partial t^2)$  в [4].

В настоящей работе строятся принципиально новые двухслойные компактные разностные схемы порядка  $2 + 4$  и  $4 + 4$  на примере задачи Дирихле для простейшего параболического уравнения на основе использования идеи метода прямых и методов Рунге–Кутты для решения систем нелинейных дифференциальных уравнений. Доказывается устойчивость предложенных методов и приводятся результаты вычислительного эксперимента, иллюстрирующего наши теоретические выводы.

Построению схем высокого порядка точности на основе применения идей метода Рунге–Кутты посвящены работы [5; 6].

**Методы Рунге–Кутты.** Рассмотрим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) [7; 8]

$$u' = f(t, u), \quad u(0) = u_0, \quad t \in (0, T], \quad (1)$$

где  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$  – вектор переменных;  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$  – векторная функция;  $t$  – независимая переменная.

В дальнейшем будем предполагать, что задача (1) однозначно разрешима, т. е. функция  $f(t, u)$  непрерывна и удовлетворяла условию Липшица по второму аргументу [7].

Методы Рунге–Кутты (РК) представляют собой семейство численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем. Основная идея метода Рунге–Кутты была предложена К. Рунге (Runge, 1895) и развита затем В. Куттой (Kutta, 1901) и др. Семейство методов Рунге–Кутты включает явный и неявный методы. Неявные методы Рунге–Кутты обладают высокой устойчивостью, особенно при решении жестких задач. В этой работе мы рассматриваем неявные методы 4-го порядка.

На отрезке  $[0, T]$  введем сетку  $\bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots, N_0, \tau N_0 = T\} = \omega_\tau \cup \{t_{N_0} = T\}$ . Значение  $y_n = y(t_n)$  представляет собой приближение точного решения  $u(t)$  задачи (1) при  $t = t_n$ . Пусть значение  $y_n$  известно, неявные  $s$ -стадийные методы Рунге–Кутты описываются формулами [9]

$$y_{n+1} = y_n + \tau \sum_{i=1}^s b_i k_i, \quad (2)$$

$$k_i = f \left( t_n + \tau c_i, y_n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \right), \quad i = \overline{1, s},$$

где  $\tau$  – шаг интегрирования;  $s$  – число стадий метода. Значения коэффициентов  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  в конкретном методе Рунге–Кутты определяются таблицей Бутчера:

$$\begin{array}{c|ccc} c_1 & a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ c_s & a_{s1} & \dots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & \dots & b_s \end{array} \equiv \begin{array}{c|c} c & A \\ \hline & b^T \end{array}$$

**Устойчивость методов Рунге–Кутты.** Свойства устойчивости устанавливаются на решении линейных однородных систем с постоянными коэффициентами, простейшей из которых является скалярная задача Далквиста [6; 10, с. 155; 11, с. 104]

$$\frac{du}{dt} = \lambda u, \quad 0 \leq t \leq T, \quad u(0) = u_0$$

с решением  $u(t) = u_0 e^{\lambda t}$ , где  $\lambda$  – константа. Для произвольной линейной схемы переход на следующий временной слой при решении задачи Далквиста можно представить в виде

$$\hat{u} = R(\tau\lambda)u,$$

где  $R(z)$  называется функцией устойчивости [11] (в теории разностных схем ей соответствует оператор или коэффициент перехода)

$$R(z) = 1 + zb^T(I - zA)^{-1}e,$$

где  $e = (1, 1, \dots, 1)^T$ . В дальнейшем нам понадобятся следующие определения из теории устойчивости методов решения задачи Коши.

**О п р е д е л е н и е 1.** Метод (2) называется *A-устойчивым*, если  $|R(z)| \leq 1$  при  $Re z \leq 0$ .

**Неявные методы Рунге–Кутты четвертого порядка.** В дальнейшем мы будем использовать два известных неявных метода РК: двухстадийный гауссов метод и трехстадийный метод Лобатто ППС [11, IV.5]. Оба метода имеют порядок 4 и являются *A-устойчивыми*. Коэффициенты этих методов представлены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1. Двухстадийный гауссов метод (метод 1) и метод Лобатто ППС (метод 2) порядка 4

Table 1. Two-stage Gauss method (method 1) and Lobatto PPS method (method 2) of order 4

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{12}$	$-\frac{1}{12}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
				$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
Метод 1			Метод 2			

**Постановка задачи.** В прямоугольнике  $\bar{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$  рассмотрим начально-краевую задачу для простейшего параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in (0, l), \quad t \in (0, T], \tag{3}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [0, l], \tag{4}$$

с граничными условиями Дирихле

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t). \tag{5}$$

Относительно решения задачи (3)–(5) предполагаем, что оно существует, единственно и обладает всеми непрерывными в  $\bar{Q}_T$  производными, необходимыми по ходу изложения.

**Разностная схема порядка 2 + 4.** На отрезке  $[0, l]$  вводится обычная равномерная сетка

$$\bar{\omega}_h = \{x = x_i, i = 0, 1, \dots, N; hN = l\} = \omega_h \cup \{x_0 = 0, x_N = l\}.$$

Сохраняя производную по времени, проведем пространственную дискретизацию задачи (3)–(5) на трехточечном шаблоне  $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$ :

$$u'(x_i) = \Lambda u(x_i) = f(t, u(x_i)), \quad i = \overline{1, N-1}, \quad \Lambda u(x_i) = \frac{1}{h^2}(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}),$$

$$u(x_i, 0) = u_0(x_i), \quad i = \overline{1, N-1} \quad u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t),$$

или можно записать в векторном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Du + \varphi(t), \quad (6)$$

где векторы  $u = (u_1, u_2, \dots, u_{N-1})^T$ ;  $\varphi(t) = (1/h^2)(\mu_1(t), 0, \dots, 0, \mu_2(t))^T$ ;  $D$  – трехдиагональная матрица размерности  $(N-1) \times (N-1)$ , состоящая из следующих компонент:

$$D = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вводим вектор  $y = (y_1, y_2, \dots, y_{N-1})^T$  – приближенное решение задачи (3)–(5). Теперь построим схему порядка  $2 + 4$  для этой задачи двумя методами Рунге–Кутты из табл. 1.

Первый метод дает вычислительную схему

$$\hat{y} = y + \frac{\tau}{2}(k_1 + k_2), \quad (7a)$$

где векторы коэффициентов  $k_\alpha = (k_{\alpha,1}, k_{\alpha,2}, \dots, k_{\alpha,N-1})^T$ ,  $\alpha = 1, 2$ , определяются следующими формулами и найдутся методом матричной прогонки:

$$\begin{aligned} k_1 &= Dy + \tau \left( \frac{1}{4} Dk_1 + \left( \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) Dk_2 \right) + \varphi \left( t + \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \tau \right), \\ k_2 &= Dy + \tau \left( \left( \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) Dk_1 + \frac{1}{4} Dk_2 \right) + \varphi \left( t + \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \tau \right). \end{aligned} \quad (7b)$$

Реализация второго метода (Лобатто ППС) имеет вид

$$\hat{y} = y + \frac{\tau}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3),$$

где  $k_\alpha = (k_{\alpha,1}, k_{\alpha,2}, \dots, k_{\alpha,N-1})^T$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , имеют вид

$$\begin{aligned} k_1 &= Dy + \frac{\tau}{6}(Dk_1 - 2Dk_2 + Dk_3) + \varphi(t), \\ k_2 &= Dy + \frac{\tau}{12}(2Dk_1 + 5Dk_2 - Dk_3) + \varphi(t + \tau/2), \\ k_3 &= Dy + \frac{\tau}{6}(Dk_1 + 4Dk_2 + Dk_3) + \varphi(t + \tau). \end{aligned} \quad (8)$$

Коэффициенты  $k_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , найдем с помощью метода матричной прогонки.

**Разностная схема порядка  $4 + 4$ .** Рассмотрим следующую задачу:

$$G \frac{\partial u}{\partial t} = f(t, u). \quad (9)$$

Здесь  $G$  – постоянная матрица, которая является невырожденной. Уравнение (9) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(t, u) \equiv G^{-1} f(t, u). \quad (10)$$

Запишем для (10) схему (2) с подстановкой  $F(t, u)$  в правые части

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_n + \tau \sum_{i=1}^s b_i k_i, \\ k_i &= F \left( t_n + \tau c_i, y_n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \right) \equiv G^{-1} f \left( t_n + \tau c_i, y_n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \right), \quad i = \overline{1, s}. \end{aligned} \quad (11)$$

Умножая обе части формулы (11) на  $G$ , получим окончательный вид

$$Gk_i = f \left( t_n + \tau c_i, y_n + \tau \sum_{j=1}^s a_{ij} k_j \right), \quad i = \overline{1, s}.$$

Построим разностные схемы порядка  $4 + 4$  для задачи (3)–(5). Проведем пространственную дискретизацию уравнения (3) на трехточечном шаблоне  $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$  методом прямых:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = u_{\bar{x},i} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial u_{\bar{x},i}}{\partial t}, \quad i = \overline{1, N-1},$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{12} u_{i-1} + \frac{5}{6} u_i + \frac{1}{12} u_{i+1} \right) = \frac{1}{h^2} (u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}).$$

По аналогии с предыдущим разделом для вектор-функции  $u$  получим систему ОДУ

$$G \frac{\partial u}{\partial t} = Du + \varphi(t), \tag{12}$$

где вектор  $\varphi(t) = \left( \frac{1}{h^2} \mu_1(t) - \frac{1}{12} \frac{d\mu_1(t)}{dt}, 0, \dots, 0, \frac{1}{h^2} \mu_2(t) - \frac{1}{12} \frac{d\mu_2(t)}{dt} \right)^T$ ; трехдиагональная матрица  $G$  имеет следующий вид:

$$G = [g_{lk}]_{(N-1) \times (N-1)} : \quad g_{nm} = \frac{5}{6}, \quad n = \overline{1, N-1};$$

$$g_{m+1} = \frac{1}{12}, \quad n = \overline{1, N-2}; \quad g_{m-1} = \frac{1}{12}, \quad n = \overline{2, N-1}. \tag{13}$$

Схема порядка  $4 + 4$ , которая строится первым методом из табл. 1, задается в виде

$$\hat{y} = y + \frac{\tau}{2} (k_1 + k_2), \tag{14a}$$

где векторы коэффициентов  $k_\alpha = (k_{\alpha,1}, k_{\alpha,2}, \dots, k_{\alpha,N-1})^T$ ,  $\alpha = 1, 2$ , определяются следующими формулами:

$$Gk_1 = Dy + \tau \left( \frac{1}{4} Dk_1 + \left( \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) Dk_2 \right) + \varphi \left( t + \left( \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \tau \right),$$

$$Gk_2 = Dy + \tau \left( \left( \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) Dk_1 + \frac{1}{4} Dk_2 \right) + \varphi \left( t + \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \tau \right). \tag{14b}$$

Схема на основе метода Лобатто ППС имеет вид

$$\hat{y} = y + \frac{\tau}{6} (k_1 + 4k_2 + k_3), \tag{15a}$$

где коэффициенты  $k_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ , вычисляются по формуле

$$Gk_1 = Dy + \frac{\tau}{6} (Dk_1 - 2Dk_2 + Dk_3) + \varphi(t),$$

$$Gk_2 = Dy + \frac{\tau}{12} (2Dk_1 + 5Dk_2 - Dk_3) + \varphi(t + \tau/2),$$

$$Gk_3 = Dy + \frac{\tau}{6} (Dk_1 + 4Dk_2 + Dk_3) + \varphi(t + \tau). \tag{15b}$$

**Устойчивость.** Рассмотрим вопрос об устойчивости схем (7), (8), (14), (15) по начальным данным, т. е. при  $\mu_1(t) = \mu_2(t) = 0$ , что влечет  $\varphi(t) = 0$  в (6), (12). Доказательство основано на следствии 11.3 из [11, IV.11], которое мы перепишем в виде

**У т в е р ж д е н и е.** Рассмотрим задачу Коши для системы линейных ОДУ:  $u'(t) = Bu(t)$ ,  $u(0) = u_0$ , с отрицательно определенной матрицей  $B$ . Пусть  $u(t_0 + \tau k) \approx y_k$  – приближенное решение, полученное на  $k$ -м шаге  $A$ -устойчивого метода Рунге–Кутты. Тогда для всех  $k > 0$  и  $\tau > 0$  справедлива оценка  $\|y_k\|_2 \leq \|u_0\|_2$ .

Для схем (7), (8) порядка  $2 + 4$  симметричная матрица  $B = D$  в (6), как известно, является отрицательно определенной [12]. Для схем (14), (15) порядка  $4 + 4$  имеем  $B = G^{-1}D$ , где трехдиагональная симметричная матрица  $G$  имеет вид (13). По теореме Гершгорина эта матрица является положительно определенной, поэтому нетрудно показать, что  $G^{-1}D$  отрицательно определена. Следовательно, согласно утверждению, рассматриваемые разностные схемы безусловно устойчивы по начальным данным.

**Вычислительные эксперименты.** Приведем результаты вычислительного эксперимента. Входные данные определяются из точного решения

$$u(x, t) = e^{-x}, \quad x \in (0, 1), \quad t \in (0, 1].$$

Здесь и далее порядок сходимости по временной и пространственной переменным в нормах  $\bar{C}_{ht}$  определяем по правилу Рунге [13]:

$$p_{\bar{C}_{ht}}^h = \log_2 \frac{\|z(h, \tau)\|_{\bar{C}_{ht}}}{\|z(h/2, \tau)\|_{\bar{C}_{ht}}}, \quad p_{\bar{C}_{ht}}^\tau = \log_2 \frac{\|z(h, \tau)\|_{\bar{C}_{ht}}}{\|z(h/2, \tau/2)\|_{\bar{C}_{ht}}}.$$

В табл. 2, 3 отражены скорости сходимости приближенного решения к точному.

Т а б л и ц а 2. Скорость сходимости по пространственному направлению, схема  $4 + 4$

T a b l e 2. Convergence rate in the space direction,  $4 + 4$  scheme

$N \times N_0$	$h = 0,2$	$\tau = 0,001$	Первый метод First method		Второй метод Second method	
			$\ z^h\ _C$	$P^h$	$\ z^h\ _C$	$P^h$
$5 \times 1000$	$h$	$\tau$	$1,26242 \cdot 10^{-6}$	–	$1,26242 \cdot 10^{-6}$	–
$10 \times 1000$	$h/2$	$\tau$	$7,93318 \cdot 10^{-8}$	3,999215	$7,93319 \cdot 10^{-8}$	3,999215
$20 \times 1000$	$h/4$	$\tau$	$4,99935 \cdot 10^{-9}$	3,98809	$4,99936 \cdot 10^{-9}$	3,98809
$40 \times 1000$	$h/8$	$\tau$	$3,12477 \cdot 10^{-10}$	3,99992	$3,12492 \cdot 10^{-10}$	3,99985

Т а б л и ц а 3. Скорость сходимости по временному направлению, схема  $4 + 4$

T a b l e 3. Convergence rate in the time direction,  $4 + 4$  scheme

$N \times N_0$	$h = 0,2$	$\tau = 0,00667$	Первый метод First method		Второй метод Second method	
			$\ z^\tau\ _C$	$P^\tau$	$\ z^\tau\ _C$	$P^\tau$
$5 \times 150$	$h$	$\tau$	$1,26238 \cdot 10^{-6}$	–	$1,26246 \cdot 10^{-6}$	–
$10 \times 300$	$h/2$	$\tau/2$	$7,93312 \cdot 10^{-8}$	3,99211	$7,93329 \cdot 10^{-8}$	3,99217
$20 \times 600$	$h/4$	$\tau/4$	$4,99931 \cdot 10^{-9}$	3,98809	$4,99942 \cdot 10^{-9}$	3,98809
$40 \times 1200$	$h/8$	$\tau/8$	$3,1248 \cdot 10^{-10}$	3,99989	$3,12487 \cdot 10^{-10}$	3,99989

### Список использованных источников

1. Консервативные компактные и монотонные разностные схемы четвертого порядка для одномерных и двумерных квазилинейных уравнений / П. П. Матус, Г. Ф. Громыко, В. Д. Утебаев, В. Т. К. Туен // Дифференциальные уравнения. – 2025. – Т. 61, № 8. – С. 1117–1134. <https://doi.org/10.7868/s3034503025080097>
2. Самарский, А. А. Схемы повышенного порядка точности для многомерного уравнения теплопроводности / А. А. Самарский // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1963. – Т. 3, № 5. – С. 812–840.
3. Матус, П. П. Консервативные компактные и монотонные разностные схемы четвертого порядка для квазилинейных уравнений / П. П. Матус, Г. Ф. Громыко, В. Д. Утебаев // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2024. – Т. 68, № 1. – С. 7–14. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-1-7-14>

4. Матус, П. П. Трехслойные компактные разностные схемы для гиперболического уравнения теплопроводности / П. П. Матус, В. Т. К. Туен, Б. Д. Утебаев // Математическое моделирование. – 2025. – Т. 37, № 4. – С. 51–67.
5. Ширококов, Н. В. Диагонально-явные схемы Рунге–Кутты / Н. В. Ширококов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2002. – Т. 42, № 7. – С. 1013–1018.
6. Рогов, Б. В. О сходимости компактных разностных схем / Б. В. Рогов, М. Н. Михайловская // Математическое моделирование. – 2008. – Т. 20, № 1. – С. 99–117.
7. Хартман, Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Ф. Хартман. – М., 1970. – 720 с.
8. Скворцов, Л. М. О неявных методах Рунге–Кутты, полученных в результате обращения явных методов / Л. М. Скворцов // Математическое моделирование. – 2017. – Т. 29, № 1. – С. 3–19.
9. Исполов, Ю. Г. Построение методов и организация алгоритмов численного интегрирования нестационарной задачи теплопроводности / Ю. Г. Исполов, Е. А. Постоялкина, Н. Н. Шабров // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2002. – № 2. – С. 1–25.
10. Hundsdorfer, W. Numerical Solution of Time-Dependent Advection–Diffusion–Reaction Equations / W. Hundsdorfer, J. Verwer. – Berlin, Heidelberg: Springer, 2003. – 472 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-09017-6>
11. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи / Э. Хайрер, Г. Ваннер. – М., 1999. – 685 с.
12. Самарский, А. А. Устойчивость разностных схем / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М., 1973. – 416 с.
13. Wang, T. Convergence of an eight-order compact difference scheme for the nonlinear Schrödinger equation / T. Wang // Advances in Numerical Analysis. – 2012. – Vol. 2012. – Art. 913429. <https://doi.org/10.1155/2012/913429>

## References

1. Matus P. P., Gromyko G. Ph., Utebaev B. D., Tuyen V. T. K. Conservative compact and monotone fourth-order difference schemes for one-dimensional and two-dimensional quasilinear equations. *Differential Equations*, 2025, vol. 61, no. 8, pp. 1117–1134 (in Russian). <https://doi.org/10.7868/s3034503025080097>
2. Samarskii A. A. Schemes of high-order accuracy for the multi-dimensional heat conduction equation. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1963, vol. 3, no. 5, pp. 1107–1146. [https://doi.org/10.1016/0041-5553\(63\)90104-6](https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90104-6)
3. Matus P. P., Gromyko G. Ph., Utebaev B. D. Conservative compact and monotone fourth order difference schemes for quasilinear equations. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2024, vol. 68, no. 1, pp. 7–14 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2024-68-1-7-14>
4. Matus P. P., Tuyen V. T. K., Utebaev B. D. Three-layer compact difference scheme for hyperbolic heat conduction equation. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2025, vol. 17, no. 6, pp. 675–686. <https://doi.org/10.1134/s2070048225700413>
5. Shirobokov N. V. Diagonally implicit Runge–Kutta schemes. *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2002, vol. 42, no. 7, pp. 974–979.
6. Rogov B. V., Mikhailovskaya M. N. On the convergence of compact difference schemes. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2009, vol. 1, no. 1, pp. 91–104. <https://doi.org/10.1134/S2070048209010104>
7. Hartman P. *Ordinary Differential Equations*. Wiley, 1964.
8. Skvortsov L. M. On implicit Runge–Kutta methods obtained as a result of the inversion of explicit methods. *Mathematical Models and Computer Simulations*, 2017, vol. 9, pp. 498–510. <https://doi.org/10.1134/S2070048217040123>
9. Ispolov Yu. G., Postoyalkina E. A., Shabrov N. N. Development of numerical methods and organization of numerical integration algorithms for nonstationary heat conduction problem. *Differentsial'nye uravneniya i protsessy upravleniya = Differential Equations and Control Processes*, 2002, no. 2, pp. 1–25 (in Russian).
10. Hundsdorfer W., Verwer J. *Numerical Solution of Time-Dependent Advection–Diffusion–Reaction*. Berlin, Heidelberg, Springer, 2003. 472 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-09017-6>
11. Hairer E., Wanner G. *Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer Berlin, Heidelberg, 1996. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-05221-7>
12. Samarskii A. A., Gulina A. V. *Stability of Difference Schemes*. Moscow, 1973. 416 p. (in Russian).
13. Wang T. Convergence of an eight-order compact difference scheme for the nonlinear Schrödinger equation. *Advances in Numerical Analysis*, 2012, vol. 2012, art. 913429. <https://doi.org/10.1155/2012/913429>

## Информация об авторах

Матус Петр Павлович – член-корреспондент, д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. E-mail: [piotr.p.matus@gmail.com](mailto:piotr.p.matus@gmail.com).

Туен Во Тхи Ким – канд. физ.-мат. наук, науч. сотрудник. E-mail: [vokimtuyen188@gmail.com](mailto:vokimtuyen188@gmail.com).

Фалейчик Борис Викторович – канд. физ.-мат. наук, доцент. E-mail: [faleichik@gmail.com](mailto:faleichik@gmail.com).

## Information about the authors

Matus Piotr P. – Corresponding Member, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher. E-mail: [piotr.p.matus@gmail.com](mailto:piotr.p.matus@gmail.com).

Tuyen Vo Thi Kim – Ph. D. (Physics and Mathematics), Researcher. E-mail: [vokimtuyen188@gmail.com](mailto:vokimtuyen188@gmail.com).

Faleichik Boris V. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor. E-mail: [faleichik@gmail.com](mailto:faleichik@gmail.com).