

ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 519.2
<https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-3-191-200>

Поступило в редакцию 15.04.2026
Received 15.04.2026

Академик Ю. С. Харин

*Научно-исследовательский институт прикладных проблем математики
и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Республика Беларусь
пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь*

НЕОДНОРОДНЫЕ ЦЕПИ МАРКОВА ВЫСОКОГО ПОРЯДКА: МОДЕЛИ И ИХ ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Аннотация. Сообщение посвящено развитию теории вероятностно-статистического анализа неоднородных цепей Маркова высокого порядка, для которых матрица вероятностей одношаговых переходов допускает изменение во времени. Построены модели детерминировано-неоднородных и стохастически-неоднородных цепей Маркова высокого порядка, исследованы их вероятностные свойства и предложены подходы к статистическому оцениванию параметров этих моделей.

Ключевые слова: цепь Маркова, неоднородность, скрытая цепь, двойная цепь, статистическое оценивание

Для цитирования. Харин, Ю. С. Неоднородные цепи Маркова высокого порядка: модели и их вероятностно-статистический анализ / Ю. С. Харин // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2026. – Т. 70, № 3. – С. 191–200. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-3-191-200>

Academician Yuriy S. Kharin

*Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University,
Minsk, Republic of Belarus
4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus*

NON-HOMOGENEOUS HIGH-ORDER MARKOV CHAINS: MODELS AND THEIR PROBABILISTIC-STATISTICAL ANALYSIS

Abstract. The paper is devoted to the development of probabilistic and statistical analysis of non-homogeneous high-order Markov chains for cases in which the matrix of one-step transition probabilities is time-varying. Models for deterministically non-homogeneous and stochastically non-homogeneous high-order Markov chains are constructed. Probabilistic properties of these models are analyzed and some approaches to statistical estimation of the model parameters are proposed.

Keywords: Markov chain, non-homogeneity, Hidden chain, Double Markov chain, statistical estimation

For citation. Kharin Yu. S. Non-homogeneous high-order Markov chains: models and their probabilistic-statistical analysis. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2026, vol. 70, no. 3, pp. 191–200. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-3-191-200>

Введение. Вероятностно-статистический анализ временных рядов глубоко развит для «непрерывных данных», когда пространство наблюдения A является подмножеством евклидова пространства с ненулевой мерой Лебега: $A \subseteq R^m$, $\text{mes}(A) > 0$. На практике, однако, из-за цифровизации экономики и общества приходится иметь дело с дискретными временными рядами $x_t \in A$, когда дискретно не только время $t \in Z = \{\dots, -1, 0, +1, \dots\}$, но и пространство наблюдения A ; $N = |A|$ – число различных значений наблюдения, $2 \leq N \leq +\infty$ [1; 2].

Универсальной моделью дискретного временного ряда является однородная цепь Маркова (ОЦМ(s)) достаточно высокого порядка $s \in N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$, характеризующаяся $(s + 1)$ -мерной матрицей вероятностей одношаговых переходов $P = (p_{i_1, \dots, i_s, i_{s+1}})$:

$$p_{i_1, \dots, i_s, i_{s+1}} = P\{x_{t+1} = i_{s+1} \mid x_t = i_s, \dots, x_{t-s+1} = i_1\}, i_1, \dots, i_{s+1} \in A.$$

Число параметров этой модели экспоненциально зависит от глубины памяти s : $D_{\text{ОЦМ}(s)} = N^s(N - 1)$, поэтому статистический анализ ОЦМ(s) имеет экспоненциальную сложность (по тре-

буемым объемом данных, памяти и времени вычислений). Предлагается [1] строить малопараметрические (parsimonious) модели с малым числом параметров $d \ll D_{\text{ОЦМ}(s)}$.

Разработаны следующие малопараметрические модели ОЦМ(s): модель Джекобса–Льюиса [3]; MTD-модель Рафтери [4]; цепь Маркова МС(s, r) порядка s с r частичными связями [5]; цепь Маркова условного порядка МССО(s, L) [6]; двоичная условно нелинейная авторегрессионная модель BCNAR(s) [7]; биномиальная условно нелинейная авторегрессионная модель [8]; семибиномиальная условно нелинейная авторегрессионная модель; нейросетевая модель [9]; модель на основе достаточных статистик [10].

В приложениях часто матрица вероятностей переходов P подвержена изменениям во времени t , поэтому актуальна проблема разработки и исследования моделей цепей Маркова высокого порядка, в том числе малопараметрических моделей, с изменяющейся матрицей P . К сожалению, в существующей литературе эта проблема исследована весьма слабо, особенно касательно статистического анализа [11; 12].

Детерминированно-неоднородные цепи Маркова высокого порядка. Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) определено бесконечное множество P цепей Маркова $x_t, t \in Z$, порядка $s \in N_0$, с пространством состояний A , каждая из которых характеризуется некоторой $(s + 1)$ -мерной матрицей вероятностей одношаговых переходов P :

$$P = \left(p_{I_1^s, i_{s+1}} \right) = \left(p_{I_1^{s+1}} \right), I_1^{s+1} = (i_1, \dots, i_{s+1}) \in A^{s+1},$$

$$P = \left\{ P : p_{I_1^{s+1}} \geq 0, \sum_{i_{s+1} \in A} p_{i_{s+1}} = 1 \forall I_1^s \in A^s \right\}. \quad (1)$$

Если матрица вероятностей одношаговых переходов P не зависит от времени $t \in Z$, то цепь Маркова называется однородной (ОЦМ(s)).

Пусть далее задана детерминированная матричнозначная функция

$$P = P^{(t)} = \left(p_{I_1^s, i_{s+1}}^{(t)} \right) : Z \rightarrow P, \quad (2)$$

ставящая в соответствие каждому дискретному моменту времени $t \in Z$ одну из возможных матриц переходов (1). Если мы наблюдаем процесс, начиная с некоторого момента $t = 0$, то с течением времени $t = 0, 1, \dots$ получаем траекторию в пространстве матриц P : $P^{(0)}, P^{(1)}, \dots, P^{(t)}, \dots \in P$. Тем самым согласно (2) определена *детерминированно-неоднородная цепь Маркова порядка s* (ДНЦМ(s)); при этом функцию (2) можно называть функцией тренда матрицы переходов и самой цепи Маркова.

Представим некоторые частные случаи ДНЦМ(s).

Рассмотрим двоичную ДНЦМ(s), когда пространство состояний A состоит из двух элементов: $A = \{0, 1\}$.

Пусть $P^{(0)} = \left(p_{I_1^s, i_{s+1}}^{(0)} \right)$ – некоторая начальная матрица, а функция тренда в (2) $P^{(t)} = \left(p_{I_1^s, i_{s+1}}^{(t)} \right)$ определяется следующим образом:

$$p_{I_1^s, i_{s+1}}^{(t)} = \begin{cases} p_{I_1^s, 0}^{(0)} + \varepsilon f_{I_1^s}(t), & \text{если } i_{s+1} = 0, \\ 1 - \left(p_{I_1^s, 0}^{(0)} + \varepsilon f_{I_1^s}(t) \right), & \text{если } i_{s+1} = 1, \end{cases} \quad (3)$$

где $f_{I_1^s}(t)$ – произвольная ограниченная функция дискретного времени $t \in Z$ и предыстории $I_1^s \in A^s$:

$$-p_{I_1^s, 0}^{(0)} < f_{I_1^s}(t) < 1 - p_{I_1^s, 0}^{(0)},$$

определяющая допустимое возмущение начальной матрицы $P^{(0)}$, а $\varepsilon \in [0, 1]$ – амплитуда возмущений. В частности, возможны гармонические возмущения с круговой частотой $\lambda \in [0, 2\pi]$ и периодом $\tau = 2\pi / \lambda$:

$$f_{I_1^s}(t) = \frac{1}{2} - p_{I_1^s, 0}^{(0)} + \frac{1}{2} \sin(\lambda t). \quad (4)$$

Отметим, что частота λ может зависеть от предыстории: $\lambda = \lambda(I_1^s)$, например: $\lambda = c \sum_{t=1}^s i_t$, где $c > 0$ – некоторая заданная константа. Модель неоднородности (3) назовем моделью аддитивных возмущений матрицы вероятностей одношаговых переходов, а ее частный случай (4) – моделью гармонических возмущений.

К модели (3) близка модель аддитивных искажений (возмущений) некоторой базовой фиксированной матрицы переходов $P^{(*)} = \left(p_{I_1^{s+1}}^{(*)} \right)$, задающей некоторую фиксированную (базовую) однородную цепь Маркова порядка s с матрицей вероятностей одношаговых переходов $P^{(*)}$:

$$\begin{aligned} P^{(t)} &= P^{(*)} + \varepsilon H^{(t)}, \quad H^{(t)} = \left(h_{I_1^{s+1}}^{(t)} \right), \quad \sum_{i_{s+1} \in A} h_{I_1^{s+1}}^{(t)} \equiv 0, \\ -p_{I_1^{s+1}}^{(*)} &\leq h_{I_1^{s+1}}^{(t)} \leq 1 - p_{I_1^{s+1}}^{(*)}, \quad I_1^{s+1} \in A^s, \quad 0 < \varepsilon < 1, \end{aligned}$$

где $H^{(t)}$ – матрица возмущений в момент времени t ; ε – амплитуда возмущений.

Определим еще одно семейство ДНЦМ(s). Пусть в пространстве матриц P зафиксированы лишь $2 \leq M < +\infty$ различных вариантов матрицы вероятностей одношаговых переходов:

$$P(1), P(2), \dots, P(M) \in P. \quad (5)$$

Пусть далее $M = \{1, 2, \dots, M\}$, $|M| = M$,

$$\xi_t : Z \rightarrow M \quad (6)$$

– некоторая заданная дискретная функция, каждому моменту времени $t \in Z$ ставящая в соответствие номер матрицы из подмножества (5). Модель ДНЦМ(s), в которой последовательность матриц (2) имеет вид

$$P^{(t)} = P(\xi_t), \quad t \in Z,$$

будем называть *неоднородной цепью Маркова с «разладками»*. Наиболее распространенными частными случаями этой модели являются случай $M = 2$ (дихотомическая «разладка»), когда в каждый момент времени t матрица переходов принимает одно из двух возможных значений: $P(1)$ или $P(2)$, и случай «периодической разладки», когда функция тренда (6) имеет некоторый период $T \geq 2$:

$$\xi_{t+T} = \xi_t, \quad t \in Z.$$

Стохастически-неоднородные цепи Маркова высокого порядка. Рассмотренные выше модели обладают неоднородностью, которая порождена детерминированной изменчивостью параметров (матрицы вероятностей одношаговых переходов), поэтому, используя современную терминологию теории случайных процессов, этот класс моделей можно назвать *цепями Маркова с детерминированной волатильностью* (от англ. volatility $\equiv$ изменчивость).

Как и в случае непрерывных случайных процессов, определим класс цепей Маркова порядка s со стохастической волатильностью (неоднородностью) – класс *стохастически-неоднородных цепей Маркова порядка s* (СНЦМ(s)) – следующим образом. Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) наряду с дискретным временным рядом $x_t \in A$, $|A| = N$, определена случайная последо-

вательность ξ_t с некоторым дискретным или непрерывным распределением вероятностей $p_{\xi_t}(\cdot)$. При условии, что фиксировано значение ξ_t , условное распределение x_t является марковским с матрицей вероятностей одношаговых переходов, зависящей от ξ_t : $P^{(t)} ::= P^{(\xi_t)}$. В рамках такой модели процесс x_t иногда называют управляемым марковским процессом [13], интерпретируя ξ_t как управляющий процесс.

В этом огромном классе моделей СНЦМ(s) остановимся на подклассе, определяемом ситуацией (5), (6), когда управляющий процесс $\xi_t \in M$ является однородной цепью Маркова некоторого порядка r с некоторой матрицей переходов Q . Такую *стохастически-неоднородную (волатильную) цепь Маркова* x_t будем обозначать СНЦМ(s, r). Исследуем вероятностные свойства СНЦМ(s, r). Для определенности, но без потерь общности, далее будем полагать, что $s \geq r$.

Т е о р е м а 1. *Вероятностной моделью определенной выше конструкции СНЦМ(s, r), $s \geq r$, является однородная двумерная цепь Маркова порядка s :*

$$y_t = \begin{pmatrix} \xi_t \\ x_t \end{pmatrix} \in M \times A, \quad t \in Z. \quad (7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используя определение СНЦМ(s, r) и свойство условной вероятности, проверим марковское свойство двумерной цепи (7):

$$\begin{aligned} & P \left\{ y_t = \begin{pmatrix} i_t \\ j_t \end{pmatrix} \middle| y_{t-1} = \begin{pmatrix} i_{t-1} \\ j_{t-1} \end{pmatrix}, \dots, y_{t-s} = \begin{pmatrix} i_{t-s} \\ j_{t-s} \end{pmatrix}, \dots \right\} =: \\ & =: P \{ \xi_t = i_t, x_t = j_t \mid C \} = P \{ \xi_t = i_t \mid C \} P \{ x_t = j_t \mid \xi_t = i_t, C \}, \end{aligned}$$

где

$$C = \left\{ y_{t-1} = \begin{pmatrix} i_{t-1} \\ j_{t-1} \end{pmatrix}, \dots, y_{t-s} = \begin{pmatrix} i_{t-s} \\ j_{t-s} \end{pmatrix}, \dots \right\}.$$

Далее в силу свойств модели получаем

$$\begin{aligned} & P \{ \xi_t = i_t \mid C \} = P \{ \xi_t = i_t \mid \xi_{t-1} = i_{t-1}, \dots, \xi_{t-r} = i_{t-r} \} = (Q)_{i_{t-r}, \dots, i_{t-1}, i_t}, \\ & P \{ x_t = j_t \mid \xi_t = i_t, C \} = P \{ x_t = j_t \mid \xi_t = i_t, x_{t-1} = j_{t-1}, \dots, x_{t-s} = j_{t-s} \} = (P^{(i_t)})_{j_{t-s}, \dots, j_{t-1}, j_t}, \quad (8) \\ & P \left\{ y_t = \begin{pmatrix} i_t \\ j_t \end{pmatrix} \middle| C \right\} = (Q)_{(i_{t-r}, \dots, i_{t-1}), i_t} (P^{(i_t)})_{(j_{t-s}, \dots, j_{t-1}), j_t}, \quad i_k \in M, j_k \in A. \end{aligned}$$

Аналогично находим

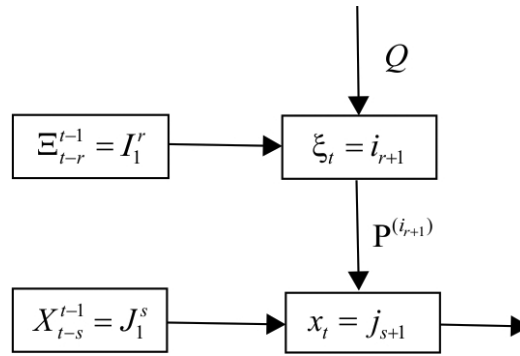
$$P \left\{ y_t = \begin{pmatrix} i_t \\ j_t \end{pmatrix} \middle| y_{t-1} = \begin{pmatrix} i_{t-1} \\ j_{t-1} \end{pmatrix}, \dots, y_{t-s} = \begin{pmatrix} i_{t-s} \\ j_{t-s} \end{pmatrix} \right\} = (Q)_{(i_{t-r}, \dots, i_{t-1}), i_t} (P^{(i_t)})_{(j_{t-s}, \dots, j_{t-1}), j_t}, \quad (9)$$

что совпадает с правой частью (8) и доказывает справедливость марковского свойства порядка s для двумерного случайного процесса (7). $\square$

С л е д с т в и е 1. $((MN)^s \times (MN))$ -мерная матрица вероятностей одношаговых переходов двумерной цепи Маркова (7) определяется (9).

С л е д с т в и е 2. Если матрицы $Q, P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(M)}$ не содержат нулевых элементов, то двумерная цепь Маркова (7) обладает эргодическим свойством, и для нее существует $(M^r N^s)$ -мерное стационарное распределение вероятностей:

$$P \{ \xi_{t-1} = i_1, \dots, \xi_{t-r} = i_r, x_{t-1} = j_1, \dots, x_{t-s} = j_s \} = \pi_{(i_1, \dots, i_r), (j_1, \dots, j_s)}. \quad (10)$$

Схема одного такта порождения СНЦМ(s, r)A scheme for one tact of NHMC(s, r) generation

Для нахождения многомерных распределений вероятностей марковского процесса (7) представим модель его порождения графически на рисунке.

Л е м м а 1. Если определена СНЦМ(s, r) (7), (8), то схема ее порождения (рисунок) определяет следующие рекуррентные соотношения для преобразования вероятностных распределений:

$$\mathbf{P}\{\Xi_{t-r}^t = I_1^{r+1}\} = \mathbf{P}\{\Xi_{t-r}^{t-1} = I_1^r\}(Q)_{I_1^r, i_{r+1}}, \quad t \in \mathbf{Z}, \quad I_1^{r+1} \in \mathbf{M}^{r+1}, \quad (11)$$

$$\mathbf{P}\{X_{t-s}^t = J_1^{s+1} | \Xi_{t-r}^t = I_1^{r+1}\} = \mathbf{P}\{X_{t-s}^{t-1} = J_1^s | \Xi_{t-r}^{t-1} = I_1^r\}(\mathbf{P}^{(i_{r+1})})_{J_1^s, j_{s+1}}, \quad J_1^{s+1} \in A^{s+1}, \quad (12)$$

$$\mathbf{P}\{X_{t-s}^t = J_1^{s+1}, \Xi_{t-r}^t = I_1^{r+1}\} = \mathbf{P}\{X_{t-s}^{t-1} = J_1^s, \Xi_{t-r}^{t-1} = I_1^r\}(\mathbf{P}^{(i_{r+1})})_{J_1^s, j_{s+1}}(Q)_{I_1^r, i_{r+1}}. \quad (13)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соотношение (11) непосредственно следует из свойства марковости первой компоненты ξ_t двумерного процесса (7). Условное распределение вероятностей (12) следует из цепочки равенств, вытекающих из условного марковского свойства процесса x_t и из схемы порождения СНЦМ(s, r) на рисунке:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X_{t-s}^t = J_1^{s+1} | \Xi_{t-r}^t = I_1^{r+1}\} &= \mathbf{P}\{X_{t-s}^{t-1} = J_1^s, x_t = j_{s+1} | \Xi_{t-r}^{t-1} = I_1^r, \xi_t = i_{r+1}\} = \\ &= \mathbf{P}\{X_{t-s}^{t-1} = J_1^s | \Xi_{t-r}^{t-1} = I_1^r, \xi_t = i_{r+1}\} \mathbf{P}\{x_t = j_{s+1} | X_{t-s}^{t-1} = J_1^s, \Xi_{t-r}^{t-1} = I_1^r, \xi_t = i_{r+1}\} = \\ &= \mathbf{P}\{X_{t-s}^{t-1} = J_1^s | \Xi_{t-r}^{t-1} = I_1^r\} \mathbf{P}\{x_t = j_{s+1} | X_{t-s}^{t-1} = J_1^s, \xi_t = i_{r+1}\} = \\ &= \mathbf{P}\{X_{t-s}^{t-1} = J_1^s | \Xi_{t-r}^{t-1} = I_1^r\}(\mathbf{P}^{(i_{r+1})})_{J_1^s, j_{s+1}}, \quad t \in \mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Соотношение (13) получается почленным перемножением (11) и (12). $\square$

Т е о р е м а 2. Справедливы следующие распределения вероятностей случайных последовательностей ξ_t, x_p, y_t на интервале $[0, t]$:

$$\mathbf{P}\{\Xi_0^t = I_0^t\} = \mathbf{P}\{\Xi_0^{r-1} = I_0^{r-1}\} \prod_{k=r}^t (Q)_{I_{k-r}^{k-1}, i_k}, \quad t = r, r+1, \dots; \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X_0^t = J_0^t, \Xi_0^t = I_0^t\} &= \mathbf{P}\{\Xi_0^{s-1} = I_0^{s-1}, X_0^{s-1} = J_0^{s-1}\} \times \\ &\times \prod_{k=s}^t (\mathbf{P}^{(i_k)})_{J_{k-s}^{k-1}, j_k} (Q)_{I_{k-r}^{k-1}, i_k}, \quad t = s, s+1, \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Соотношения (14), (15) получаются на основе рекурсий (11), (13) из Леммы 1. $\square$

С л е д с т в и е 3. Если матрицы $Q, \mathbf{P}^{(1)}, \mathbf{P}^{(2)}, \dots, \mathbf{P}^{(M)}$ не содержат нулевых элементов, то безусловное распределение вероятностей X_0^t имеет вид $(J_0^t \in A^{t+1})$:

$$\mathbf{P}\{X_0^t = J_0^t\} = \sum_{I_{s-r}^t \in \mathbf{M}^{t-(s-r)+1}} \pi_{I_{s-r}^{s-1}, J_0^{s-1}} \left(\prod_{k=s}^t (\mathbf{P}^{(ik)})_{J_{k-s}^{k-1}, j_k} (\mathbf{Q})_{I_{k-r}^{k-1}, i_k} \right). \quad (16)$$

Доказательство. Соотношение (16) получается по свойству маргинального распределения при суммировании соотношения (15) по $I_0^t \in \mathbf{M}^{t+1}$ с учетом стационарного распределения (10). $\square$

Из (16) видно, что в общем случае наблюдаемая случайная последовательность x_t не обладает марковским свойством. Интересно отметить, что тем не менее ξ_t – марковский процесс, и согласно теореме 1 составной процесс $y_t = (\xi_t, x_t)'$ является двумерным марковским процессом.

Касаясь терминологии, отметим еще, что модель СНЦМ(s, r) при $s = 0$ (схема независимых испытаний) и $r = 1$ часто называется *скрытой марковской моделью* (HMM – Hidden Markov Model) [14], а при $s \geq 1, r = 1$ – *двойной цепью Маркова* (DMCM – Double Markov Chain Model) [15].

Теорема 3. Пусть $\tau \geq s \geq r$ – некоторое заданное натуральное число и матрицы $\mathbf{Q}, \mathbf{P}^{(1)}, \mathbf{P}^{(2)}, \dots, \mathbf{P}^{(M)}$ не содержат нулевых элементов. Тогда $(\tau + 1)$ -мерное распределение вероятностей фрагмента $x_a, x_{a+1}, \dots, x_{a+\tau} \in A$ наблюдаемой последовательности не зависит от $a \in \mathbf{Z}$ и имеет вид

$$p_{J_0^\tau} ::= \mathbf{P}\{X_a^{a+\tau} = J_0^\tau\} = \sum_{I_{s-r}^\tau \in \mathbf{M}^{\tau-(s-r)+1}} \pi_{I_{s-r}^{s-1}, J_0^{s-1}} \left(\prod_{k=s}^\tau (\mathbf{Q})_{I_{k-r}^{k-1}, i_k} (\mathbf{P}^{(ik)})_{J_{k-s}^{k-1}, j_k} \right), \quad (17)$$

где $\pi_{I, J}, I \in \mathbf{M}^r, J \in A^s$, – стационарное распределение вероятностей (10).

Доказательство. Во-первых, в условиях теоремы двумерная последовательность $(\xi_t, x_t)' \in \mathbf{M} \times A$ является эргодической цепью Маркова с $(M^r \times N^s)$ -мерным стационарным распределением (10). Отсюда следует, что этот составной процесс $(\xi_t, x_t)'$ является стационарным в узком смысле. Последовательность $x_t \in A$ – его вторая компонента, т. е. функция (не зависящая от времени $t \in \mathbf{Z}$) от этого составного процесса, и поэтому тоже является стационарным в узком смысле процессом с распределением вероятностей, не зависящим от сдвига времени $a \in \mathbf{Z}$.

Во-вторых, соотношение (17) получается из (16) при $\tau ::= t$ и сдвиге начала отсчета времени на величину a . $\square$

Следствие 4. Если $s = r = 1$ в условиях теоремы 3 и рассматривается модель СНЦМ(1, 1), то $\forall a \in \mathbf{Z}$ фрагмент $x_a, x_{a+1}, \dots, x_{a+\tau} \in A$ имеет $(\tau + 1)$ -мерное распределение вероятностей ($\tau \in \mathbf{N}$):

$$p_{J_0^\tau} = \sum_{I_0^\tau \in \mathbf{M}^{\tau+1}} \pi_{i_0, j_0} \prod_{k=1}^\tau (\mathbf{Q})_{i_{k-1}, i_k} (\mathbf{P}^{(ik)})_{j_{k-1}, j_k}, \quad J_0^\tau \in A^{\tau+1},$$

где $\pi_{i, j}, i \in \mathbf{M}, j \in A$, – двумерное стационарное распределение вероятностей процесса (10).

Подходы к статистическому оцениванию параметров неоднородных цепей Маркова высокого порядка. Проиллюстрируем подходы к статистическому оцениванию для рассмотренного в разделе 2 семейства моделей СНЦМ(s, r) с параметрами $\mathbf{Q}, \mathbf{P}^{(1)}, \dots, \mathbf{P}^{(M)}$.

Пусть наблюдается последовательность $x_0, x_1, \dots, x_T \in A$, определяемая моделью СНЦМ(s, r) при $s \geq r$ и $\mathbf{M} = \{1, 2, \dots, M\}$.

Применение подхода на основе максимизации функции правдоподобия.

Лемма 2. Если матрицы $\mathbf{Q}, \mathbf{P}^{(1)}, \dots, \mathbf{P}^{(M)}$ не содержат нулевых элементов, то функция правдоподобия для $T + 1$ наблюдений $x_0, x_1, \dots, x_T \in A$ имеет вид

$$L(\mathbf{Q}, \mathbf{P}^{(1)}, \dots, \mathbf{P}^{(M)}, \pi) = \sum_{I_{s-r}^T \in \mathbf{M}^{T-(s-r)+1}} \pi_{I_{s-r}^{s-1}, X_0^{s-1}} \left(\prod_{k=s}^T (\mathbf{Q})_{I_{k-r}^{k-1}, i_k} (\mathbf{P}^{(ik)})_{X_{k-s}^{k-1}, x_k} \right). \quad (18)$$

Доказательство. Достаточно воспользоваться следствием 3 при $T ::= t$. $\square$

По построению модели СНЦМ(s, r) число независимых параметров (аргументов функции правдоподобия) (18) равно

$$D(s, r, M, N) = (N^s M^r - 1) + M^r (M - 1) + MN^s (N - 1) = O(M^r N^s). \quad (19)$$

Оценки максимального правдоподобия этих параметров $\hat{Q}, \hat{P}^{(1)}, \dots, \hat{P}^{(M)}, \hat{\pi}$ определяются по критерию максимума функции правдоподобия (18):

$$L(Q, P^{(1)}, \dots, P^{(M)}, \pi) \rightarrow \max. \quad (20)$$

Экстремальная задача (18), (20) имеет согласно (19) полиномиальную сложность по числу матриц M и мощности пространства состояний, а также экспоненциальную сложность $O(M^T)$ относительно длительности наблюдаемого ряда T . Действительно, как видно из (18), значение функции правдоподобия есть сумма $M^{T-(s-r)+1}$ слагаемых, каждое из которых есть произведение T различных элементов матриц Q и $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(M)}$.

Для численного решения этой экстремальной задачи предлагается использовать систему из трех итерационных процедур [15]:

1) для вычисления функции правдоподобия – метод «forward-backward» на основе динамического программирования;

2) для вычисления локального максимума в (20) – ЕМ-алгоритм, известный как алгоритм Baum–Welch;

3) для оценивания скрытой последовательности $\{\xi_t\}$ рекомендуется использовать итерационную процедуру – алгоритм Viterbi.

Из-за локальности найденного максимума в (20) рекомендуется повторять эту систему вычислений с другими начальными значениями параметров многократно.

Подход на основе многомерных частот фрагментов наблюдаемого временного ряда. В наблюдаемом случайном временном ряду $X_0^T \in A^{T+1}$ длительности $T + 1$ рассмотрим фрагмент $m + 1$ последовательных элементов из X_0^T :

$$X_a^{a+m} = (x_a, x_{a+1}, \dots, x_{a+m}) \in A^{m+1}$$

для некоторых заданных чисел $s < m < T, 0 \leq a \leq T - m$. Согласно теореме 3 распределение вероятностей этого случайного фрагмента полностью определяется набором N^{m+1} вероятностей, задаваемых формулой (17):

$$\begin{aligned} p_{J_0^m} &= p_{J_0^m}(\pi, Q, P^{(1)}, \dots, P^{(M)}) :: = \mathbf{P}\{X_a^{a+m} = J_0^m\} = \\ &= \sum_{I_{s-r}^m \in M^{m-(s-r)+1}} \left(\prod_{k=s}^m (Q)_{I_{k-r}^{k-1}, i_k} (P^{(i_k)})_{J_{k-s}^{k-1}, j_k} \right), J_0^m \in A^{m+1}. \end{aligned} \quad (21)$$

Распределение вероятностей (21) зависит от следующих параметров: вектора стационарных вероятностей π с $(M^r N^s - 1)$ -независимыми компонентами; матрицы Q с $M^r(M - 1)$ -независимыми компонентами; матриц $P^{(1)}, \dots, P^{(M)}$, каждая из которых содержит $N^s(N - 1)$ -независимых компонент. Общее число независимых параметров распределения вероятностей (21) определено в (19).

Выберем размер фрагмента $m \in N$ так, чтобы число вероятностей в (21) превышало число параметров этого распределения:

$$N^{m+1} - 1 > D(s, r, M, N),$$

что приводит к неравенству

$$m > m_- :: = \frac{\ln(1 + D(s, r, M, N))}{\ln N} - 1.$$

Развивая идею FBE-оценки [7], построим по X_0^T статистическую оценку для распределения $\{p_{J_0^m}\}$, предполагая для простоты, что длина ряда X_0^T кратна длине фрагмента $T + 1 = K(m + 1)$, где K – некоторое натуральное число:

$$\hat{p}_{J_0^m} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{1} \left\{ X_{(k-1)(m+1)}^{k(m+1)-1} = J_0^m \right\}, J_0^m \in A^{m+1}, \quad (22)$$

где $\mathbf{1}\{B\}$ – индикаторная функция события B .

В силу свойства стационарности процесса x_t в узком смысле, следующего из теоремы 3, эта оценка состоятельна

$$\hat{p}_{J_0^m} \xrightarrow[T \rightarrow +\infty]{\mathbf{P}} p_{J_0^m}, J_0^m \in A^{m+1}.$$

С целью упрощения выражения (21) введем обозначения (вспомогательные параметры):

$$w_{I_{k-r}^k, J_{k-s}^k} ::= (Q)_{I_{k-r}^{k-1}, i_k} (P^{(i_k)})_{J_{k-s}^{k-1}, j_k}, k = s, \dots, m; I_{k-r}^k \in \mathbf{M}^{r+1}, J_{k-s}^k \in A^{s+1}. \quad (23)$$

Тогда распределение вероятностей (21) примет вид

$$p_{J_0^m} = p_{J_0^m}(\pi, Q, P^{(1)}, \dots, P^{(M)}) = \sum_{I_{s-r}^m \in \mathbf{M}^{m-(s-r)+1}} \pi_{I_{s-r}^{s-1}, J_0^{s-1}} \prod_{k=s}^m w_{I_{k-r}^k, J_{k-s}^k}. \quad (24)$$

От вспомогательных параметров (23) можно вернуться к исходным параметрам $Q, P^{(1)}, \dots, P^{(M)}$ с помощью следующих соотношений, вытекающих из условия нормировки:

$$\begin{aligned} \sum_{j_k \in A} w_{I_{k-r}^k, J_{k-s}^k} &\equiv (Q)_{I_{k-r}^{k-1}, i_k}, I_{k-r}^k \in \mathbf{M}^{r+1}, \\ (P^{(i_k)})_{J_{k-s}^{k-1}, j_k} &= \frac{w_{I_{k-r}^k, J_{k-s}^k}}{\sum_{j_k \in A} w_{I_{k-r}^k, J_{k-s}^k}}, J_{k-s}^k \in A^{s+1}. \end{aligned}$$

Имея целью приближение теоретического распределения вероятностей (24) к частотному распределению (22), введем квадратичную функцию потерь

$$W(\pi, Q, P^{(1)}, \dots, P^{(M)}) ::= \sum_{J_0^m \in A^{m+1}} \left(p_{J_0^m}(\pi, Q, P^{(1)}, \dots, P^{(M)}) - \hat{p}_{J_0^m} \right)^2 \geq 0. \quad (25)$$

Тогда FBE-оценки параметров $\hat{\pi}, \hat{Q}, \hat{P}^{(1)}, \dots, \hat{P}^{(M)}$ находятся из условия минимума функции потерь (24), (25):

$$W(\pi, Q, P^{(1)}, \dots, P^{(M)}) \rightarrow \min.$$

Вычислительная сложность этой экстремальной задачи по сравнению с (20) снижается и имеет порядок $O(TM^m)$.

Выводы. Получены следующие основные результаты:

1. Построены два семейства неоднородных цепей Маркова порядка s : детерминированно-неоднородные и стохастически-неоднородные.
2. Для каждого из указанных семейств построены вероятностные модели.
3. Для модели стохастически-неоднородной цепи Маркова СНЦМ(s, r) получены явные выражения многомерных распределений вероятностей.
4. Предложено развитие FBE-подхода для статистического оценивания параметров модели СНЦМ(s, r).

Благодарности. Данные исследования частично поддержаны финансированием по ГП «Конвергенция–2030».

Acknowledgements. This research is partially financially supported by the project on GP “Convergence–2030”.

Список использованных источников

1. Kharin, Yu. *Robustness in Statistical Forecasting* / Yu. Kharin. – Heidelberg, New York, Dordrecht, London, 2013. – 356 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-00840-0>
2. Weiss, C. *An Introduction to Discrete-Valued Time Series* / C. Weiss. – New York, 2018. – 480 p. <https://doi.org/10.1002/9781119097013>
3. Jacobs, P. A. Discrete time series generated by mixtures. I: correlation and runs properties / P. A. Jacobs, P. A. W. Lewis // *Journal of the Royal Statistical Society. Series B: Statistical Methodology*. – 1978. – Vol. 40, N 1. – P. 94–105. <https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1978.tb01653.x>
4. Raftery, A. E. A model for high-order Markov chains / A. E. Raftery // *Journal of the Royal Statistical Society. Series B: Statistical Methodology*. – 1985. – Vol. 47, N 3. – P. 528–539. <https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1985.tb01383.x>
5. Харин, Ю. С. Цепи Маркова с r -частичными связями и их статистическое оценивание / Ю. С. Харин // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2004. – Т. 48, № 1. – С. 40–44.
6. Kharin, Yu. Markov chain of conditional order: properties and statistical analysis / Yu. Kharin, M. Maltso // *Austrian Journal of Statistics*. – 2014. – Vol. 43, N 3. – P. 205–216. <https://doi.org/10.17713/ajs.v43i3.32>
7. Kharin, Yu. S. Statistical estimation of parameters for binary conditionally nonlinear autoregressive time series / Yu. S. Kharin, V. A. Voloshko, E. A. Medved // *Mathematical Methods of Statistics*. – 2018. – Vol. 27. – P. 103–118. <https://doi.org/10.3103/s1066530718020023>
8. Харин, Ю. С. Биномиальная условно нелинейная авторегрессионная модель дискретного временного ряда и ее вероятностно-статистические свойства / Ю. С. Харин, В. А. Волошко // Труды Института математики. – 2018. – Т. 26, № 1. – С. 95–105.
9. Харин, Ю. С. Нейросетевые модели биномиальных временных рядов в задачах анализа данных / Ю. С. Харин // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2021. – Т. 65, № 6. – С. 654–660. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-6-654-660>
10. Kharin, Yu. S. Statistical analysis of parsimonious high-order multivariate finite Markov chains based on sufficient statistics / Yu. S. Kharin, V. A. Voloshko // *Journal of Multivariate Analysis*. – 2025. – Vol. 208. – Art. 105422. <https://doi.org/10.1016/j.jmva.2025.105422>
11. Vassiliou, P.-C. G. On the periodicity of non-homogeneous Markov chains and systems / P.-C. G. Vassiliou // *Linear Algebra and its Applications*. – 2015. – Vol. 471. – P. 654–684. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2015.01.017>
12. Meligkotsidou, L. Forecasting with non-homogeneous hidden Markov models / L. Meligkotsidou, P. Dellaportas // *Statistics and Computing*. – 2011. – Vol. 21. – P. 439–449. <https://doi.org/10.1007/s11222-010-9180-5>
13. Dynkin, E. B. *Markov Process* / E. B. Dynkin. – Berlin, 1965. – 685 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-00031-1>
14. Zucchini, W. *Hidden Markov Models for Time Series: An Introduction Using R* / W. Zucchini, I. L. MacDonald, R. Langrock. – CRC Press, 2016. – 398 p. <https://doi.org/10.1201/b20790>
15. Berchtold, A. High-Order Extensions of the Double Chain Markov Model / A. Berchtold; University of Washington Department of Statistics. – Seattle, 1999. – (Technical Report; N 356). – URL: <https://stat.uw.edu/research/tech-reports/high-order-extensions-double-chain-markov-model>

References

1. Kharin Yu. *Robustness in Statistical Forecasting*. Heidelberg, New York, Dordrecht, London, 2013. 356 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-00840-0>
2. Weiss C. *An Introduction to Discrete-Valued Time Series*. New York, 2018. 480 p. <https://doi.org/10.1002/9781119097013>
3. Jacobs P. A., Lewis P. A. W. Discrete time series generated by mixtures. I: correlation and runs properties. *Journal of the Royal Statistical Society. Series. B: Statistical Methodology*, 1978, vol. 40, no. 1, pp. 94–105. <https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1978.tb01653.x>
4. Raftery A. E. A model for high-order Markov chains. *Journal of the Royal Statistical Society. Series. B: Statistical Methodology*, 1985, vol. 47, no. 3, pp. 528–539. <https://doi.org/10.1111/j.2517-6161.1985.tb01383.x>
5. Kharin Yu. S. Markov chains with r -partial relations and their statistical estimation. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2004, vol. 48, no. 1, pp. 40–44 (in Russian).
6. Kharin Yu., Maltso M. Markov chain of conditional order: properties and statistical analysis. *Austrian Journal of Statistics*, 2014, vol. 43, no. 3, pp. 205–216. <https://doi.org/10.17713/ajs.v43i3.32>
7. Kharin Yu. S., Voloshko V. A., Medved E. A. Statistical estimation of parameters for binary conditionally nonlinear autoregressive time series. *Mathematical Methods of Statistics*, 2018, vol. 26, pp. 103–118 (in Russian). <https://doi.org/10.3103/s1066530718020023>
8. Kharin Yu. S., Voloshko V. A. Binomial conditionally nonlinear autoregressive model of discrete time series and its probabilistic and statistical properties. *Trudy Instituta matematiki = Proceedings of the Institute of Mathematics*, 2018, vol. 26, no. 1, pp. 95–105 (in Russian).
9. Kharin Yu. S. Neural network-based models of binomial time series in data analysis problems. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2021, vol. 65, no. 6, pp. 654–660 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2021-65-6-654-660>
10. Kharin Yu. S., Voloshko V. A. Statistical analysis of parsimonious high-order multivariate finite Markov chains based on sufficient statistics. *Journal of Multivariate Analysis*, 2025, vol. 208, art. 105422. <https://doi.org/10.1016/j.jmva.2025.105422>

11. Vassiliou P.-C. G. On the periodicity of non-homogeneous Markov chains and systems. *Linear Algebra and its Applications*, 2015, vol. 471, pp. 654–684. <https://doi.org/10.1016/j.laa.2015.01.017>
12. Meligkotsidou L., Dellaportas P. Forecasting with non-homogeneous hidden Markov models. *Statistics and Computing*, 2011, vol. 21, pp. 439–449. <https://doi.org/10.1007/s11222-010-9180-5>
13. Dynkin E. B. *Markov Process*. Berlin, 1965. 685 p. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-00031-1>
14. Zucchini W., MacDonald I. L., Langrock R. *Hidden Markov Models for Time Series: An Introduction Using R*. CRC Press, 2016. 398 p. <https://doi.org/10.1201/b20790>
15. Berchtold A. *High-Order Extensions of the Double Chain Markov Model*. Technical Report no. 356. Seattle, 1999. Available at: <https://stat.uw.edu/research/tech-reports/higher-order-extensions-double-chain-markov-model>.

Информация об авторе

Харин Юрий Семенович – академик, д-р физ.-мат. наук, профессор, директор. E-mail: kharin@bsu.by.

Information about the author

Kharin Yuriy S. – Academician, D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Director. E-mail: kharin@bsu.by.