

ФИЗИКА
PHYSICSУДК 535.26:621.378.15
<https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-2-108-118>Поступило в редакцию 04.11.2025
Received 04.11.2025**Е. В. Тимошенко¹, В. А. Юревич²**¹*Могилевский государственный университет имени А. А. Кулешова,
ул. Космонавтов, 1, 212022, Могилев, Республика Беларусь*²*Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий,
пр. Шмидта, 3, 212027, Могилев, Республика Беларусь***МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЕРХИЗЛУЧЕНИЯ В РЕЗОНАТОРЕ В УСЛОВИЯХ
ДРЕЙФА ЧАСТОТЫ, ВЫЗВАННОГО РЕЗОНАНСНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ***(Представлено членом-корреспондентом И. В. Семченко)*

Аннотация. На основе нескольких модификаций уравнений Максвелла–Блоха проанализированы особенности излучения импульсных лазеров при когерентном взаимодействии света и усиливающей среды с резонансной фазовой нелинейностью. Оригинальность анализа представлена учетом взаимосвязанных факторов неустойчивости фазового соотношения светового поля и отклика среды, обусловленных диполь-дипольным взаимодействием и вкладом квазирезонансной поляризованности. Для описания режима сверхизлучения уточнены полуаналитические выражения переменных отклика в схеме формализма вектора Блоха. Различные приближения исходной модели представлены системами кинетических уравнений для переменных поля и отклика среды, а также нелинейным осцилляторным уравнением для полярного угла вектора Блоха. Моделирование когерентного эффекта сверхизлучения в резонаторе указало на высокую критичность временной структуры сверхизлучения по отношению к резонансной нелинейности материального отклика. Показано, что в условиях нелинейности типичная для сверхизлучения нутационная структура интенсивности преобразуется в контрастную квазипериодическую модуляцию заднего фронта основного импульса в субпикосекундном диапазоне. Расчетный анализ процесса сверхизлучения в резонаторе выполнен для параметров систем квантовых точек в полупроводниковых наногетероструктурах. Такие системы рассматриваются как перспективные для применения в компактных устройствах оптической электроники и фотоники.

Ключевые слова: резонансная нелинейность, когерентные оптические эффекты, сверхизлучение, формализм вектора Блоха, квантоворазмерные структуры

Для цитирования. Тимошенко, Е. В. Моделирование сверхизлучения в резонаторе в условиях дрейфа частоты, вызванного резонансной нелинейностью / Е. В. Тимошенко, В. А. Юревич // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2026. – Т. 70, № 2. – С. 108–118. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-2-108-118>

Elena V. Timoschenko¹, Vladimir A. Yurevich²¹*Mogilev State A. Kuleshov University,**1, Kosmonavtov Str., 212022, Mogilev, Republic of Belarus*²*Belarussian State University of Food and Chemical Technologies,**3, Schmidt Ave., 212027, Mogilev, Republic of Belarus***MODELING OF SUPERRADIANCE IN A RESONATOR UNDER CONDITIONS
OF FREQUENCY DRIFT CAUSED BY RESONANT NONLINEARITY***(Communicated by Corresponding Member Igor V. Semchenko)*

Abstract. Several modifications of the Maxwell–Bloch equations are presented for analyzing the emission characteristics of pulsed lasers. The analysis is performed under the condition of coherent interaction between light and a gain medium with resonant phase nonlinearity. For the first time, the interrelated factors of instability of the phase relationship of the light field

and the response of the medium, caused by the dipole-dipole interaction and the contribution of quasi-resonant polarization, are taken into account. To describe the superradiance (SR) regime, semi-analytical expressions for the response variables in the Bloch vector formalism are refined. Various approximations of the original model are represented by systems of kinetic equations for the field and response variables of the medium, as well as a nonlinear oscillatory equation for the polar angle of the Bloch vector. Modeling of the coherent SR effect in a resonator showed that the temporal structure of SR is extremely sensitive to the resonant nonlinearity of the material response. It is shown that under nonlinear conditions, the typical nutational intensity structure of synchrotron radiation is transformed into a contrasting quasi-periodic modulation of the trailing edge of the main pulse in the subpicosecond range. A computational analysis of the synchrotron radiation process in a resonator is performed for the parameters of semiconductor quantum dot systems in nanoheterostructures. Such systems are considered promising for use in compact optical electronics and photonics devices.

Keywords: resonant nonlinearity, coherent optical effects, superradiance, Bloch vector formalism, quantum-dimensional structures

For citation. Timoschenko E. V., Yurevich V. A. Modeling of superradiance in a resonator under conditions of frequency drift caused by resonant nonlinearity. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2026, vol. 70, no. 2, pp. 108–118 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-2-108-118>

Введение. Когерентный эффект сверхизлучения (СИ), развивающийся в лазерных резонаторах при достижении относительно высокого уровня инверсии, представляет одно из явлений, которые используются для оптимизации выходных характеристик импульсных источников когерентного излучения [1; 2].

Когерентное взаимодействие излучения и вещества происходит как синхронное колебательное изменение поля и поляризации в среде. Это взаимодействие развивается при сравнительно медленных релаксационных процессах в среде по сравнению с временными вариациями светового поля. Типичным оптическим процессом, возникающим в этих условиях, является сверхизлучение – вынужденное испускание импульса излучения, способное происходить в инвертированной среде в результате относительно резкого сброса инверсии при исключении спонтанных переходов. Таким образом, СИ представляет собой эффект сверхбыстрого взаимодействия излучения с веществом, когда характерная длительность высвечиваемых оптических импульсов значительно меньше времени действия релаксационных механизмов в среде. Среда представлена ансамблем элементарных квантовых излучателей (КИ), при внешнем возбуждении плотность инвертированных КИ может превысить некоторое критическое значение. Плотностью возбужденных КИ определяется характерное время испускания импульсов, обратно пропорциональное N – объемной концентрации КИ. Поэтому в ансамбле из большого числа возбужденных КИ испускание происходит в течение времени $\tau_R \sim 1 / N$, много меньшего времени излучения изолированного атома τ_1 . Важно также, что характерное время излучения значительно меньше времени спонтанного распада резонансной поляризованности. Скорость испускания резко возрастает как следствие фазовой корреляции (согласования фаз) первоначально независимых КИ, образующих определенную структуру в матрице твердотельных инверсных сред. Фазировка КИ происходит за счет их собственного излучаемого поля. В лазерах с низкодобротными резонаторами скорость наведения и распада поляризованности КИ в инверсной среде может оказаться значительно меньше скорости релаксации поля в схеме резонатора. Именно в этих условиях может развиваться СИ [2; 3]. Пиковая интенсивность импульса на частоте ω , плотность энергии в котором определяется числом излученных квантов $N\hbar\omega$, получается пропорциональной N^2 – в результате высвечиваемый импульс СИ оказывается особо мощным. Когерентные эффекты, связанные с корреляцией КИ и их взаимодействием через поле в резонаторе, могут существенно влиять на формирование импульсных режимов генерации [4].

В более общем случае следует учитывать, что типичная для СИ при высоких значениях N кинетика когерентного излучения сопровождается оптической нутацией. В процессе наведения корреляций в ансамбле КИ разность населенностей осциллирует с частотой, зависящей от напряженности светового поля (частотой Раби), т. е. квантовая система квазипериодично переходит из нижнего состояния в верхнее и обратно. Соответственно чередуются процессы поглощения и индуцированного испускания излучения, в результате световой поток СИ на выходе из резонатора оказывается промодулированным по интенсивности. Структуру подобной модуляции считают нутационной в связи с тем, что уравнения для нелинейного отклика вещества

в векторном представлении, известном как формализм вектора Блоха, аналогичны осцилляторным уравнениям для симметричного волчка [4–6].

Далее в рамках этого представления следует учитывать, что типичная для резонансного взаимодействия кинетика когерентного излучения сопровождается фазовой неустойчивостью. Тогда при формировании поля, излучаемого структурой дипольных КИ в лазерном резонаторе, происходят смещение частоты и соответствующие вариации фазового соотношения между действующим на КИ световым полем и поляризационным откликом активной среды. Среди причин неустойчивости можно указать влияние ближних полей диполей на положение центральной частоты резонанса усиления и нелинейную рефракцию, вызванную поглощением излучения в переходах, соседних с резонансным. При этом фазовая модуляция возникает даже при наличии отстройки частоты действующего поля ω от резонансной частоты перехода ω_{12} . Известно, что нелинейный дрейф частоты (frequency chirp), вызванный резонансной фазовой нелинейностью, выступает эффективным фактором значительных изменений в динамике импульсного излучения [7].

СИ было экспериментально обнаружено во многих средах – газах, твердых телах и полупроводниках [1; 8], в том числе в экситонных конденсатах при низких температурах и системах квантовых точек (КТ) в наногетероструктурах [9]. Следует подчеркнуть, что в качестве активных элементов оптических и лазерных схем нанофотоники предпочтительны именно массивы КТ [10; 11]. КТ можно представить как элементарный квантовый излучатель, который имеет размер больше атома и дискретный энергетический спектр. При использовании соответствующих технологий формируют компактные регулярные структуры с высокой концентрацией таких КИ, тогда полученные материалы часто называют суперкристаллами (СК) [12]. Динамика компонентов отклика СК в режиме сверхизлучения определяет процесс генерации излучения в случае достижения максимальной инверсии в массиве КТ, размещенном в резонаторе. СИ в образце суперкристалла КТ происходит как коллективная спонтанная рекомбинация, и в силу высокой объемной плотности КТ считается значимым эффект взаимного влияния ближних полей дипольных частиц. В процессе формирования СИ фазы отдельных КТ, представляемых дипольными резонансными центрами, спонтанно синхронизируются, в результате чего в пределах образца СК формируется коллективный диполь с малым временем излучательной рекомбинации, равным времени сверхизлучения τ_R . Фазовая неустойчивость излучения по мере резонансной вариации населенности при сбросе инверсии, на которую накладываются нутационные осцилляции, определяется влиянием диполь-дипольного взаимодействия и реакцией на поле переходов, близких к основному. Обусловленная ими динамика проявляется в смещении центра линии ω_{12} (частоты перехода в структуре КТ) и в автомодуляционном дрейфе частоты формируемого в резонаторе поля.

В работе, положенной в основу настоящего сообщения, в рамках приближений уравнений Максвелла–Блоха проанализированы особенности динамики излучения импульсных лазеров в условиях когерентного взаимодействия светового поля со средой усиливающего элемента и влияния фазовой нелинейности, характерной для резонансного отклика среды.

Неоднородное уширение в схеме расчета эволюции СИ в резонаторе. В реализованном подходе (в приближении среднего поля) уравнение для квазистационарной напряженности поля $E(t)$ в резонаторе решается совместно с уравнениями Блоха для электрических моментов дипольных КИ аналогично, например, [6]. Систему уравнений Максвелла–Блоха для вероятностных переменных материального отклика – поляризованности $\rho(t)$ и инверсии заселенности уровней $n(t)$ уже традиционно применяют для анализа динамики лазеров, включающих массивы КТ. Неоднородное уширение спектральной линии усиления особенно типично для структур на основе КТ. В применяемом представлении допускается, что разброс собственных частот дипольных КТ ω_{12} вблизи центральной частоты ω_0 неоднородно уширенной линии описывается функцией нормального распределения с характеристикой спектральной ширины линии $1/T_2^*$. В общем случае рассматриваемого варианта резонансного взаимодействия исходная формулируемая модель записывается так:

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} + \frac{E}{T} &= \frac{\omega}{\epsilon_0} P, \quad \frac{d}{dt} \rho(t, \Delta\omega) = \frac{\mu}{\hbar} nE + i\rho(t, \Delta\omega)\Delta\omega, \\ \frac{d}{dt} n(t, \Delta\omega) &= -\frac{\mu}{2\hbar} [\rho^*(t, \Delta\omega)E + \rho(t, \Delta\omega)E^*], \quad \Delta\omega = \omega - \omega_{12}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь P – поляризованность массива КИ; T – время жизни фотона в резонаторе; μ – среднее значение дипольного момента перехода; $\Delta\omega$ – линейная отстройка (дефект) частоты. Представления обобщенной двухуровневой схемы [4] приводят к перенормировке выражения для поляризованности P , в котором рассматривается поляризующее влияние реакции квазирезонансных переходов. Диполь-дипольное взаимодействие в ансамбле КИ далее определено использованием в уравнениях для материального отклика (1) величины эффективного (действующего на КИ) поля E' , которое в отличие от коррелирующего излучаемого поля E содержит локальную поправку Лоренца

$$P = N(\mu\langle\rho\rangle + i2\pi\Delta\alpha\varepsilon_0\langle n-1\rangle E'), \quad E' = \frac{E + i\mu N\langle\rho\rangle / 3\varepsilon_0}{1 + 2\pi\Delta\alpha N\langle n-1\rangle / 3}, \quad (2)$$

$$\langle\rho(t)\rangle = T_2^* \int \rho(t, \Delta\omega) d\Delta\omega, \quad \langle n(t)\rangle = T_2^* \int n(t, \Delta\omega) d\Delta\omega.$$

Квазирезонансный компонент в выражении для P пропорционален вариации инверсии с коэффициентом $\Delta\alpha$, равным дефекту поляризуемости (различию поляризуемостей активных центров на уровнях основного перехода).

Далее для поля E будет использована переменная $e(t) = \mu E(t) / \hbar$, известная как частота Раби; определен временной параметр СИ τ_R , а также введены коэффициент нелинейной рефракции β и нормирующий коэффициент в поправке Лоренца γ (здесь l – длина активного слоя)

$$\tau_R = \frac{\varepsilon_0 \hbar c}{\mu^2 N l \omega}, \quad \beta = \frac{2\pi\Delta\alpha \hbar}{\mu^2} \varepsilon_0, \quad \gamma = \frac{\mu^2 N}{3\varepsilon_0 \hbar}.$$

Предполагается далее, что частота ω_0 совпадает с несущей частотой излучаемого поля ω , а область значений частоты перехода ω_{12} значительно превышает величину $2 / T_2^*$.

С учетом представлений (2) кинетическую модель СИ тогда можно записать в виде

$$T \frac{d\mathbf{e}}{dt} = \frac{G}{\tau_R} (\langle\rho\rangle + i\beta\langle n-1\rangle \mathbf{e}) - \mathbf{e},$$

$$\frac{d}{dt} \rho(t, \Delta\omega) = G n(t, \Delta\omega) \mathbf{e} + i[\rho(t, \Delta\omega) \Delta\omega + G \gamma n(t, \Delta\omega) \langle\rho\rangle],$$

$$\frac{d}{dt} n(t, \Delta\omega) = -\frac{G}{2} [\rho^* \mathbf{e} + \rho \mathbf{e}^* + i\gamma(\rho^* \langle\rho\rangle - \langle\rho^*\rangle \rho)],$$

$$G = (1 + \beta\gamma\langle n-1\rangle)^{-1}, \quad \Delta\omega = \frac{\omega T_2^*}{\sqrt{\pi}} [1 - \exp(-(\omega_0 - \omega_{12})^2 T_2^{*2})],$$
(3)

где экспоненциальным компонентом в выражении частотной отстройки $\Delta\omega$ (и, соответственно, в уравнениях для спектральных составляющих поляризованности) определяется разброс частотных отстроек, характеризующих неоднородное уширение.

Расчетная модель процесса СИ (3) образует самосогласованную систему уравнений, в которой коррелирующее поле зависит от резонансных свойств активных центров и, в свою очередь, определяет динамику их реакции в условиях одноквантового резонанса. Отличие модели от известных в том, что отстройка частоты в условиях действительности механизмов нелинейности приобретает динамические нелинейные составляющие, пропорциональные инверсной заселенности.

Для возникновения СИ среда должна быть максимально инвертирована, возможность обратного процесса изменения заселенности при сбросе инверсии не рассматривается, т. е. изначально в уравнении для вероятности инверсной заселенности n исключены релаксационные составляющие, не учитывается также фазовая (внутризонная) релаксация поляризованности. Последним исключается рассмотрение влияния механизмов однородного уширения спектральной линии усиления. Поэтому нелинейную модель (3) в отношении описания процесса СИ в структурах полупроводниковых КТ определенным образом можно применять для оценки динамики поля в доменных образованиях, составляющих массив суперкристалла КТ [9].

Результаты моделирования эффекта СИ. Для решения задачи моделирования в (3) используется экспоненциальное выражение комплексных переменных

$$e(t)T = S(t) \exp[i\phi(t)], \quad \rho(t, \Delta\omega) = R(t, \Delta\omega) \exp[i\psi(t, \Delta\omega)]. \quad (4)$$

Начальные условия соответствуют нулевому значению поляризованности $R(t=0) = 0$ при максимальном уровне инверсии, т. е. считается, что $n(t=0) = 1$. Схема расчета (3), преобразованная с учетом представлений (4), численно интегрировалась методом Рунге–Кутты при указанных выше начальных условиях для материального отклика в предположении, что «стартовое» значение амплитуды $S(t=0)$ достаточно мало, т. е. фактически решалась задача усиления относительно слабого сигнала при условии совпадения начальных фаз поля и поляризованности. Вид и характер решений (3) для нормированной интенсивности поля СИ $I_n(t) = S^2(t)$ при этом не проявлял зависимости от избранного значения $S(t=0)$. Фрагменты приведенного ниже рис. 1 воспроизводят типичную развертку решений $I_n(t)$ на пикосекундной шкале. Временную структуру СИ принято связывать с нутационным движением вектора дипольного момента (его вращением вокруг направления поля) за время сброса инверсии [5].

Для оценки масштаба явлений в случае моделирования на основе системы уравнений (3) использованы примерные значения параметров реальных излучающих устройств на основе КТ, которые взяты из научной литературы для массивов КТ в схемах InAs/(Al)GaAs на подложках GaAs [10; 11]. Так, величина плотности КТ находилась в пределах $(1,0\text{--}5,0)10^{11}\text{см}^{-2}$, также предполагалось, что длина резонатора с учетом оптической длины усиливающего элемента, излучающего в зависимости от концентрации КТ и уровня оптических потерь, была в пределах 0,3–0,4 мм. Величину дипольного момента элементарного излучателя можно оценить, следуя примерному размеру КТ – 2–5 нм. Пиковая интенсивность импульсов соответствовала $10\text{--}100\text{МВт/см}^2$ для диапазона длин волн $\sim(1,25\text{--}1,30)10^{-6}\text{м}$. Величины дефекта поляризуемости $\Delta\alpha$ определяются значением фактора Хенри, связывающего также инверсию и вариации показателя преломления в средах оптических полупроводников. По результатам его оценки в работе [13] величину $\Delta\alpha$ можно принять в пределах $(4\text{--}7)10^{-21}\text{см}^3$.

Приведенные на рис. 1 зависимости доказывают возможность качественного изменения имеющей нутационную природу осцилляторной структуры СИ в условиях действительности механизмов резонансной нелинейности. Сравнение проводится с вариантами расчета без учета фазового смещения – в виде « π -импульсной» серии (фрагменты рис. 1, *a–f*). Существование нелинейности и нарастание уровня модуляции фазового соотношения приводит к заметному усложнению временной картины излучения. Характерную для высокого уровня инверсии последовательность

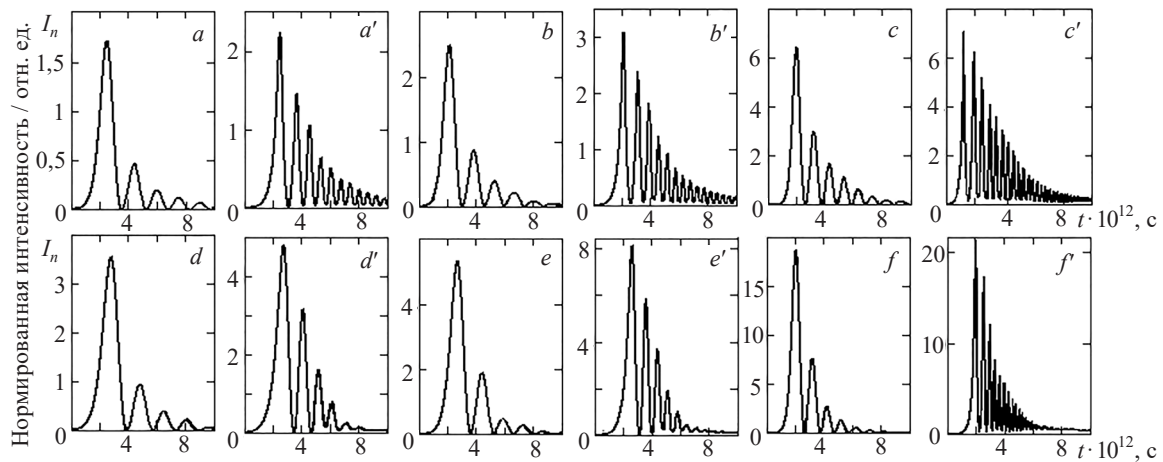


Рис. 1. Временная структура сверхизлучения: $\tau_R = 0,25\text{ пс}$ (*a, d*), $0,2\text{ пс}$ (*b, e*), $0,1\text{ пс}$ (*c, f*); $\beta = 0$ (*a–f*), $1 \cdot 10^{-13}\text{ с}$ (*a'–f'*); $\gamma = 0$ (*a–f*), $1 \cdot 10^{12}\text{ с}^{-1}$ (*a', d'*), $1,5 \cdot 10^{12}\text{ с}^{-1}$ (*b', e'*), $3 \cdot 10^{12}\text{ с}^{-1}$ (*c', f'*); $T = 2\text{ пс}$ (*a–c*), 1 пс (*d–f*), $T_2^* = 0,5\text{ пс}$

Fig. 1. Temporal structure of the superradiance: $\tau_R = 0.25\text{ ps}$ (*a, d*), 0.2 ps (*b, e*), 0.1 ps (*c, f*); $\beta = 0$ (*a–f*), $1 \cdot 10^{-13}\text{ s}$ (*a'–f'*); $\gamma = 0$ (*a–f*), $1 \cdot 10^{12}\text{ s}^{-1}$ (*a', d'*), $1.5 \cdot 10^{12}\text{ s}^{-1}$ (*b', e'*), $3 \cdot 10^{12}\text{ s}^{-1}$ (*c', f'*); $T = 2\text{ ps}$ (*a–c*), 1 ps (*d–f*), $T_2^* = 0.5\text{ ps}$

всплесков интенсивности можно представить отдельным относительно коротким импульсом СИ (фрагменты рис. 1, $a'-f'$). Задний фронт импульса, в сущности, формируется в виде серии квазирегулярных выбросов интенсивности с определенным изменением времени релаксации и некоторым снижением их контраста. Частота следования образующих структуру модулирующих всплесков возрастает с уменьшением времени сверхизлучения τ_R (увеличением концентрации КИ).

Особенности применения формализма вектора Блоха. Динамику СИ можно анализировать в приближении, где характеристики отклика системы являются функциями полярного угла вектора Блоха. Этот подход, подробно описанный в [5], позволяет получить полуаналитические решения для импульсного поля произвольной формы и является корректным при условии пренебрежения обоими факторами уширения, кроме автомодуляционного, стимулированного резонансной нелинейностью. Применение представления (4) тогда приводит к следующей модификации уравнений (3):

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{G_0}{\tau_R} R \cos \varphi - \frac{S}{T}, \quad \frac{dR}{dt} = G_0 \frac{nS}{T} \cos \varphi, \quad \frac{dn}{dt} = -G_0 \frac{RS}{T} \cos \varphi, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= G_0 \left[\beta \frac{n-1}{\tau_R T} - \gamma n - \left(\frac{R}{\tau_R S} + \frac{nS}{TR} \right) \sin \varphi \right], \quad G_0 = [1 + \beta \gamma (n-1)]^{-1}, \quad \varphi = \phi - \psi. \end{aligned} \quad (5)$$

Расчетная модель процесса СИ (5) также образует замкнутую самосогласованную кинетическую систему, в которой коррелирующее КИ и усредненное по резонатору световое поле зависит от резонансных свойств активных центров. В свою очередь это поле на частоте ω , соответствующей одной из мод резонатора, определяет динамику реакции КИ в условиях точного резонанса ($\omega = \omega_{12}$). Из уравнений для составляющих отклика следует соотношение, представляющее собой считающийся классическим закон сохранения вектора Блоха [5]: $R^2 + n^2 = 1$. В пространстве переменных резонансного отклика ($Re\rho$, $Im\rho$, n) полярным углом вектора Блоха условно определяется ориентация дипольного момента КИ по отношению к направлению коррелирующего поля. Выражение закона сохранения вектора Блоха позволяет записать решения для материальных переменных в виде функций угла поворота $\theta(t)$. Представления обобщенной двухуровневой схемы взаимодействия позволяют учесть резонансную нелинейность отклика среды в условиях влияния ближних полей КИ. Применение такого обобщения дает возможность корректировки формализма вектора Блоха и соответствующее уточнение решений для материальных переменных аналогично [14; 15]. Выражения действительных величин отклика среды тогда принимают вид

$$R(t) = \sin \theta(t), \quad n(t) = \cos \theta(t), \quad \theta(t) = \frac{1}{1 - \beta \gamma} \left[\frac{1}{T} \int_{-\infty}^t S(t) \cos \varphi(t) dt - \beta \gamma R(t) \right]. \quad (6)$$

Величиной угла поворота $\theta(t)$ (полярного угла вектора Блоха) за время формирования импульсов СИ определяется изменение модуля вектора Блоха в пространстве переменных $Re\rho$, $Im\rho$, n . В отличие от традиционного представления, полученное соотношение для угла $\theta(t)$ наряду с выражением «площади импульса поля» включает дополнительный компонент, характеризующий нелинейную отстройку фазы. Подынтегральное выражение для «площади импульса» в решениях (6) зависит от фазового соотношения поля и поляризованности. Тем же фазовым соотношением определяется и эффективность усиления в уравнении для поля из схемы (5). В сущности, значение $\cos \varphi$ выступает в качестве нелинейного форм-фактора линии усиления для условий учета динамической отстройки частоты от резонанса.

Применение выражений (6) дает возможность вдвое сократить число степеней свободы в исходной динамической системе (5). Использование выражения для $R(t)$, однако, сопряжено с очевидной сложностью расчетов, поскольку оно представляет собой трансцендентное уравнение. По этой причине в представленной ниже модифицированной схеме расчета динамики СИ целесообразно сохранить одну из степеней свободы введением дифференциального уравнения непосредственно для полярного угла вектора Блоха:

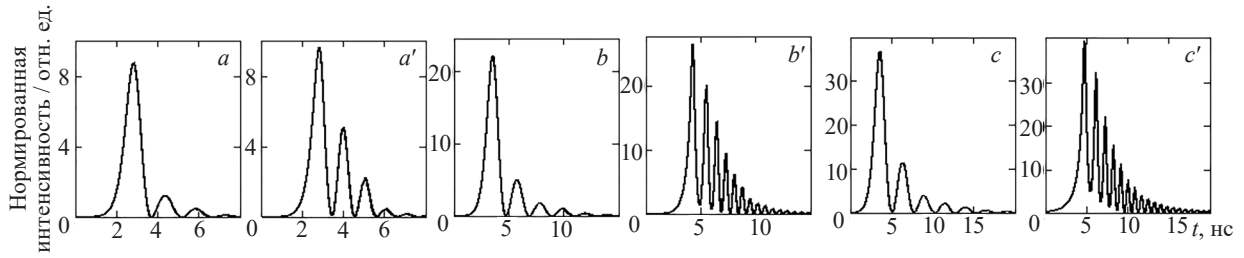


Рис. 2. Временная структура сверхизлучения на основе расчета схемы (7): $T = 1 \cdot 10^{-12}$ с (a, a'), $2 \cdot 10^{-12}$ с (b, b'), $3 \cdot 10^{-12}$ с (c, c'); $\gamma = 1 \cdot 10^{12}$ с $^{-1}$ (a'), $2 \cdot 10^{12}$ с $^{-1}$ (b'), $2,5 \cdot 10^{11}$ с $^{-1}$ (c'); $\tau_R = 2 \cdot 10^{-13}$ с; $\beta\gamma = 0$ ($a-c$), $0,2$ ($a'-c'$)

Fig. 2. Temporal structure of the superradiance based on the calculation of scheme (7): $T = 1 \cdot 10^{-12}$ s (a, a'), $2 \cdot 10^{-12}$ s (b, b'), $3 \cdot 10^{-12}$ s (c, c'); $\gamma = 1 \cdot 10^{12}$ s $^{-1}$ (a'), $2 \cdot 10^{12}$ s $^{-1}$ (b'), $2,5 \cdot 10^{11}$ s $^{-1}$ (c'); $\tau_R = 2 \cdot 10^{-13}$ s; $\beta\gamma = 0$ ($a-c$), $0,2$ ($a'-c'$)

$$\frac{dS}{dt} = \frac{G_1}{\tau_R} \sin \theta \cos \varphi - \frac{S}{T}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{G_1}{T} S \cos \varphi, \quad (7)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = G_1 \left[\left(\frac{\beta}{\tau_R T} - \gamma \right) \cos \theta - \frac{\beta}{\tau_R T} - \left(\frac{\sin \theta}{\tau_R S} + \frac{1}{T} \frac{S}{\operatorname{tg} \theta} \right) \sin \varphi \right], \quad G_1 = (1 - \beta\gamma + \beta\gamma \cos \theta)^{-1}.$$

Схема расчета СИ на основе системы уравнений (7) численно интегрировалась методом Рунге–Кутты при указанных выше значениях параметров и начальных условиях для материального отклика СК в том же предположении, что «стартовое» значение амплитуды $S(t=0)$ достаточно мало.

Решения расчетной модели (7) относительно $I_n(t) = S^2(t)$, иллюстрируемые рис. 2, также воспроизводят осцилляторный режим СИ в резонаторе. Контрастная структура квазирегулярных всплесков интенсивности, имеющих нутационную природу, указывает на квантовый характер процесса. Оптическая нутация обусловлена соответствующим вращением вектора Блоха вокруг направления коррелирующего поля и затухает по мере сброса инверсии.

В известных оценках [5] основной закономерностью импульсов поля, образующих структуру СИ, является квантованная величина «площади» всплесков нормированной напряженности поля, выражаемой интегралом частоты Раби. В традиционно рассматриваемом случае полярный угол вектора Блоха (угол поворота вектора $\theta(t)$) за время излучения такого отдельного всплеска напряженности поля должен быть равен π . Резонансная нелинейность среды и обусловленная ею перенормировка фазового соотношения поля и поляризованности, судя по выражению для полярного угла вектора Блоха (6), указывает на иное значение «площади» импульса. Ее величина, определяющая частоту и релаксацию нутационной структуры СИ, дополнительно зависит от амплитуды поляризованности. Характерным следствием этой вариации полярного угла является предсказываемое расчетом (7) увеличение нутационной частоты осцилляций СИ по отношению к случаю отсутствия нелинейного дрейфа частоты (рис. 2, $a-c$). Рассчитываемые временные структуры процесса СИ при учете нелинейности (рис. 2, $a'-c'$) указывают на то, что снижение характерного времени СИ τ_R (соответственно, нарастание концентрации КИ) обуславливает усложнение временной картины излучения. Уменьшается период следования квазирегулярных автомодуляционных выбросов интенсивности, формирующих задний фронт импульса, одновременно заметно снижается контраст модуляции (рис. 2, b', c').

Система уравнений (6) по аналогии с анализом устойчивости, проведенным в [8], может быть линеаризована вблизи стационарных значений R_S, S_S , а также величины, определяющей равновесное значение разности фаз:

$$\sin \varphi_S = \left(\gamma - 2 \frac{\beta}{\tau_R T} \right) \left(\frac{1}{\tau_R} - \frac{1}{T} \right)^{-1}$$

(поскольку $n_S = -1$). Инкремент затухания в случае $\tau_R < T$ принимает комплексный характер. Его мнимая часть, выражающая частоту нутационных колебаний в линейном приближении, определяется следующим соотношением:

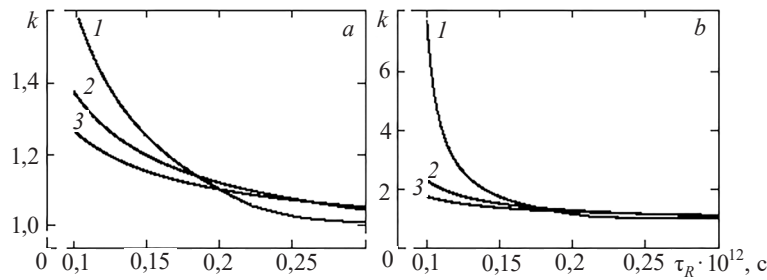


Рис. 3. Зависимость относительной частоты нутационных осцилляций в линейном приближении от параметра τ_R : $\beta\gamma = 0,1$ (a), $0,2$ (b); $T = 1,0 \cdot 10^{-12}$ с (кривая 1), $2,0 \cdot 10^{-12}$ с (2), $3,0 \cdot 10^{-12}$ с (3)

Fig. 3. Dependence of the relative frequency of nutation oscillations in the linear approximation on the parameter τ_R : $\beta\gamma = 0.1$ (a), 0.2 (b); $T = 1.0 \cdot 10^{-12}$ s (curve 1), $2.0 \cdot 10^{-12}$ s (2), $3.0 \cdot 10^{-12}$ s (3)

$$\Omega = \frac{1}{2} \left[\frac{4}{(1 - 2\beta\gamma)^2 \tau_R T} \cos^2 \varphi_S - \frac{1}{T^2} \right]^{1/2}. \tag{8}$$

На рис. 3 приведены рассчитанные на основе (8) зависимости относительного изменения нутационной частоты $k = \Omega / \Omega_0$ (Ω_0 – частота при отсутствии фазовой нелинейности) от характерного времени СИ τ_R для различных сочетаний параметра нелинейности $\beta\gamma$ и параметра T , характеризующего длину резонатора.

Ход кривых $k(\tau_R)$ подтверждает один из основных выводов, который можно сделать на основе анализа результатов моделирования. С ростом различия времени релаксации поля излучения в резонаторе и характерного времени СИ критичность нутационной структуры СИ по отношению к фазовой нелинейности, порождаемой резонансными механизмами материального отклика усиливающего элемента, должна резко возрастать.

Уравнение динамики полярного угла вектора Блоха. Задача оценки изменений в эволюции СИ может быть рассмотрена в большем приближении с применением традиционного представления величины полярного угла вектора Блоха. Для этого следует предположить относительно небольшие значения фактора $\beta\gamma$ и незначительные колебания величины разности фаз φ в соотношениях (6). Аппроксимация тригонометрических функций $\theta_0(t)$, содержащихся в (6), приводит к следующим выражениям для переменных:

$$R(t) = \frac{(1 - \beta\gamma) \sin \theta_0}{1 + \beta\gamma(\cos \theta_0 - 1)}, \quad n(t) = 1 + \frac{1 - 2\beta\gamma}{1 + \beta\gamma(\cos \theta_0 - 1)} (\cos \theta_0 - 1), \tag{9}$$

$$\theta_0(t) = \frac{1}{(1 - \beta\gamma)T} \int_{-\infty}^t S(t) dt,$$

в которых величина полярного угла $\theta_0(t)$ определяется только «площадью» импульса нормированной напряженности поля. Соответствующая замена переменных в уравнении для напряженности поля в системе уравнений (7) приводит к соотношению для нелинейного осциллятора $\theta_0(t)$:

$$\frac{d^2 \theta_0}{dt^2} + \frac{1}{T} \frac{d \theta_0}{dt} = \frac{1}{\tau_R T} \frac{\sin \theta_0}{1 + 2\beta\gamma(1 - \beta\gamma)(\cos \theta_0 - 1)}. \tag{10}$$

Полученное соотношение представляет собой нелинейный аналог уравнения синус-Гордона и с учетом определения $\theta_0(t)$ в схеме (9) является замкнутой динамической моделью.

Численное интегрирование схемы (9), (10) также дает возможность расчета в определенном приближении разверток интенсивности СИ и временной динамики переменных, определяющих отклик среды. Варианты расчета эволюции СИ для нормированной интенсивности $I_n(t) = S^2(t)$ при соответствующей модификации указанных выше начальных условий для уравнения (10) приведены на рис. 4.

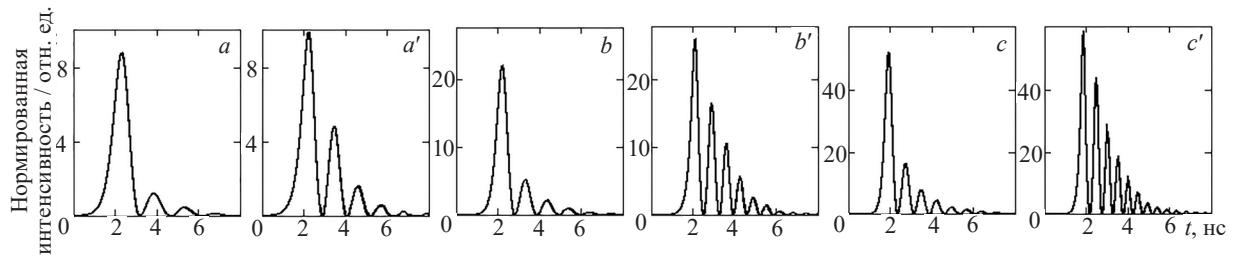


Рис. 4. Временная структура сверхизлучения, рассчитанная по схеме (10): $\tau_R = 2 \cdot 10^{-13}$ с (a, a'), $1 \cdot 10^{-13}$ с (b, b'), $0,5 \cdot 10^{-13}$ с (c, c'); $T = 1 \cdot 10^{-12}$ с; $\beta\gamma = 0$ ($a-c$), $0,1$ ($a'-c'$)

Fig. 4. Temporal structure of the superradiance calculated using scheme (10): $\tau_R = 2 \cdot 10^{-13}$ s (a, a'), $1 \cdot 10^{-13}$ s (b, b'), $0,5 \cdot 10^{-13}$ s (c, c'); $T = 1 \cdot 10^{-12}$ s; $\beta\gamma = 0$ ($a-c$), $0,1$ ($a'-c'$)

Временная картина изучаемого процесса, иллюстрируемая рис. 4, отражает ту же особенность развития сверхизлучения в условиях резонансной нелинейности (рис. 4, $a'-c'$), т. е. увеличение частоты оптической нутации по отношению к «классическому» варианту развития процесса (рис. 4, $a-c$). Нутационная структура нормированной интенсивности СИ в этом случае носит выраженно контрастный характер, характерный для осцилляторного уравнения.

Заключение. На основе модификаций известного подхода к анализу резонансного взаимодействия излучения с активным веществом, происходящего в сверхбыстром режиме, изучены закономерности протекания когерентного эффекта сверхизлучения в лазерном резонаторе. В одночастотном приближении учитывалась возможность влияния безынерционной по отношению к вариациям инверсной заселенности нелинейности материального отклика активного элемента в схеме резонатора на временную структуру излучаемого светового поля. Основным следствием взаимосвязанных механизмов нелинейности является самоиндуцированная фазовая неустойчивость в процессе энергообмена поля с инвертированной средой, эффективная в условиях относительно высокой плотности активных центров (диполь-дипольное взаимодействие) и поглощения в переходах, близких к основному (резонансная нелинейная рефракция).

Моделирование процесса СИ в резонаторе выполнено на основе нескольких приближений предложенной модели, представленных системами кинетических уравнений для переменных поля и отклика среды, а также осцилляторным уравнением, полученным в схеме формализма вектора Блоха. Анализ указывает на высокую критичность структуры СИ по отношению к резонансной нелинейности материального отклика. Расчетные оценки проведены для параметров компактных лазеров на полупроводниковых квантовых точках, в которых рассматриваемые механизмы фазовой нелинейности признаны особо значимыми. В рамках формализма вектора Блоха получены уточненные решения системы нелинейных уравнений для вероятностных переменных отклика среды, применимые для произвольного временного профиля формируемого в резонаторе поля. Качественный анализ устойчивости равновесных состояний системы позволил сформулировать выражения для частоты нутационных осцилляций с учетом факторов фазовой неустойчивости в линейном приближении. Результаты анализа особенностей динамики СИ в резонаторе будут полезны для целей оптимизации компактных импульсных источников когерентного излучения, используемых, например, в устройствах нанопотоники, в отношении профилирования высвечиваемых импульсов, управления характеристиками временной структурой излучения.

Благодарности. Работа выполнена в рамках Государственной программы научных исследований Республики Беларусь «Фотоника и электроника для инноваций», подпрограмма «Фотоника и ее применение».

Конфликт интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Acknowledgments. The work was supported by the State Scientific Research Program of the Republic of Belarus “Photonics and Electronics for Innovation”, subprogramme “Photonics and its Applications”.

Conflict of interest. The authors declare no conflict of interest.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Васильев, П. П. Фемтосекундное сверхизлучение в полупроводниковых лазерах: аномальная внутренняя генерация второй гармоники / П. П. Васильев, А. Н. Путилин, А. Б. Сергеев // *Квантовая электроника*. – 2016. – Т. 46, № 10. – С. 888–890.
2. Существование когерентных импульсов сверхизлучательных и квазистационарных мод в лазере с низкодобротным резонатором / Е. Р. Кочаровская, А. В. Мишин, А. Ф. Селезнев [и др.] // *Известия высших учебных заведений. Радиофизика*. – 2020. – Т. 63, № 11. – С. 985–1007. https://doi.org/10.52452/00213462_2020_63_11_985
3. Сверхизлучение: принципы генерации и реализация в лазерах / В. В. Кочаровский, В. В. Железняков, Е. Р. Кочаровская, Вл. В. Кочаровский // *Успехи физических наук*. – 2017. – Т. 187, № 4. – С. 367–410. <https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.03.038098>
4. Апанасевич, П. А. Основы теории взаимодействия света с веществом / П. А. Апанасевич. – Мн., 1977. – 496 с.
5. Андреев, А. В. Кооперативные эффекты в оптике: Сверхизлучение. Бистабильность. Фазовые переходы / А. В. Андреев, В. И. Емельянов, Ю. А. Ильинский. – М., 1988. – 288 с.
6. Ханин, Я. И. Лекции по квантовой радиофизике / Я. И. Ханин. – Н. Новгород, 2005. – 223 с.
7. Wilson, R. M. Half of Nobel prize in physics honors the inventors of chirped pulse amplification / R. M. Wilson // *Physics Today*. – 2018. – Vol. 71, N 12. – P. 18–21. <https://doi.org/10.1063/pt.3.4086>
8. Динамика сверхизлучающих сред в резонаторе / А. М. Башаров, Г. Г. Григорян, Н. В. Знаменский [и др.] // *Квантовая электроника*. – 2009. – Т. 39, № 3. – С. 251–255.
9. Формирование сверхизлучения в наногетероструктурах с квантовыми точками / А. В. Савельев, Л. Я. Карачинский, И. И. Новиков [и др.] // *Физика и техника полупроводников*. – 2008. – Т. 42, № 6. – С. 730–735.
10. Light emitting devices based on quantum well-dots / M. V. Maximov, A. M. Nadochiy, S. A. Mintairov [et al.] // *Applied Sciences*. – 2020. – Vol. 10, N 3. – Art. 1038. <https://doi.org/10.3390/app10031038>
11. Fast switching between the ground- and excited-state lasing in a quantum-dot microdisk triggered by sub-ps pulses / A. Zhukov, A. Nadochiy, A. Karaborchev [et al.] // *Optics Letters*. – 2024. – Vol. 49, N 2. – P. 330–333. <https://doi.org/10.1364/OL.509297>
12. Quantum-dot supercrystals for future nanophotonics / A. S. Baimuratov, I. D. Rukhlenko, V. K. Turkov [et al.] // *Scientific Reports*. – 2013. – Vol. 3. – Art. 1727. <https://doi.org/10.1038/srep01727>
13. Henry, C. H. Theory of the linewidth of semiconductor lasers / C. H. Henry // *IEEE Journal of Quantum Electronics*. – 1982. – Vol. 18, N 2. – P. 259–264. <https://doi.org/10.1109/JQE.1982.1071522>
14. Timoshchenko, E. V. On solving the problem of quasi-two-dimensional supercrystal nonlinear resonance response / E. V. Timoshchenko, V. A. Yurevich // *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. – 2021. – Vol. 163, N 1. – P. 21–30. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2021.1.21-30>
15. Тимошенко, Е. В. Резонансное отражение импульса метаповерхностью из квантовых точек в режиме когерентного взаимодействия / Е. В. Тимошенко // *Вестник Гродзенскага дзяржаўнага ўніверсітэта імя Янкі Купалы. Серыя 2. Матэматыка. Фізіка. Інфарматыка, вылічальная тэхніка і кіраванне*. – 2022. – Т. 12, № 1. – С. 67–75.

References

1. Vasil'ev P. P., Putilin A. N., Sergeev A. B. Femtosecond superradiance in semiconductor lasers: anomalous internal second-harmonic generation. *Quantum Electronics*, 2016, vol. 46, no. 10, pp. 888–890. <https://doi.org/10.1070/qel16197>
2. Kocharovskaya E. R., Mishin A. V., Seleznev A. F., Kocharovskiy V. V., Kocharovskiy V. V. Coexistence of coherent pulses formed by superradiant and quasistationary modes in a laser with low-q cavity. *Radiophysics and Quantum Electronics*, 2020, vol. 63, no. 11, pp. 887–907. <https://doi.org/10.1007/s11141-021-10102-x>
3. Kocharovskiy V. V., Zheleznyakov V. V., Kocharovskaya E. R., Kocharovskiy V. V. Superradiance: the principles of generation and implementation in lasers. *Physics-Uspokhi*, 2017, vol. 60, pp. 345–384. <https://doi.org/10.3367/ufne.2017.03.038098>
4. Apanasevich P. A. *Fundamentals of the Theory of Interaction of Light with Matter*. Minsk, 1977. 496 p. (in Russian).
5. Andreev A. V., Emel'yanov V. I., Il'inskii Yu. A. *Cooperative Effects in Optics: Superradiance. Bistability. Phase Transitions*. Moscow, 1988. 288 p. (in Russian).
6. Khanin Ya. I. *Lectures on Quantum Radiophysics*. Nizhny Novgorod, 2005. 223 p. (in Russian).
7. Wilson R. M. Half of Nobel prize in physics honors the inventors of chirped pulse amplification. *Physics Today*, 2018, vol. 71, no. 12, pp. 18–21. <https://doi.org/10.1063/pt.3.4086>
8. Basharov A. M., Grigoryan G. G., Znamenskiy N. V., Orlov Yu. V., Shashkov A. Yu., Yutkina T. G. Dynamics of superradiant media in a resonator. *Quantum Electronics*, 2009, vol. 39, no. 3, pp. 251–255. <https://doi.org/10.1070/qe2009v039n03abeh013463>
9. Savelyev A. V., Karachinsky L. Ya., Novikov I. I., Gordeev N. Yu., Seisyan R. P., Zegrya G. G. Generation of superradiation in quantum dot nanoheterostructures. *Semiconductors*, 2008, vol. 42, no. 6, pp. 714–719. <https://doi.org/10.1134/s1063782608060134>
10. Maximov M. V., Nadochiy A. M., Mintairov S. A., Kalyuzhnyy N. A., Kryzhanovskaya N. V., Moiseev E. I., Gordeev N. Yu., Shernyakov Yu. M., Payusov A. S., Zubov F. I., Nevedomskiy V. N., Rouvimov S. S., Zhukov A. E. Light emitting devices based on quantum well-dots. *Applied Sciences*, 2020, vol. 10, no. 3, art. 1038. <https://doi.org/10.3390/app10031038>

11. Zhukov A., Nadtochiy A., Karaborchev A., Fominykh N., Makhov I., Ivanov K., Guseva Yu., Kulagina M., Blokhin S., Kryzhanovskaya N. Fast switching between the ground- and excited-state lasing in a quantum-dot microdisk triggered by sub-ps pulses. *Optics Letters*, 2024, vol. 49, no. 2, pp. 330–333. <https://doi.org/10.1364/OL.509297>
12. Baimuratov A. S., Rukhlenko I. D., Turkov V. K., Baranov A. V., Fedorov A. V. Quantum-dot supercrystals for future nanophotonics. *Scientific Reports*, 2013, vol. 3, art. 1727. <https://doi.org/10.1038/srep01727>
13. Henry C. H. Theory of the linewidth of semiconductor lasers. *IEEE Journal of Quantum Electronics*, 1982, vol. 18, no. 2, pp. 259–264. <https://doi.org/10.1109/JQE.1982.1071522>
14. Timoshchenko E. V., Yurevich V. A. On solving the problem of quasi-two-dimensional supercrystal nonlinear resonance response. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2021, vol. 163, no. 1, pp. 21–30. <https://doi.org/10.26907/2541-7746.2021.1.21-30>
15. Timoshchenko E. V. Resonant reflection of a pulse by a metasurface of quantum dots in coherent interaction mode. *Vesnik Grodzenskaga dzyarzhaj'naga ūniversiteta imya Yanki Kupaly. Seryya 2. Matematyka. Fizika. Infarmatyka, vylichal'naya tekhnika i kiravanne = Vesnik of Yanka Kupala State University of Grodno. Series 2. Mathematics. Physics. Informatics, Computer Technology and Control*, 2022, vol. 12, no. 1, pp. 67–75 (in Russian).

Информация об авторах

Тимощенко Елена Валерьевна – канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой. E-mail: evtima@gmail.com. ORCID: 0000-0003-1373-5113.

Юревич Владимир Антонович – д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: va_yurevich@mail.ru.

Information about the authors

Timoshchenko Elena V. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Head of the Department. E-mail: evtima@gmail.com. ORCID: 0000-0003-1373-5113.

Yurevich Vladimir A. – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. E-mail: va_yurevich@mail.ru.