

ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 511.35, 511.48, 511.75, 519.218.5
<https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-4-271-279>

Поступило в редакцию 21.07.2026
Received 21.07.2026

Д. В. Коледа

*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь*

**О РАСПРЕДЕЛЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ,
ИМЕЮЩИХ ЗАДАННУЮ СТЕПЕНЬ НАД ЧИСЛОВЫМ ПОЛЕМ**

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Аннотация. Рассматривается вопрос о том, как для заданного числового поля K распределены в $\mathbb{R}$ и в $\mathbb{C}$ алгебраические числа α фиксированной степени $\deg_K \alpha = n$ и высоты $H(\alpha) \leq Q$ при $Q \rightarrow \infty$. Установлена асимптотика количества таких алгебраических чисел, лежащих во множестве $S \subset \mathbb{C}$, в случаях, когда S – интервал вещественной прямой или область комплексной плоскости с липшицевой границей. В частности, показано, что асимптотическая плотность распределения таких алгебраических чисел полностью определяется их степенью над K , внутренним устройством высотной функции H и тем, какое поле – $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ – получается при пополнении поля K по архимедовой метрике.

Ключевые слова: алгебраические числа, распределение алгебраических чисел, числовое поле, высота алгебраического числа

Для цитирования. Коледа, Д. В. О распределении алгебраических чисел, имеющих заданную степень над числовым полем / Д. В. Коледа // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2026. – Т. 70, № 4. – С. 271–279. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-4-271-279>

Denis V. Koleda

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus*

**ON THE DISTRIBUTION OF ALGEBRAIC NUMBERS HAVING
A GIVEN DEGREE OVER A NUMBER FIELD**

(Communicated by Academician Nikolay A. Izobov)

Abstract. In the paper we consider the question: given a number field K , what is the distribution of algebraic numbers α of fixed degree $\deg_K \alpha = n$ and height $H(\alpha) \leq Q$ in $\mathbb{R}$ and in $\mathbb{C}$ as $Q \rightarrow \infty$. We establish the asymptotic count of such algebraic numbers lying in a set $S \subset \mathbb{C}$ in cases when S is an interval of the real line or a region of the complex plane with a Lipschitz-parametrizable boundary. In particular, we show that the asymptotic distribution density function of such algebraic numbers is completely determined by their degree over K , by the internal structure of the height function H and by what the completion of K with respect to the archimedean metric is (whether it is $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$).

Keywords: algebraic numbers, distribution of algebraic numbers, number field, height of an algebraic number

For citation. Koleda D. V. On the distribution of algebraic numbers having a given degree over a number field. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2026, vol. 70, no. 4, pp. 271–279 (in Russian). <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-4-271-279>

Введение. Задача оценки общего количества элементов заданного числового поля K содержится в монографии Ленга [1, Ч. III, р. 58]. Эту задачу в более общей постановке решил Шануэль в [2], в частности, он установил асимптотику числа точек проективного пространства $\mathbb{P}^n(K)$

высоты $\leq Q$ при $Q \rightarrow \infty$. Эти результаты и сопутствующие подходы были затем развиты в работах Шмидта [3], Массера и Ваалера [4], Видмера [5; 6]. Предметом исследования в упомянутых работах являлась асимптотика общего количества алгебраических чисел и точек безотносительно их расположения в пространстве. С другой стороны, в [7] было установлено асимптотическое распределение алгебраических чисел, имеющих заданную степень над $\mathbb{Q}$, на прямой $\mathbb{R}$, а в [8] – на плоскости $\mathbb{C}$. Затем в [9] эти результаты были обобщены на случай алгебраических точек, координаты которых суть сопряженные алгебраические числа. Здесь мы покажем, как получить аналог результатов [7; 8] для алгебраических чисел заданной степени над произвольным фиксированным числовым полем с помощью идей и результатов [2; 4; 5; 9].

Постановка задачи и основной результат. Пусть $K \subset \mathbb{C}$ – числовое поле степени d над полем $\mathbb{Q}$. У такого поля K всегда имеется примитивный элемент – какое-то алгебраическое число $\gamma \in \mathbb{C}$ степени $\deg_{\mathbb{Q}} \gamma = d$ над $\mathbb{Q}$, для которого $K = \mathbb{Q}(\gamma)$. При этом поле K имеет ровно d различных вложений (включая само K) в $\mathbb{C}$, которые мы будем рассматривать как изоморфные, но разные поля. Выбор вложения фиксируется конкретным вложением примитивного элемента γ в $\mathbb{C}$.

Нас будет интересовать распределение элементов множества

$$\overline{K}_n := \{\alpha \in \mathbb{C} : [K(\alpha) : K] = n\}$$

на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ при фиксированной степени n . Можно показать, что $\overline{K}_n$ – бесконечное множество, всюду плотное в $\mathbb{C}$. Поэтому, чтобы можно было корректно поставить вопрос о распределении, нужно ввести еще одно ограничение – по высоте. Итак, для множества $S \subseteq \mathbb{C}$ и числа $Q > 0$ определим множество

$$\overline{K}_n(S, Q) := \{\alpha \in \overline{K}_n \cap S : H(\alpha) \leq Q\},$$

где *высотная функция* $H : \overline{K}_n \rightarrow (0, +\infty)$ подобрана так, что $|\overline{K}_n(S, Q)| < +\infty$ для всех вещественных $Q > 0$. Подробнее конструкцию высоты мы опишем далее.

Сформулируем задачу, решению которой посвящено сообщение.

З а д а ч а. Установить асимптотику величины $|\overline{K}_n(S, Q)|$ при $Q \rightarrow +\infty$ и фиксированном $n \geq 2$ для достаточно широкого класса множеств $S \subseteq \mathbb{C}$.

По своей внутренней геометрии эта задача распадается на три случая:

- а) когда $K \subset \mathbb{R}$ и $S \subseteq \mathbb{R}$,
- б) когда $K \subset \mathbb{R}$ и $S \subseteq \mathbb{C}$,
- в) когда $K \subset \mathbb{C}$ и $S \subseteq \mathbb{C}$.

Конструкция высоты. В качестве высоты H мы используем конструкцию, описанную в [4]. Для алгебраического числа α степени $\deg_K \alpha = n$ над K его высота $H(\alpha)$ определяется через высоту его минимального многочлена P_α над K :

$$H(\alpha) := H_N(P_\alpha)^{1/n}. \quad (1)$$

Высоту многочлена $P(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0 \in K[X]$ определим как высоту его вектора коэффициентов $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in K^{n+1}$

$$H_N(P) := H_N(\mathbf{a}). \quad (2)$$

В основе конструкции высоты $H_N(\mathbf{a})$ лежит понятие (r, s) -набора лучевых функций $\mathcal{N}$. Дадим несколько связанных с этой высотой определений.

О п р е д е л е н и е 1. Пусть $n > 0$ целое. Всякую непрерывную функцию N из $\mathbb{R}^{n+1}$ или $\mathbb{C}^{n+1}$ в вещественный промежуток $[0, +\infty)$, удовлетворяющую условиям:

1. $N(\mathbf{z}) = 0$, если и только если $\mathbf{z} = \mathbf{0}$,

2. $N(w\mathbf{z}) = |w|N(\mathbf{z})$ для любого скаляра w , вещественного или комплексного, будем называть лучевой функцией размерности n .

О п р е д е л е н и е 2. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и целые $r, s \geq 0$, причем $r + s > 0$. Набор $\mathcal{N} = (N_1, \dots, N_{r+s})$ из $r + s$ лучевых функций $N_1, \dots, N_r : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow [0, +\infty)$ и $N_{r+1}, \dots, N_{r+s} : \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow [0, +\infty)$ будем называть (r, s) -набором размерности n .

Обозначим

$$\begin{aligned} d_i &:= \begin{cases} 1 & \text{при } 1 \leq i \leq r, \\ 2 & \text{при } r+1 \leq i \leq r+s, \end{cases} \quad \mathbf{d} := (d_1, \dots, d_{r+s}), \quad D_i := d_i(n+1), \\ B_i &:= \left\{ \mathbf{z} \in (\mathbb{R}^{d_i})^{n+1} : N_i(\mathbf{z}) \leq 1 \right\}, \quad V_i := \text{Vol}_{D_i} B_i. \end{aligned} \quad (3)$$

Объем $V_{\mathcal{N}}$ этого набора определим как произведение $r + s$ объемов V_i , т. е. $V_{\mathcal{N}} := \prod_{i=1}^{r+s} V_i$.

Заметим, что функции $N_i : (\mathbb{R}^{d_i})^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$, вообще говоря, различны.

Числовое поле K степени d над $\mathbb{Q}$ имеет ровно d вложений $\sigma_1, \dots, \sigma_d : K \rightarrow \mathbb{C}$. Пусть они занумерованы так, что вложения $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ вещественны, $\sigma_{r+1}, \dots, \sigma_{r+s}$ комплексны и $\sigma_{r+s+j} = \overline{\sigma_{r+j}}$ для $j = 1, \dots, s$. Далее полагаем, что каждое из $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ действует на векторы $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_n) \in K^{n+1}$ покомпонентно, т. е. $\sigma_j(\mathbf{a}) = (\sigma_j(a_0), \dots, \sigma_j(a_n))$ для $j = 1, \dots, d$, где $d = r + 2s$.

О п р е д е л е н и е 3. Для $\mathbf{a} = (a_0, a_1, \dots, a_n) \in K^{n+1} \setminus \{0\}$ определим абсолютную высоту $H_{\mathcal{N}}$ как

$$H_{\mathcal{N}}(\mathbf{a})^d = \frac{1}{\text{Nm}\langle \mathbf{a} \rangle} \prod_{i=1}^{r+s} N_i(\sigma_i(\mathbf{a}))^{d_i}, \quad (4)$$

где $\langle \mathbf{a} \rangle := a_0 O_K + a_1 O_K + \dots + a_n O_K$ – дробный идеал, порожденный координатами вектора $\mathbf{a}$, и $\text{Nm}(\mathcal{A})$ – абсолютная норма дробного идеала $\mathcal{A}$, которая для целого идеала $\mathcal{A}$ равна $[O_K : \mathcal{A}]$.

Можно заметить, что соотношение (4) определяет высоту $H_{\mathcal{N}}$ на $\mathbb{P}^n(K)$, удовлетворяющую для всех $\mathbf{a} \in \mathbb{P}^n(K)$ условию $0 < H_0 \leq H_{\mathcal{N}}(\mathbf{a}) < +\infty$, где постоянная H_0 определяется (r, s) -набором $\mathcal{N}$. При этом $H_{\mathcal{N}}(\lambda \mathbf{a}) = H_{\mathcal{N}}(\mathbf{a})$ для всех $\lambda \in K^\times$ и, вдобавок, $|\overline{K}_n(\mathbb{C}, Q)| < +\infty$ для всех $Q > 0$.

Основные результаты.

О п р е д е л е н и е 4. Будем говорить, что множество $G \subset \mathbb{R}^m$ принадлежит липшицеву классу (m, M, L) и писать $G \in \text{Lip}(m, M, L)$, если существуют M отображений $\phi_1, \dots, \phi_M : [0, 1]^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$, которые удовлетворяют условию Липшица

$$|\phi_i(x) - \phi_i(y)| \leq L|x - y| \quad \text{для } x, y \in [0, 1]^{m-1}, \quad i = 1, \dots, M,$$

и $G \subseteq \bigcup_{i=1}^M \phi_i([0, 1]^{m-1})$.

Т е о р е м а 1. Пусть целое $n \geq 2$. Пусть K – числовое поле степени $[K : \mathbb{Q}] = d$, имеющее r вещественных и s пар комплексных сопряженных вложений. Пусть высота (1) построена на основе (r, s) -набора $\mathcal{N} = (N_1, \dots, N_{r+s})$, где лучевые функции N_i таковы, что $\partial B_i \in \text{Lip}(D_i, M, L)$ для $i = 1, \dots, r + s$. Пусть поле K тождественно своему k -му вложению, которому отвечает лучевая функция $N = N_k$ и сопутствующие ей $B = B_k$ и $V = V_k$ согласно (3). Если

- а) либо $K \subset \mathbb{R}$, а $S \subseteq \mathbb{R}$ – объединение не более чем M непересекающихся интервалов,
- б) либо $K \subset \mathbb{R}$, а $S \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ – множество с границей $\partial S \in \text{Lip}(2, M, L)$,
- в) либо $K \subset \mathbb{C}$, а $S \subseteq \mathbb{C}$ – множество с границей $\partial S \in \text{Lip}(2, M, L)$,

тогда для всех $Q \geq 1$

$$\left| \frac{|\overline{K}_n(S, Q)|}{Q^{dn(n+1)}} - \kappa_{n, K, N} \int_S \rho_{n, N}(z) dz \right| \leq \frac{c_{n, K, M, L}}{Q^n}, \quad (5)$$

где постоянная $c_{n, K, M, L} > 0$ зависит только от n, K, M, L , а постоянная

$$\kappa_{n, K, N} = (n+1)^{r+s-1} \left(\frac{2^s}{\sqrt{|\Delta_K|}} \right)^{n+1} \frac{h_K R_K}{w_K \zeta_K(n+1)} V_N. \quad (6)$$

Здесь Δ_K – дискриминант поля K ; h_K – число классов; R_K – регулятор; w_K – число корней из единицы в K ; ζ_K – дзета-функция Дедекинда поля K . При этом

а) когда $K \subset \mathbb{R}$ и $S \subseteq \mathbb{R}$, то для всех $z \in \mathbb{R}$

$$\rho_{n, N}(z) = \rho_{n, N}^{\mathbb{R}}(z) := \frac{1}{V} \int_{D_{n, N}^{\mathbb{R}}(z)} \left| \sum_{j=0}^{n-1} t_j z^j \right| dt_0 \dots dt_{n-1}, \quad (7)$$

$$D_{n, N}^{\mathbb{R}}(z) := \left\{ (t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{R}^n : N \left[(X-z) \sum_{j=0}^{n-1} t_j X^j \right] \leq 1 \right\}, \quad (8)$$

б) когда $K \subset \mathbb{R}$ и $S \subseteq \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, то для всех $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$\rho_{n, N}(z) = \rho_{n, N}^{\mathbb{R}, \mathbb{C}}(z) := 2 \frac{|z - \bar{z}|}{V} \int_{D_{n, N}^{\mathbb{R}, \mathbb{C}}(z)} \left| \sum_{j=0}^{n-2} t_j z^j \right|^2 dt_0 \dots dt_{n-2}, \quad (9)$$

$$D_{n, N}^{\mathbb{R}, \mathbb{C}}(z) := \left\{ (t_0, \dots, t_{n-2}) \in \mathbb{R}^{n-1} : N \left[(X-z)(X-\bar{z}) \sum_{j=0}^{n-2} t_j X^j \right] \leq 1 \right\}, \quad (10)$$

в) когда $K \subset \mathbb{C}$ и $S \subseteq \mathbb{C}$, то для всех $z \in \mathbb{C}$

$$\rho_{n, N}(z) = \rho_{n, N}^{\mathbb{C}}(z) := \frac{1}{V} \int_{D_{n, N}^{\mathbb{C}}(z)} \left| \sum_{j=0}^{n-1} t_j z^j \right|^2 dt_0 \dots dt_{n-1}, \quad (11)$$

$$D_{n, N}^{\mathbb{C}}(z) := \left\{ (t_0, \dots, t_{n-1}) \in \mathbb{C}^n : N \left[(X-z) \sum_{j=0}^{n-1} t_j X^j \right] \leq 1 \right\}, \quad (12)$$

где $dt_0 \dots dt_{n-1}$ – элемент объема в пространстве $\mathbb{C}^n \cong (\mathbb{R}^2)^n$.

В (8), (10) и (12) используется обозначение $N[a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n] := N_k(a_0, a_1, \dots, a_n)$.

В каждом из трех случаев функцию $\rho_{n, N}$ можно толковать (при надлежащей нормировке) как плотность распределения алгебраических чисел степени n над K .

Отметим, что с точностью до постоянных множителей функция (7) совпадает с функцией из [7], а функция (9) – с функцией из [8]. Случай (11) в [7] и [8] не возникал, поскольку поле $\mathbb{Q}$ имеет единственное вложение в $\mathbb{C}$, и это вложение вещественно.

Обратим внимание, что вид функции $\rho_{n,N}$ полностью определяется степенью n , лучевой функцией $N = N_k$ и локальной степенью d_k и никак не зависит от основного поля K и его параметров. Это позволяет утверждать, что при использовании (4) в качестве высоты плотность $\rho_{n,N}$ распределения алгебраических чисел является универсальной функцией.

С х е м а д о к а з а т е л ь с т в а т е о р е м ы 1. Наша задача сводится к тому, чтобы посчитать количество неприводимых унитарных многочленов $P \in K[X]$ степени $\deg P = n$ и высоты $H_{\mathcal{N}}(P) \leq T$, у которых имеются корни во множестве S .

Известно [4, р. 436], что количество всех приводимых над K унитарных многочленов $P \in K[X]$ степени n и высоты $H_{\mathcal{N}}(P) \leq T$ не превосходит величины порядка

$$O(T^{dn} \mathcal{L}_0''(T)), \text{ где } \mathcal{L}_0''(T) := \begin{cases} \log T & \text{при } (d, n) = (1, 2), \\ 1 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (13)$$

и неявная постоянная в O -большом зависит только от поля K , степени многочленов n и (r, s) -набора лучевых функций $\mathcal{N}$.

Теперь заметим, что множество всех унитарных многочленов $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 \in K[X]$ степени n биективно отвечает множеству проективных точек $\mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{n-1}, 1) \in \mathbb{P}^n(K)$. При этом согласно (2) имеем $H_{\mathcal{N}}(P) = H_{\mathcal{N}}(\mathbf{a})$. Можно показать [4, р. 436], что

$$\left| \left\{ \mathbf{a} = (a_0, \dots, a_{n-1}, 0) \in \mathbb{P}^n(K) : H_{\mathcal{N}}(\mathbf{a}) \leq T \right\} \right| = O(T^{dn}), \quad (14)$$

где постоянная в O -большом зависит от тех же параметров, что и в (13). Здесь в записи $\mathbf{a} \in \mathbb{P}^n(K)$ вектор $\mathbf{a} \in K^{n+1}$ отождествляется со своим классом эквивалентности – проективной точкой, представителем которой вектор $\mathbf{a}$ является.

Опишем схему рассуждений для несколько более общей задачи.

Для $i = 1, \dots, r+s$ обозначим через $Y_i(\mathbf{z}_i)$ условие на вектор $\mathbf{z}_i \in (\mathbb{R}^{d_i})^{n+1}$, обладающее двумя свойствами: (а) для любых $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ будет $Y_i(\mathbf{z}_i) \Leftrightarrow Y_i(\lambda \mathbf{z}_i)$, (б) множество

$$\tilde{B}_i := \{ \mathbf{z}_i \in B_i : Y_i(\mathbf{z}_i) \} \quad (15)$$

имеет границу $\partial \tilde{B}_i \in \text{Lip}(D_i, M', L')$ при некоторых $M' \in \mathbb{N}$ и $L' \in (0, +\infty)$.

Пусть $Y(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r+s}) := \bigwedge_{i=1}^{r+s} Y_i(\mathbf{z}_i)$ – конъюнкция таких условий. Нам нужно при $T \rightarrow +\infty$ найти асимптотику считающей функции

$$Z(T, Y) := \left| \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{P}^n(K) : H_{\mathcal{N}}(\mathbf{a}) \leq T, Y_1(\sigma_1(\mathbf{a})), \dots, Y_{r+s}(\sigma_{r+s}(\mathbf{a})) \right\} \right|.$$

Далее задача сводится к подсчету точек решетки в определенной области при помощи двух лемм.

Л е м м а 1 [4, Lemma 5, р. 441]. Пусть $D := \sum_{i=1}^{r+s} D_i$. Для идеала $\mathcal{A} \leq \mathcal{O}_K$ множество

$$\Lambda(\mathcal{A}) := \left\{ (\sigma_1(\mathbf{a}), \dots, \sigma_{r+s}(\mathbf{a})) : \mathbf{a} \in \mathcal{A}^{n+1} \right\}$$

является решеткой в $\mathbb{R}^D$ с определителем $\Delta = \left(2^{-s} \text{Nm}(\mathcal{A}) \sqrt{|\Delta_K|} \right)^{n+1}$, где Δ_K – дискриминант поля K . Первый последовательный минимум λ_1 этой решетки по евклидову расстоянию таков, что $\lambda_1 \geq \text{Nm}(\mathcal{A})^{1/d}$.

Л е м м а 2 [4, Lemma 2, p. 437]. Пусть ограниченное множество $S \subset \mathbb{R}^D$ имеет границу $\partial S \in \text{Lip}(D, M, L)$ при некоторых $M \in \mathbb{N}$ и $L \in (0, +\infty)$. Тогда S измеримо. Кроме того, если Λ – решетка в $\mathbb{R}^D$ с определителем $\Delta = \Delta(\Lambda)$ и первым последовательным минимумом $\lambda_1 = \lambda_1(\Lambda)$ (по евклидову расстоянию), тогда

$$\left| |S \cap \Lambda| - \frac{\text{Vol}_D S}{\Delta} \right| \leq c(D) M \left(\frac{L}{\lambda_1} + 1 \right)^{D-1},$$

где постоянная $c(D)$ зависит только от D .

Пусть

$$S_F(T) := \left\{ (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r+s}) \in (\mathbb{R}^{n+1})^r \times (\mathbb{C}^{n+1})^s : (N_1(\mathbf{z}_1)^{d_1}, \dots, N_{r+s}(\mathbf{z}_{r+s})^{d_{r+s}}) \in \exp F(T) \right\}, \quad (16)$$

где под отображением $\exp: \mathbb{R}^{r+s} \rightarrow (0, +\infty)$ подразумевается $(x_1, \dots, x_{r+s}) \mapsto (e^{x_1}, \dots, e^{x_{r+s}})$, а множество

$$F(T) := \{ \mathbf{f} + \tau \mathbf{d} \in \mathbb{R}^{r+s} : \mathbf{f} \in F, \tau \leq \log T \} \quad (17)$$

получено смещениями в $\mathbb{R}^{r+s}$ на вектор $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_{r+s})$ фундаментального параллелепипеда

$$F := \left\{ \sum_{i=1}^{r+s-1} t_i \ell(\varepsilon_i) : (t_1, \dots, t_{r+s-1}) \in [0, 1)^{r+s-1} \right\}, \quad (18)$$

образованного базисными векторами $\ell(\varepsilon_1), \dots, \ell(\varepsilon_{r+s-1}) \in \mathbb{R}^{r+s}$ абелевой группы $\ell(U_K)$, где отображение $\ell: K^\times \rightarrow \mathbb{R}^{r+s}$ действует как $\ell(\eta) = (d_1 \ln |\sigma_1(\eta)|, \dots, d_{r+s} \ln |\sigma_{r+s}(\eta)|)$.

Обозначим

$$\begin{aligned} \Lambda^*(\mathcal{A}) &:= \{ (\sigma_1(\mathbf{a}), \dots, \sigma_{r+s}(\mathbf{a})) : \mathbf{a} \in \mathcal{A}^{n+1}, \langle \mathbf{a} \rangle = \mathcal{A} \}, \\ S_F(T, \mathcal{Y}) &:= \{ (\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{r+s}) \in S_F(T) : \mathcal{Y}_1(\mathbf{z}_1), \dots, \mathcal{Y}_{r+s}(\mathbf{z}_{r+s}) \}, \\ Z_F^*(\mathcal{A}, T, \mathcal{Y}) &:= |S_F(T, \mathcal{Y}) \cap \Lambda^*(\mathcal{A})|. \end{aligned} \quad (19)$$

По аналогии с [4, Lemma 8, p. 444] можно доказать следующую лемму.

Л е м м а 3. Для любого $T \geq 1$

$$Z(T, \mathcal{Y}) = w_K^{-1} \sum_{\mathcal{A} \in \text{Cl}_K} Z_F^*(\mathcal{A}, \text{Nm}(\mathcal{A})^{1/d} T, \mathcal{Y}),$$

где w_K – число корней из единицы в K и сумма взята по любому набору целых представителей $\mathcal{A}$ классов идеалов поля K .

Из леммы 3 в [4, p. 439] и определений (15), (16), (18), (19) получается

Л е м м а 4. Граница $\partial S_F(1, \mathcal{Y}) \in \text{Lip}(D, M'', L'')$ для некоторых $M'' \in \mathbb{N}$ и $L'' \in (0, +\infty)$.

Заметим, что $S_F(T, \mathcal{Y}) = T S_F(1, \mathcal{Y})$ и $\partial S_F(T, \mathcal{Y}) = T \partial S_F(1, \mathcal{Y})$ при любом $T > 0$. Тем же путем, что и лемма 7 в [4, p. 443], из лемм 1, 2 и 4 получается

Л е м м а 5. Существует такая постоянная $T_0 > 0$, что для любого $T \geq T_0$ выполняется

$$\begin{aligned} \left| Z_F^*(\mathcal{A}, T, \mathcal{Y}) - C_F^*(\mathcal{Y}) \frac{T^{d(n+1)}}{\text{Nm}(\mathcal{A})^{n+1}} \right| &\leq c_F^* T^{d(n+1)-1} \mathcal{L}_0(T), \\ C_F^*(\mathcal{Y}) &:= \frac{2^{s(n+1)}}{\sqrt{|\Delta_K|}^{n+1}} \frac{\text{Vol}_D S_F(1, \mathcal{Y})}{\zeta_K(n+1)}, \quad \mathcal{L}_0(T) := \begin{cases} \log T, & \text{если } (d, n) = (1, 1), \\ 1 & \text{иначе,} \end{cases} \end{aligned}$$

где c_F^* зависит только от поля K и от параметров липшицева класса $\text{Lip}(D, M'', L'') \ni \partial S_F(1, \mathcal{Y})$.

Для нашей задачи необходима следующая доработка леммы 4 из [4, р. 440–441].

Л е м м а 6. Множество $S_F(1, Y)$ ограничено и имеет объем

$$\text{Vol}_D S_F(1, Y) = \text{Vol}_D S_F(1) \left(\prod_{i=1}^{r+s} \Omega_i \right), \quad \text{где} \quad \Omega_i := \tilde{V}_i / V_i, \quad \tilde{V}_i := \text{Vol}_{D_i} \tilde{B}_i. \quad (20)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $q := r + s - 1$. Напомним, что $D := \sum_{i=1}^{q+1} D_i$. Преобразуем интеграл

$$\tilde{V} := \text{Vol}_D S_F(1, Y) = \int_{S_F(1, Y)} d\mathbf{z}_1 \dots d\mathbf{z}_{q+1},$$

где $d\mathbf{z}_1 \dots d\mathbf{z}_{q+1}$ – элемент объема в $\mathbb{R}^D \cong (\mathbb{R}^{d_1})^{n+1} \times \dots \times (\mathbb{R}^{d_{q+1}})^{n+1}$. Для этого разобьем область $S_F(1, Y)$ на прообразы непересекающихся параллелепипедов вида $\prod_{i=1}^{q+1} (X_i, Y_i]$ при непрерывном отображении $\Phi: (\mathbb{R}^{d_1})^{n+1} \times \dots \times (\mathbb{R}^{d_{q+1}})^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{q+1}$, действующем по правилу

$$(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_{q+1}) \mapsto (N_1(\mathbf{z}_1)^{d_1}, \dots, N_{q+1}(\mathbf{z}_{q+1})^{d_{q+1}}).$$

А далее, измельчая это разбиение, перейдем к пределу. Обозначим

$$B_i(X) := \{\mathbf{z}_i \in (\mathbb{R}^{d_i})^{n+1} : N_i(\mathbf{z}_i)^{d_i} \leq X\}, \quad \tilde{B}_i(X) := \{\mathbf{z}_i \in B_i(X) : Y_i(\mathbf{z}_i)\}.$$

Из (16) и (17) видно, что

$$S_F(T, Y) \subset S_F(T) = \Phi^{-1}(\exp F(T)) \subset B_1(T_1) \times \dots \times B_{q+1}(T_{q+1}),$$

где $T_i = T_i(F, T) = \sup \{T^{d_i} e^{f_i} : (f_1, \dots, f_{q+1}) \in F\}$, $1 \leq i \leq q+1$.

Выберем разбиения $0 = X_{i,0} < X_{i,1} < \dots < X_{i,m_i} = T_i$ отрезков $[0, T_i]$ и обозначим

$$\lambda_i := \max_{1 \leq j \leq m_i} (X_{i,j+1} - X_{i,j}), \quad \lambda := \max_{1 \leq i \leq q+1} \lambda_i,$$

$$\Pi(j_1, \dots, j_{q+1}) := \prod_{i=1}^{q+1} B_i(X_{i,j_{i+1}}) \setminus B_i(X_{i,j_i}) = \Phi^{-1} \left(\prod_{i=1}^{q+1} (X_{i,j_i}, X_{i,j_{i+1}}] \right).$$

Заметим, что $\Pi(j_1, \dots, j_{q+1}) \cap S_F(1, Y) = \prod_{i=1}^{q+1} \tilde{B}_i(X_{i,j_{i+1}}) \setminus \tilde{B}_i(X_{i,j_i})$, причем $\tilde{B}_i(X) = X^{1/d_i} \tilde{B}_i(1)$

и $\text{Vol}_{D_i}(\tilde{B}_i(X + \Delta X) \setminus \tilde{B}_i(X)) = (n+1) \tilde{V}_i(X^n \Delta X + O(\Delta X^2))$, где неявная постоянная в символе $O(\cdot)$ зависит только от n и T_i . Поскольку множество $\partial S_F(1, Y)$ имеет меру нуль, то при $\lambda \rightarrow 0$ общий объем множеств $\Pi(j_1, \dots, j_{q+1})$, имеющих пересечение с $\partial S_F(1, Y)$, будет стремиться к нулю. Таким образом, при $\lambda \rightarrow 0$ получаем

$$V = \sum_{j_1, \dots, j_{q+1}} \text{Vol}_D(\Pi(j_1, \dots, j_{q+1}) \cap S_F(1, Y)) = (n+1)^{q+1} \left(\prod_{i=1}^{q+1} \tilde{V}_i \right) \int_{\mathbf{X} \in \exp F(1)} X_1^n \dots X_{q+1}^n dX_1 \dots dX_{q+1}.$$

Согласно [4, Sect. 4, р. 441] интеграл в правой части равен $\frac{1}{n+1} \frac{V_F}{\sqrt{q+1}}$, где $V_F := \text{Vol}_q F$ – объем фундаментального параллелепипеда F , определенного в (18). По лемме 4 в [4, р. 440] имеем

$\text{Vol}_D S_F(1) = \frac{(n+1)^q}{\sqrt{q+1}} V_F V_N$. Поскольку $\tilde{V}_1 \dots \tilde{V}_{q+1} = V_N \Omega_1 \dots \Omega_{q+1}$, получаем (20). Лемма доказана.

Собирая леммы 3, 5 и 6 вместе, получаем

$$Z(T, Y) = \frac{(n+1)^{r+s-1}}{\sqrt{r+s}} \frac{2^{s(n+1)}}{\sqrt{|\Delta_K|^{n+1}}} \frac{h_K V_F V_N}{w_K \zeta_K(n+1)} T^{d(n+1)} \prod_{i=1}^{r+s} \Omega_i + O(T^{d(n+1)-1} \mathcal{L}_0(T)). \quad (21)$$

Согласно определению регулятора R_K поля K имеем $V_F = \sqrt{r+s} R_K$. При $r+s=1$ по определению $R_K := 1$, поэтому полагаем $V_F := 1$. Отсюда получаем постоянную (6).

Теперь конкретизируем, что в нашей задаче понимается под условием $Y(\mathbf{a})$ на вектор $\mathbf{a} \in K^{n+1}$. Напомним, что по условию теоремы 1 числовое поле K совпадает со своим k -м вложением в $\mathbb{C}$. В качестве условий $Y_i(\mathbf{z})$ на вектор $\mathbf{z} \in (\mathbb{R}^{d_i})^{n+1}$ при $i \neq k$ возьмем тождественно истинные высказывания, т. е. будем полагать $\Omega_i = 1$ при $i \neq k$.

Условие Y_k задается так. Пусть $S \subset \mathbb{C}$. Для вектора $\mathbf{z} = (z_0, z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{R}^{d_k})^{n+1}$ определим $Y_k(\mathbf{z}) = Y_k(\mathbf{z}; S, m)$ как высказывание: у многочлена $f(X) = z_0 + z_1 X + \dots + z_n X^n$ имеется ровно m корней $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in S$.

В нашем случае при $i = k$ множество (15) будет $\tilde{B}_k = \tilde{B}_k(S, m) := \{\mathbf{z}_k \in B_k : Y_k(\mathbf{z}_k; S, m)\}$. Поэтому в (20) будет $\Omega_k = \Omega_k(S, m) := V_k^{-1} \text{Vol}_{D_k} \tilde{B}_k(S, m)$. Таким образом, для нашей задачи о распределении алгебраических чисел степени n над полем K в роли множителя $\prod_{i=1}^{r+s} \Omega_i$ в (21) следует взять величину $\sum_{m=0}^n m \Omega_k(S, m)$.

Если множество S удовлетворяет условиям теоремы 1, с помощью замены переменных можно показать, что

$$\sum_{m=0}^n m \Omega_k(S, m) = \int_S \rho_{n, N_k}(z) dz,$$

где функция ρ_{n, N_k} имеет вид, указанный в теореме 1.

В случае а) замена переменных описывается отображением $\phi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, при котором $(z; b_0, \dots, b_{n-1}) \xrightarrow{\phi} (a_0, \dots, a_n)$, где

$$(X - z) \sum_{j=0}^{n-1} b_j X^j = \sum_{j=0}^n a_j X^j. \quad (22)$$

Якобиан отображения (22) равен $\frac{\partial(a_0, a_1, \dots, a_n)}{\partial(z; b_0, \dots, b_{n-1})} = - \sum_{j=0}^{n-1} b_j z^j$.

В случае б) замена переменных описывается отображением $\psi: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, при котором $(u, v; b_0, \dots, b_{n-2}) \xrightarrow{\psi} (a_0, \dots, a_n)$, где

$$(X - z)(X - \bar{z}) \sum_{j=0}^{n-2} b_j X^j = \sum_{j=0}^n a_j X^j, \quad z = u + iv. \quad (23)$$

Якобиан отображения (23) равен $\frac{\partial(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)}{\partial(u, v; b_0, \dots, b_{n-2})} = \frac{2}{i} (z - \bar{z}) \left(\sum_{j=0}^{n-2} b_j z^j \right) \left(\sum_{j=0}^{n-2} b_j \bar{z}^j \right)$.

В случае в) в качестве замены переменных применяется отображение $\phi_{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, которое задано теми же формулами (22), что и в случае а). Учитывая, что $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, в декартовых координатах на комплексной плоскости якобиан в случае в) равен квадрату модуля якобиана для случая а), см. [10, теорема 1, гл. I, 4, п. 9, с. 54].

Можно показать [9, Lemma 6.4, p. 15], что $\partial \tilde{B}_k(S, m) \in \text{Lip}(D_k, M', L')$ для каждого $m = 1, \dots, n$, где значения M' и L' зависят только от параметров класса, которому принадлежит граница ∂S . Поэтому в условиях теоремы 1 верна лемма 6, и таким образом, верна асимптотика (21). Заметим, что согласно (1) будет $H(\alpha) \leq Q \Leftrightarrow H_N(P_\alpha) \leq Q^n$. Полагая $T = Q^n$, из (21) с учетом (13) и (14) получаем (5).

Заключение. При использовании высотной функции (4) асимптотическая плотность $\rho_{n,N}$ распределения алгебраических чисел степени n над числовым полем K оказывается универсальной: ее вид полностью определяется степенью n , лучевой функцией $N = N_k$ и размерностью $d_k = \dim_{\mathbb{R}} K_\infty$ пополнения $K_\infty \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ поля K по архимедову абсолютному значению. При этом $\rho_{n,N}$ никак не зависит от основного поля K и его параметров. Таким образом, главное слагаемое асимптотики (5) зависит от поля K только через постоянный множитель $\kappa_{n,K,N}$, в котором собраны все арифметические и алгебраические параметры поля K .

Список использованных источников

1. Lang, S. *Diophantine Geometry* / S. Lang. – New York; London, 1962. – 170 p. (Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, Vol. 11).
2. Schanuel, S. H. Heights in number fields / S. H. Schanuel // *Bulletin de la Société Mathématique de France*. – 1979. – Vol. 107. – P. 433–449. <https://doi.org/10.24033/bsmf.1905>
3. Schmidt, W. M. Northcott's theorem on heights I. A general estimate / W. M. Schmidt // *Monatshefte für Mathematik*. – 1993. – Vol. 115. – P. 169–181. <https://doi.org/10.1007/BF01311215>
4. Masser, D. Counting algebraic numbers with large height II / D. Masser, J. D. Vaaler // *Transactions of the American Mathematical Society*. – 2007. – Vol. 359, N 1. – P. 427–445. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-06-04115-8>
5. Widmer, M. Counting primitive points of bounded height / M. Widmer // *Transactions of the American Mathematical Society*. – 2010. – Vol. 362. – P. 4793–4829. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-10-05173-1>
6. Widmer, M. Integral points of fixed degree and bounded height / M. Widmer // *International Mathematics Research Notices*. – 2016. – Vol. 2016, N 13. – P. 3906–3943. <https://doi.org/10.1093/imrn/rnv268>
7. Koleda, D. On the density function of the distribution of real algebraic numbers / D. Koleda // *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*. – 2017. – Vol. 29, N 1. – P. 179–200. <https://doi.org/10.5802/jtnb.975>
8. Götze, F. Distribution of complex algebraic numbers / F. Götze, D. Kaliada, D. Zaporozhets // *Proceedings of the American Mathematical Society*. – 2017. – Vol. 145, N 1. – P. 61–71. <https://doi.org/10.1090/proc/13208>
9. Götze, F. Joint distribution of conjugate algebraic numbers: a random polynomial approach / F. Götze, D. Koleda, D. Zaporozhets // *Advances in Mathematics*. – 2020. – Vol. 359. – Art. 106849. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2019.106849>
10. Шабат, Б. В. Введение в комплексный анализ / Б. В. Шабат. – 2 изд. – М., 1976. – Ч. II: Функции нескольких переменных. – 400 с.

References

1. Lang S. *Diophantine Geometry. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, vol. 11*. New York, London, 1962. 170 p.
2. Schanuel S. H. Heights in number fields. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 1979, vol. 107, pp. 433–449. <https://doi.org/10.24033/bsmf.1905>
3. Schmidt W. M. Northcott's theorem on heights I. A general estimate. *Monatshefte für Mathematik*, 1993, vol. 115, pp. 169–181. <https://doi.org/10.1007/BF01311215>
4. Masser D., Vaaler J. D. Counting algebraic numbers with large height II. *Transactions of the American Mathematical Society*, 2007, vol. 359, no. 1, pp. 427–445. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-06-04115-8>
5. Widmer M. Counting primitive points of bounded height. *Transactions of the American Mathematical Society*, 2010, vol. 362, pp. 4793–4829. <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-10-05173-1>
6. Widmer M. Integral points of fixed degree and bounded height. *International Mathematics Research Notices*, 2016, vol. 2016, no. 13, pp. 3906–3943. <https://doi.org/10.1093/imrn/rnv268>
7. Koleda D. On the density function of the distribution of real algebraic numbers. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 2017, vol. 29, no. 1, pp. 179–200. <https://doi.org/10.5802/jtnb.975>
8. Götze F., Kaliada D., Zaporozhets D. Distribution of complex algebraic numbers. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2017, vol. 145, no. 1, pp. 61–71. <https://doi.org/10.1090/proc/13208>
9. Götze F., Koleda D., Zaporozhets D. Joint distribution of conjugate algebraic numbers: a random polynomial approach. *Advances in Mathematics*, 2020, vol. 359, art. 106849. <https://doi.org/10.1016/j.aim.2019.106849>
10. Shabat B. V. *Introduction to Complex Analysis. Part II. Functions of several variables*, second ed. Moscow, 1976. 400 p. (in Russian).

Информация об авторе

Колёда Денис Владимирович – канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотрудник. E-mail: koledad@rambler.ru.

Information about the author

Koleda Denis V. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Senior Researcher. E-mail: koledad@rambler.ru.