ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

УДК 517.925 Поступило в редакцию 09.02.2026
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-2-95-101 Received 09.02.2026

А. К. Деменчук

Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь

УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ АСИНХРОННЫМ СПЕКТРОМ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЛЕВЫМ ВЕРХНИМ ПОСТОЯННЫМ БЛОКОМ МАТРИЦЫ КОЭФФИЦИЕНТОВ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Аннотация. Рассматривается линейная система управления с периодической матрицей коэффициентов и программным управлением. Матрица при управлении постоянная, число столбцов не превосходит числа строк и ее ранг меньше числа столбцов. Предполагается, что управление является нетривиальным периодическим, при этом модуль его частот, т. е. наименьшая аддитивная группа вещественных чисел, включающая все показатели Фурье этого управления, содержится в частотном модуле матрицы коэффициентов. Для рассматриваемой системы ставится задача управления асинхронным спектром: построить такое управление из допустимого множества, чтобы система имела сильно нерегулярные периодические решения. В таком случае период решения несоизмерим с периодом системы. Ранее решение сформулированной задачи осуществлялось для различных случаев вырождения среднего значения матрицы коэффициентов. В настоящей работе реализуется новый подход, касающийся непосредственно самой матрицы коэффициентов. В предположении стационарности ее левого верхнего и максимального столбцового ранга осциллирующей части правого верхнего блоков для рассматриваемого класса систем получены необходимые, а также достаточные условия разрешимости задачи управления асинхронным спектром.

Ключевые слова: периодические линейные системы управления, сильно нерегулярные периодические решения, частотный спектр решения, асинхронный режим

Для цитирования. Деменчук, А. К. Условия разрешимости задачи управления асинхронным спектром линейных периодических систем с левым верхним постоянным блоком матрицы коэффициентов / А. К. Деменчук // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2026. – Т. 70, № 2. – С. 95–101. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-2-95-101

Aleksandr K. Demenchuk

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus

CONDITIONS OF SOLVABILITY OF THE ASYNCHRONOUS SPECTRUM CONTROL PROBLEM FOR LINEAR PERIODIC SYSTEMS WITH UPPER LEFT CONSTANT BLOCK OF COEFFICIENT MATRIX

(Communicated by Academician Nikolay A. Izobov)

Abstract. The focus of this study is a linear control system with a periodic matrix of coefficients and program control. The matrix under control is constant, the number of columns does not exceed the number of rows and its rank is less than the number of columns. It is assumed that the control is nontrivial periodic, and the module of its frequencies, i. e., the smallest additive group of real numbers, including all Fourier exponents of this control, is contained in the frequency module of the coefficient matrix. For the system under consideration, the problem of control of the asynchronous spectrum is posed: to construct such a control from an admissible set so that the system has strongly irregular periodic solutions. In this case, the period of the solution is incommensurate with the period of the system. Previously, the solution of the formulated problem was carried out for various cases of degeneracy of the average value of the coefficient matrix. In this work, a new approach is implemented that directly concerns the coefficient matrix itself. Under the assumption that its upper left block is stationary and the oscillating part of the upper right block has the maximum column rank, both necessary and also sufficient conditions for the solvability of the asynchronous spectrum control problem are obtained for the class of systems under consideration.

Keywords: periodic linear control systems, highly irregular periodic solutions, frequency spectrum of the solution, asynchronous mode

For citation. Demenchuk A. K. Conditions of solvability of the asynchronous spectrum control problem for linear periodic systems with upper left constant block of coefficient matrix. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2026, vol. 70, no. 2, pp. 95–101 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-2-95-101

Введение. В большинстве работ по теории колебаний изучался случай, когда частотные модули периодической (почти периодической) дифференциальной системы и ее решения совпадают (напр., [1; 2] и др.). Вопросы о других возможных соотношениях модулей частот не затрагивались. Хотя, в частности, для многих прикладных задач необходимо иметь информацию о том, в какой мере специфика частот возмущения влияет на характер частот колебаний системы [3].

По-видимому, первым, кто более детально исследовал данный вопрос, был Х. Массера. В 1950 г. он показал, что периодические дифференциальные системы могут иметь периодические решения с иррациональным отношением периодов решения и системы [4]. Этот результат послужил началом нового направления в теории дифференциальных уравнений, которое впоследствии развивалось для различных классов систем и их решений в работах Я. Курцвейля и О. Вейводы [5], Н. П. Еругина [6], И. В. Гайшуна [7], Э. И. Грудо [8], А. В. Ласунского [9], В. Т. Борухова [10] и др. Такие периодические решения ввиду их необычности, в сравнении с ранее изучавшимися, были названы сильно нерегулярными, их частотный спектр – асинхронным, а описываемые ими колебания – асинхронными.

В связи с этим рассмотрим линейную систему управления

$$\dot{x} = A(t)x + Bu, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2, \tag{1}$$

в которой $A(t)$ – непрерывная ω-периодическая $(n \times n)$-матрица; B – постоянная $(n \times r)$-матрица $r \leq n$; u – управление. В качестве управляющего воздействия $u(\cdot)$ в системе (1) присутствуют непрерывные на вещественной оси нетривиальные периодические r-вектор-функции, множество частот которых содержится в модуле частот матрицы коэффицентов. Применительно к линейной системе (1) задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L состоит в следующем: выбрать такое программное управление

$$u = u(t)$$

из указанного допустимого множества, чтобы система

$$\dot{x} = A(t)x + Bu(t) \tag{2}$$

имела сильно нерегулярное периодическое решение с заданным спектром частот L (целевым множеством). Если же требовать наличие у системы (2) сильно нерегулярного периодического решения без предварительного задания целевого множества, то такую, несколько менее жесткую задачу будем называть задачей синтеза асинхронного режима (возбуждения асинхронных колебаний).

Вопросы разрешимости сформулированных задач для системы (1) на основе вида среднего значения матрицы коэффициентов исследовались в работах [11; 12] и др. Случай максимального ранга матрицы при управлении изучен в [13].

В настоящем сообщении укажем условия разрешимости задачи управления асинхронным спектром системы (1) с целевым множеством $L = \{0, \nu_1, \ldots, \nu_k\}$ на основе строения ее самой матрицы коэффициентов.

Основной результат. Из постановки задачи вытекает, что элементы целевого множества должны быть попарно различны, соизмеримы между собой и несоизмеримы с $2\pi / \omega$. В таком случае найдется наибольшее положительное вещественное ν, которому будут кратны числа $\nu_1, \ldots, \nu_k$, т. е. $\nu_j = k_j \nu \quad (k_j \in N;\ j = \overline{1, k})$. Обозначим $\Omega = 2\pi / \nu$, при этом отношение чисел ω и Ω иррационально.

Далее, принимая во внимание результат работы [13], считаем, что ранг постоянной матрицы при управлении не является максимальным

$$\operatorname{rank} B = r_1 < r, \tag{3}$$

при этом, без потери общности рассуждений, полагаем равенство нулю первых ее $n - r_1$ строк

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ B_{r_1, r} \end{pmatrix},$$

поскольку в противном случае этого можно добиться линейным преобразованием фазовых переменных. В таком случае ранг $(r_1 \times r)$-блока $B_{r_1, r}$ равен числу r_1 его строк.

Предположим, что матрица коэффициентов системы (1) имеет следующее строение:

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12}(t) \\ A_{21}(t) & A_{22}(t) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где левый верхний блок A_{11} размерности $(n - r_1) \times (n - r_1)$ является постоянным и имеет собственные числа с нулевой действительной частью

$$0, \pm i\nu_1, \ldots, \pm i\nu_k, \quad i^2 = -1, \quad \nu_j \neq 0, \quad j = \overline{1, k}, \quad 1 \leq k \leq \left[\frac{n - r_1}{2}\right], \tag{5}$$

которые для линейной однородной стационарной системы

$$\dot{z} = A_{11} z$$

порождают семейство Ω-периодических решений

$$z(t) = \alpha + \tilde{z}(t), \quad \tilde{z}(t) = \sum_{j=1}^{k} (\beta_j \cos \nu_j t + \gamma_j \sin \nu_j t) \tag{6}$$

с постоянными векторами α, β_j, γ_j, осциллирующая часть которого удовлетворяет условию

$$A_{21}(t) \tilde{z}(t) = 0. \tag{7}$$

Размерности остальных блоков $A_{12}(t)$, $A_{21}(t)$, $A_{22}(t)$ матрицы $A(t)$ согласованы с размерностью блока A_{11}. Выпишем соответствующие представлению (4) разбиения усреднения и осциллирующей части матрицы коэффициентов

$$\frac{1}{\omega} \int_0^\omega A(t) dt = \hat{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A}(t) = A(t) - \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{A}_{12}(t) \\ \tilde{A}_{21}(t) & \tilde{A}_{22}(t) \end{pmatrix}.$$

Управление, реализующее асинхронный режим в системе (1), запишем в виде

$$u(t) = \hat{u} + \tilde{u}(t),$$

где

$$\hat{u} = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega u(t) dt, \quad \tilde{u}(t) = u(t) - \hat{u}.$$

С учетом условий (3) и (4) система (2) примет вид

$$\dot{x}' = A_{11} x' + A_{12}(t) x'', \quad \dot{x}'' = A_{21}(t) x' + A_{22}(t) x'' + B_{r_1, r} u(t), \tag{8}$$

где $x = \operatorname{col}(x', x'')$, $x' = \operatorname{col}(x_1, \ldots, x_{n-r_1})$, $x'' = \operatorname{col}(x_{n-r_1+1}, \ldots, x_n)$ – представление вектора фазовых переменных. Из [8] вытекает, что система (8) имеет сильно нерегулярное периодическое решение $x' = x'(t),\ x'' = x''(t),\ \mathrm{col}\,(x'(t), x''(t)) = x(t)$ тогда и только тогда, когда это решение удовлетворяет системе, состоящей из четырех подсистем

$$\begin{gathered} \dot{x}' = A_{11}x' + \hat{A}_{12}(t)x'', \quad \dot{x}'' = \hat{A}_{21}(t)x' + \hat{A}_{22}(t)x'' + B_{r_1,r}\hat{u}(t), \\ \tilde{A}_{12}(t)x'' = 0, \quad \tilde{A}_{21}(t)x' + \tilde{A}_{22}(t)x'' + B_{r_1,r}\tilde{u}(t) = 0. \end{gathered} \tag{9}$$

Далее рассматриваем случай, когда столбцовый ранг, т. е. наибольшее число линейно независимых столбцов (как вектор-функций) $((n - r_1) \times r_1)$-блока $A_{12}(t)$ матрицы коэффициентов является максимальным и равен числу его столбцов

$$\mathrm{rank}_{\,\mathrm{col}}\,\tilde{A}_{12} = r_1. \tag{10}$$

Тогда из [14, с. 43] следует, что сильно нерегулярное периодическое решение третьего уравнения системы (9) будет тривиальным $x'' = x''(t) \equiv 0.$ Поэтому система (9) примет вид

$$\begin{gathered} \dot{x}' = A_{11}x', \quad 0 = \hat{A}_{21}(t)x' + B_{r_1,r}\hat{u}(t), \\ x'' = 0, \quad \tilde{A}_{21}(t)x' + B_{r_1,r}\tilde{u}(t) = 0, \end{gathered}$$

откуда с учетом определения осциллирующей части матрицы получаем

$$\dot{x}' = A_{11}x', \qquad A_{21}(t)x' + B_{r_1,r}u(t) = 0, \quad x'' = 0. \tag{11}$$

В силу условия (5) на собственные значения блока A_{11} первое уравнение системы (11) имеет семейство Ω-периодических решений

$$x'(t) = \alpha + \tilde{z}(t), \tag{12}$$

где вектор-функция $\tilde{z}(t)$ определяется равенством (6). Подставив вектор (12) во второе уравнение системы (11), получим

$$\begin{gathered} A_{21}(t)x'(t) + B_{r_1,r}u(t) = A_{21}(t)(\alpha + \tilde{z}(t)) + B_{r_1,r}u(t) = \\ = A_{21}(t)\alpha + A_{21}(t)\tilde{z}(t) + B_{r_1,r}u(t) = 0. \end{gathered}$$

Отсюда, с учетом равенства (7), имеем условие на управление

$$B_{r_1,r}u(t) + A_{21}(t)\alpha = 0. \tag{13}$$

Рассмотрим вспомогательное линейное неоднородное матричное уравнение

$$B_{r_1,r}V_{r,r_1} + E_{r_1,r_1} = 0 \tag{14}$$

с коэффициентом $B_{r_1,r}$ и единичной $(r_1 \times r_1)$-матрицей E_{r_1,r_1}. В силу условия (3) ранги основной $[B_{r_1,r}]$ и расширенной $[B_{r_1,r}\ E_{r_1,r_1}]$ матриц совпадают. Поэтому уравнение (14) разрешимо относительно неизвестной постоянной матрицы V_{r,r_1}. Пусть $V_{r,r_1} = V_0$ – некоторое его частное решение.

Построим векторную ω-периодическую функцию

$$u(t) = V_0 A_{21}(t)\alpha. \tag{15}$$

Подставляя ее в левую часть равенства (13) имеем

$$B_{r_1,r}V_0A_{21}(t)\alpha + A_{21}(t)\alpha = (B_{r_1,r}V_0 + E_{r_1,r_1})A_{21}(t)\alpha.$$

Полученное выражение тождественно обращается в нуль, поскольку матрица V_0 является решением вспомогательного матричного уравнения (14).

Значит, при выборе управления $u(t)$ в форме (15) вектор (12) будет удовлетворять второму уравнению системы (11). Тогда система (11) будет иметь решение

$$x'(t) = \alpha + \tilde{z}(t), \quad x''(t) \equiv 0,$$

которое, как показано выше, будет удовлетворять и системе (9). Следовательно, вектор

$$x(t) = \mathrm{col}\,(x'(t), 0)$$

является сильно нерегулярным периодическим решением системы (2).

Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 1. *Пусть выполняются условия (3)–(6), (10). Тогда для системы (1) разрешима задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L, при этом компоненты требуемого управления имеют вид (15).*

Покажем, что для выделенного класса систем условия теоремы 1 близки к необходимым. Имеет место

Т е о р е м а 2. *Если для класса систем (1), (3), (4), (10) разрешима задача управления асинхронным спектром с целевым множеством L, то выполняются условия (5), (6).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для указанного класса систем задача управления асинхронным спектром с целевым множеством $L = \{0, \nu_1, \ldots, \nu_k\}$ имеет решение $u(t) = \hat{u} + \tilde{u}(t)$ из допустимого множества. Тогда, согласно постановке задачи, существует Ω-периодический вектор $x(t)$, удовлетворяющий тождеству

$$\dot{x}(t) - A(t)x(t) - Bu(t) \equiv 0.$$

Тогда в силу [8] выполняются также тождества

$$\dot{x}(t) - \hat{A}x(t) + B\hat{u} \equiv 0, \quad \tilde{A}(t)x(t) + B\tilde{u}(t) \equiv 0.$$

Представление вектора $x(t)$ в виде $x(t) = \mathrm{col}\,(x'(t), x''(t))$ на основании условий (3), (4) позволит записать последние тождества следующим образом:

$$\dot{x}'(t) - A_{11}x'(t) - \hat{A}_{12}(t)x''(t) \equiv 0, \quad \dot{x}''(t) - \hat{A}_{21}(t)x'(t) - \hat{A}_{22}(t)x''(t) - B_{r_1,r}\hat{u}(t) \equiv 0,$$

$$\tilde{A}_{12}(t)x'' \equiv 0, \quad \tilde{A}_{21}(t)x'(t) + \tilde{A}_{22}(t)x''(t) + B_{r_1,r}\tilde{u}(t) \equiv 0.$$

Так как в третьем из полученных тождеств периоды матрицы $\tilde{A}_{12}(t)$ и вектора $x(t)$ несоизмеримы, при этом в силу условия (10) столбцы матрицы $\tilde{A}_{12}(t)$ линейно независимы, то из [14, с. 43] вытекает, что $x''(t) \equiv 0.$ Поэтому последняя система тождеств примет вид

$$\dot{x}'(t) - \hat{A}_{11}x'(t) \equiv 0, \quad A_{21}(t)x'(t) + B_{r_1,r}u(t) \equiv 0. \tag{16}$$

Поскольку Ω-периодический вектор $x(t)$ имеет множество частот L и его компонента $x''(t) \equiv 0,$ то эти частоты будут только у компоненты $x'(t),$ которая, как следует из первого тождества в (16), является решением линейной однородной стационарной системы. Поэтому выполняется условие (5) и $x'(t)$ представляется тригонометрическим многочленом вида $x'(t) = \alpha + \tilde{z}(t),$ где α, β_j, γ_j – некоторые постоянные векторы; $0, \pm i\nu_1, \ldots, \pm i\nu_k$ – собственные числа блока A_{11} матрицы коэффициентов.

Подставляя выражение $x'(t)$ во второе тождество из (16), получим

$$F(t) + G(t) \equiv 0, \quad F(t) = A_{21}(t)\tilde{z}(t), \quad G(t) = A_{21}(t)\alpha + B_{r_1,r}u(t). \tag{17}$$

Заметим, что вектор-функция $G(t)$ является ω-периодической. Запишем ее разложение в ряд Фурье

$$G(t) \sim \sum_{p=-\infty}^{\infty} g_p \exp\frac{2\pi i p}{\omega}t,$$

где коэффициенты

$$g_p = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} G(\tau)\exp\left(-\frac{2\pi i p}{\omega}\tau\right)d\tau.$$

Выпишем также разложение в ряд Фурье для матрицы $A_{21}(t)$

$$A_{21}(t) \sim \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_q \exp\frac{2\pi iq}{\omega}t,$$

где коэффициенты

$$A_q = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} A_{21}(\tau)\exp\left(-\frac{2\pi iq}{\omega}\tau\right)d\tau.$$

Представим тригонометрический многочлен $\tilde{z}(t)$ из (6) в комплексной форме

$$\tilde{z}(t) = \sum_{j=-k,\, k\neq 0}^{k} \delta_j \exp(i\nu_j t),$$

где δ_j – некоторые постоянные комплексные векторы, линейно выражающиеся через векторы α_j, β_j.

Применяя свойства формальных операций над рядами Фурье [15, с. 40], запишем разложение для вектор-функции $F(t)$

$$F(t) = A_{21}(t)\tilde{z}(t) \sim \sum_{j=-k,\, k\neq 0}^{k} \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_q\delta_j \exp\left(i\left(\frac{2\pi q}{\omega} + \nu_j\right)\right)t.$$

В результате, принимая во внимание первое тождество из (17), получим следующее разложение в ряд Фурье:

$$0 \equiv F(t) + G(t) \sim \sum_{j=-k,\, k\neq 0}^{k} \sum_{q=-\infty}^{\infty} A_q\delta_j \exp\left(i\left(\frac{2\pi}{\omega}q + \nu_j\right)t\right) + \sum_{p=-\infty}^{\infty} g_p \exp\left(i\left(\frac{2\pi}{\omega}p\right)t\right). \quad (18)$$

Покажем, что в полученном разложении (18) все показатели Фурье различны. Допустим противное, т. е. найдутся некоторые индексы j, q, p такие, что выполняется равенство

$$\frac{2\pi}{\omega}q + \nu_j = \frac{2\pi}{\omega}p.$$

Представление этого равенства в виде

$$\nu_j = \frac{2\pi}{\omega}(p-q)$$

означает соизмеримость частот ν_j и $\dfrac{2\pi}{\omega}$, что противоречит предположению о свойствах частот целевого множества L. Полученное противоречие доказывает, что в разложении (18) нет одинаковых частот. Поскольку левая часть разложения (18) есть тождественный нуль, то согласно теореме единственности для почти периодических функций [15, с. 51] все коэффициенты Фурье равны нулю. Значит, в частности, верно тождество $F(t) \equiv 0$, откуда следует выполнение условия (6).

Теорема доказана.

Благодарности. Работа выполнена в Институте математики НАН Беларуси в рамках ГПФИ «Конвергенция–2026.

Acknowledgements. The work was carried out at the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus within the framework of the SPFI “Convergence–2026”.

Список использованных источников

1. Зубов, В. И. Лекции по теории управления / В. И. Зубов. – М., 1975. – 495 с.

2. Макаров, Е. К. Управляемость асимптотических инвариантов нестационарных линейных систем / Е. К. Макаров, С. Н. Попова. – Мн., 2012. – 407 с.

3. Асинхронное возбуждение незатухающих колебаний / Д. И. Пеннер, Д. Б. Дубошинский, М. И. Козаков [и др.] // Успехи физических наук. – 1973. – Т. 109, вып. 2. – С. 402–406. https://doi.org/10.3367/ufnr.0109.197302j.0402

4. Massera, J. L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales / J. L. Massera // Boletin de la Facultad de Ingenieria. – 1950. – Vol. 4, N 1. – P. 37–45.

5. Курцвейль, Я. О периодических и почти периодических решениях систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Я. Курцвейль, О. Вейвода // Чехословацкий математический журнал. – 1955. – Т. 5, № 3. – С. 362–370. https://doi.org/10.21136/cmj.1955.100152

6. Еругин, Н. П. О периодических решениях дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин // Прикладная математика и механика. – 1956. – Т. 20, вып. 1. – С. 148–152.

7. Гайшун, И. В. Уравнения в полных производных с периодическими коэффициентами / И. В. Гайшун // Доклады АН БССР. – 1979. – Т. 23, № 8. – С. 684–686.

8. Грудо, Э. И. О периодических решениях с несоизмеримыми периодами линейных неоднородных периодических дифференциальных систем / Э. И. Грудо, А. К. Деменчук // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, № 3. – С. 409–416.

9. Ласунский, А. В. О периоде решений дискретного периодического логистического уравнения / А. В. Ласунский // Труды Карельского научного центра Российской академии наук. – 2012. – № 5. – С. 44–48.

10. Борухов, В. Т. Сильно инвариантные подпространства неавтономных линейных периодических систем и их решения с периодом, несоизмеримым с периодом системы / В. Т. Борухов // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54, № 5. – С. 585–591. https://doi.org/10.1134/s0374064118050035

11. Деменчук, А. К. Управление асинхронным спектром линейных систем с нулевым средним значением матрицы коэффициентов / А. К. Деменчук // Труды Института математики. – 2018. – Т. 26, № 1. – С. 31–34.

12. Деменчук, А. К. Управление асинхронным спектром линейных систем с невырожденным диагональным блоком усреднения матрицы коэффициентов / А. К. Деменчук // Труды Института математики. – 2022. – Т. 30, № 1–2. – С. 22–29.

13. Деменчук, А. К. Управление асинхронным спектром линейных систем с матрицей при управлении максимального ранга / А. К. Деменчук // Труды Института математики. – 2019. – Т. 27, № 1–2. – С. 23–28.

14. Деменчук, А. К. Асинхронные колебания в дифференциальных системах. Условия существования и управления / А. К. Деменчук. – Saarbrucken, 2012. – 186 с.

15. Левитан, Б. М. Почти-периодические функции / Б. М. Левитан. – М., 1953. – 396 с.

References

1. Zubov V. I. *Lectures on Control Theory*. Moscow, 1975. 495 p. (in Russian).

2. Makarov E. K., Popova S. N. *Controllability of Asymptotic Invariants of Nonstationary Linear Systems*. Minsk, 2012. 407 p. (in Russian).

3. Penner D. I., Duboshinskii D. B., Kozakov M. I., Vermel’ A. S., Galkin Yu. V. Asynchronous excitation of undamped oscillations. *Soviet Physics Uspekhi*, 1973, vol. 16, pp. 158–160. https://doi.org/10.1070/pu1973v016n01abeh005156

4. Massera J. L. Observaciones sobre les soluciones periodicas de ecuaciones diferenciales. *Boletin de la Facultad de Ingenieria*, 1950, vol. 4, no. 1, pp. 37–45.

5. Kurzweil J., Vejvoda O. On the periodic and almost periodic solutions of a system of ordinary differential equation. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 1955, vol. 5, no. 3, pp. 362–370 (in Russian). https://doi.org/10.21136/cmj.1955.100152

6. Erugin N. P. On periodic solutions of differential equations. *Prikladnaya matematika i mekhanika = Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1956, vol. 20, no. 1, pp. 148–152 (in Russian).

7. Gaishun I. V. Equations in full derivatives with periodic coefficients. *Doklady AN BSSR*, 1979, vol. 23, no. 8, pp. 684–686 (in Russian).

8. Grudo E. I., Demenchuk A. K. On periodic solutions with incommensurable periods of linear nonhomogeneous periodic differential systems. *Differential Equations*, 1987, vol. 23, no. 3, pp. 409–416 (in Russian).

9. Lasunsky A. V. On the period of solutions of a discrete periodic logistic equation. *Trudy Karel’skogo nauchnogo tsentra Rossiiskoi akademii nauk = Transactions of the Karelian Research Centre of the Russian Academy of Sciences*, 2012, no. 5, pp. 44–48 (in Russian).

10. Borukhov V. T. Strongly invariant subspaces of nonautonomous linear periodic systems and solutions whose period is incommensurable with the period of the system itself. *Differential Equations*, 2018, vol. 54, no. 5, pp. 578–585. https://doi.org/10.1134/s0012266118050026

11. Demenchuk A. K. Control of the asynchronous spectrum of linear systems with zero mean value of the matrix of coefficients. *Trudy Instituta Matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2018, vol. 26, no. 1, pp. 31–34 (in Russian).

12. Demenchuk A. K. Control of the asynchronous spectrum of linear systems with a non-degenerate diagonal averaging block of the matrix of coefficients. *Trudy Instituta Matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2022, vol. 30, no. 1–2, pp. 22–29 (in Russian).

13. Demenchuk A. K. Asynchronous spectrum control of linear systems with a matrix under maximum rank control. *Trudy Instituta Matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2019, vol. 27, no. 1–2, pp. 23–28 (in Russian).

14. Demenchuk A. *Asynchronous Oscillations in Differential Systems. Conditions of Existence and Control*. Saarbrucken, 2012. 186 p. (in Russian).

15. Levitan B. M. *Almost Periodic Functions*. Moscow, 1953. 396 p. (in Russian).

Информация об авторе

Деменчук Александр Константинович – д-р физ.-мат. наук, профессор, гл. науч. сотрудник. E-mail: demenchuk@im.bas-net.by.

Information about the author

Demenchuk Aleksandr K. – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Chief Researcher. E-mail: demenchuk@im.bas-net.by.