

ISSN 1561-8323 (Print)

ISSN 2524-2431 (Online)

УДК 517.986.2, 515.145.2

<https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-4-280-285>

Поступило в редакцию 09.07.2026

Received 09.07.2026

И. Л. Люксембург

*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
ул. Сурганова, 11, 220072, Минск, Республика Беларусь*

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА МАКСИМАЛЬНЫХ ИДЕАЛОВ В ВИДЕ РАССЛОЕННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гореховиком)

Аннотация. Исследована связь топологической структуры пространства максимальных идеалов коммутативной C^* -алгебры с топологическими структурами пространств максимальных идеалов ее подалгебр. Доказана теорема о вложении спектра рассматриваемой алгебры в расслоенное произведение спектров ее подалгебр. Сформулирован критерий совпадения спектра с указанным расслоенным произведением. В качестве приложения рассмотренный метод применен для описания топологии спектров алгебр разрывных функций.

Ключевые слова: разрывная функция, банахова алгебра, функциональная алгебра, преобразование Гельфанда, пространство максимальных идеалов, расслоенное произведение, конфлюэнтный спектр

Для цитирования. Люксембург, И. Л. Представление пространства максимальных идеалов в виде расслоенного произведения / И. Л. Люксембург // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2026. – Т. 70, № 4. – С. 280–285. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-4-280-285>

Josef L. Luxemburg

*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus*

REPRESENTATION OF THE MAXIMAL IDEAL SPACE AS A FIBER PRODUCT

(Communicated by Corresponding Member V. V. Gorokhovik)

Abstract. This paper investigates the relationship between the topological structure of the maximal ideal space of a commutative C^* -algebra and the topological structures of the maximal ideal spaces of its subalgebras. A theorem is proved regarding the embedding of the spectrum of the algebra under consideration into the fiber product of the spectra of its subalgebras. A criterion for the coincidence of the spectrum with the specified fiber product is formulated. As an application, the method described above is used to describe the topology of the spectra of algebras of discontinuous functions.

Key words: discontinuous function, Banach algebra, function algebra, Gelfand transform, maximal ideal space, fiber product, confluent spectrum

For citation. Luxemburg J. L. Representation of the maximal ideal space as a fiber product. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2026, vol. 70, no. 4, pp. 280–285. <https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-4-280-285>

Введение. Согласно теории И. М. Гельфанда [1], каждая коммутативная C^* -алгебра $\mathcal{A}$ изоморфна алгебре всех непрерывных комплексно-значных функций на компактном пространстве $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$, которое называется спектром (пространством максимальных идеалов) алгебры.

Топологическая структура пространства $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ тесно связана со структурой алгебры $\mathcal{A}$ и свойствами ее элементов. Некоторые из таких связей установлены, например в [2–6]. Одним из примеров C^* -алгебр являются алгебры функций, определенных на некотором множестве X . Если на X задана топология, то алгебра $\mathcal{A}(X)$ может включать разрывные функции. В такой ситуации спектр содержит информацию о виде допустимых разрывов функций, входящих в $\mathcal{A}(X)$. Такие алгебры, в частности, возникают при исследовании уравнений с разрывными коэффициентами.

Одним из инструментов исследования алгебр операторов с разрывными коэффициентами является локальный метод. Суть этого подхода заключается в изучении исходной алгебры через ее фактор-алгебры (локальные алгебры), параметризованные точками пространства максимальных идеалов некоторой коммутативной подалгебры коэффициентов. В частности, этот метод применен в работе И. В. Байбулова [7] для перечисления примитивных идеалов C^* -алгебры сингулярных интегральных операторов, коэффициенты которых допускают разрывы первого рода. Локальный метод позволяет получить условие обратимости элементов и построить множество максимальных идеалов, однако гельфандовская топология на этом множестве, вообще говоря, не восстанавливается однозначно по локальным представителям. В связи с этим возникает задача восстановления топологической структуры спектра на основе информации о спектрах ее подалгебр или других подструктур.

Спектр $\mathfrak{M}(A)$ алгебры A состоит из ненулевых линейных мультипликативных функционалов. Исторически в теории банаховых алгебр спектр определялся как пространство максимальных идеалов. Однако в современной литературе чаще используется эквивалентный подход, рассматривающий спектр как пространство мультипликативных функционалов – подмножество в сопряженном пространстве A^* , наделенное $*$ -слабой топологией. Такое отождествление корректно, поскольку ядро любого такого функционала представляет собой максимальный идеал, а фактор-отображение по максимальному идеалу естественным образом задает мультипликативный функционал. В рамках данной работы нам будет удобно пользоваться именно мультипликативными функционалами.

Сужение мультипликативного функционала на любую подалгебру алгебры A также является мультипликативным функционалом. Поэтому спектр коммутативной C^* -алгебры A вкладывается в произведение спектров ее подалгебр, порождающих алгебру A . В настоящей работе получено усиление данного наблюдения, а именно – установлено вложение спектра алгебры A в расслоенное произведение спектров образующих ее подалгебр. Приведен критерий совпадения спектра алгебры с указанным расслоенным произведением. В качестве приложения рассмотренный метод применен для описания топологии спектров алгебр разрывных функций.

Основная часть. Пусть $\{Z_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ – семейство топологических пространств и $\prod_{\gamma \in \Gamma} Z_\gamma$ – их произведение, снабженное тихоновской топологией. Пусть F – топологическое пространство и для каждого γ задано непрерывное отображение $p_\gamma : Z_\gamma \rightarrow F$. Расслоенным (веерным) произведением [8] семейства $\{Z_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ над базой F относительно отображений $\{p_\gamma\}$ называется подпространство P произведения $\prod_{\gamma \in \Gamma} Z_\gamma$, определенное как

$$P = \left\{ (z_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \prod_{\gamma \in \Gamma} Z_\gamma \mid \exists b \in F : \forall \gamma \in \Gamma, p_\gamma(z_\gamma) = b \right\}.$$

Пусть A – коммутативная C^* -алгебра. Пусть $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ – семейство её C^* -подалгебр, такое, что A является наименьшей C^* -алгеброй, содержащей объединение $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ (т. е. $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ порождает A), и B – C^* -подалгебра, $B \subset \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$. Далее в тексте все упоминаемые алгебры и их подалгебры автоматически предполагаются C^* -алгебрами.

Обозначим через $\mathfrak{M}(A)$, $\mathfrak{M}(A_\gamma)$ и $\mathfrak{M}(B)$ спектры соответствующих алгебр. Для каждого $\gamma \in \Gamma$ определены канонические отображения сужения (проекции):

$$\begin{aligned} r_\gamma : \mathfrak{M}(A) &\rightarrow \mathfrak{M}(A_\gamma), r_\gamma(\mu) = \mu|_{A_\gamma}; \\ p_\gamma : \mathfrak{M}(A_\gamma) &\rightarrow \mathfrak{M}(B), p_\gamma(\mu) = \mu|_B. \end{aligned}$$

Рассмотрим расслоенное произведение P пространств $\mathfrak{M}(A_\gamma)$ над базой $\mathfrak{M}(B)$ относительно семейства отображений $\{p_\gamma\}$; и отображение:

$$\Psi: \mathfrak{M}(A) \rightarrow P, \quad \Psi(\mu) = (r_\gamma(\mu))_{\gamma \in \Gamma}. \quad (1)$$

Непосредственно из определения проекций r_γ и p_γ следует корректность определения отображения Ψ . Отображение Ψ инъективно, так как по предположению семейство $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ порождает A .

Т е о р е м а 1. *Отображение $\Psi: \mathfrak{M}(A) \rightarrow P$, заданное формулой (1), является гомеоморфизмом пространства $\mathfrak{M}(A)$ на его образ в P , т. е. $\mathfrak{M}(A)$ топологически вкладывается в расслоенное произведение спектров образующих подалгебр.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Инъективность отображения Ψ следует из его определения. Проверим его непрерывность.

Напомним, что для алгебры D , предбаза топологии на $\mathfrak{M}(D)$ в точке $\mu_0 \in \mathfrak{M}(D)$ состоит из окрестностей вида

$$W(\mu_0)_{[a; \varepsilon]} = \{\mu \in \mathfrak{M}(D) : |\mu(a) - \mu_0(a)| < \varepsilon\},$$

где $a \in D$, $\varepsilon > 0$.

Топология произведения $\prod_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{M}(A_\gamma)$ задается предбазой, состоящей из множеств вида $O(\gamma_0; U)$, где $\gamma_0 \in \Gamma$, $U \in \tau(\mathfrak{M}(A_{\gamma_0}))$, каждое из которых состоит из элементов произведения, координаты с индексами γ_0 которых содержатся в открытом множестве U в $\mathfrak{M}(A_{\gamma_0})$. Достаточно рассмотреть случай, когда U – элементарная окрестность в $\tau(\mathfrak{M}(A_{\gamma_0}))$.

Пусть $h_0 = r_{\gamma_0}(\mu_0)$ и $a \in A_{\gamma_0}$, рассмотрим окрестность в $\mathfrak{M}(A_{\gamma_0})$:

$$V = W(\mu_0)_{[a; \varepsilon]} = \{\mu \in \mathfrak{M}(A_{\gamma_0}) : |\mu(a) - \mu_0(a)| < \varepsilon\}.$$

Прообраз множества $P \cap O(\gamma_0; V)$ при отображении Ψ есть:

$$\Psi^{-1}(P \cap O(\gamma_0; V)) = \{\mu \in \mathfrak{M}(A) : r_{\gamma_0}(\mu) \in V\}.$$

Подставляя определение V и учитывая, что $r_{\gamma_0}(\mu)(a) = \mu(a)$ (так как $a \in A_{\gamma_0}$), получаем

$$\Psi^{-1}(P \cap O(\gamma_0; V)) = \{\mu \in \mathfrak{M}(A) : |\mu(a) - \mu_0(a)| < \varepsilon\}.$$

Это множество есть в точности окрестность $W(\mu_0)_{[a; \varepsilon]}$ в пространстве $\mathfrak{M}(A)$. Таким образом, прообраз любого элемента предбазы открыт, значит отображение Ψ непрерывно. Таким образом, Ψ – непрерывная инъекция компактного пространства $\mathfrak{M}(A)$ на хаусдорфово пространство P . Следовательно, $\mathfrak{M}(A)$ гомеоморфно $\Psi(\mathfrak{M}(A))$ (по теореме Александрова о гомеоморфизме).

Отметим, что в общем случае $\Psi(\mathfrak{M}(A)) \neq P$.

П р и м е р 1. Рассмотрим алгебру $A = C[0; 1]$ и две ее образующих подалгебры A_1 и A_2 , где A_1 – алгебра функций, являющихся константами на отрезке $[0; 1/2]$ и A_2 – алгебра функций, являющихся константами на отрезке $[1/2; 1]$. Пусть $B = A_1 \cap A_2$ – алгебра констант. В данном случае база $\mathfrak{M}(B)$ состоит лишь из одной точки, поэтому расслоенное произведение P совпадает с декартовым произведением $\mathfrak{M}(A_1) \times \mathfrak{M}(A_2)$, которое гомеоморфно квадрату, и не совпадает с $\mathfrak{M}(A)$, которое гомеоморфно отрезку.

Следующая теорема является критерием совпадения пространства максимальных идеалов $\mathfrak{M}(A)$ с соответствующим расслоенным произведением P .

Т е о р е м а 2. *Равенство $\Psi(\mathfrak{M}(A)) = P$ справедливо тогда и только тогда, когда всякий мультипликативный функционал $\mu \in \mathfrak{M}(B)$ имеет не единственное продолжение разве лишь на одну из алгебр A_γ . Если $\Psi(\mathfrak{M}(A)) = P$ то $B = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$.*

Прежде чем обсудить идею доказательства теоремы 2, рассмотрим ее применение к функциональным алгебрам. Пусть X – компактное хаусдорфово пространство и R – алгебра всех ограниченных комплексно-значных функций на X с равномерной нормой. Пусть для каждой точки $x \in X$ задана алгебра $A_x \subseteq R$, такая что $C(X) \subseteq A_x$, и все функции из A_x непрерывны на $X \setminus \{x\}$. Пусть $A \subseteq R$ – наименьшая подалгебра, содержащая объединение $\bigcup_{x \in X} A_x$.

Известно, что $\mathfrak{M}(C(X))$ гомеоморфно X , далее будем отождествлять эти пространства. Определим отображение:

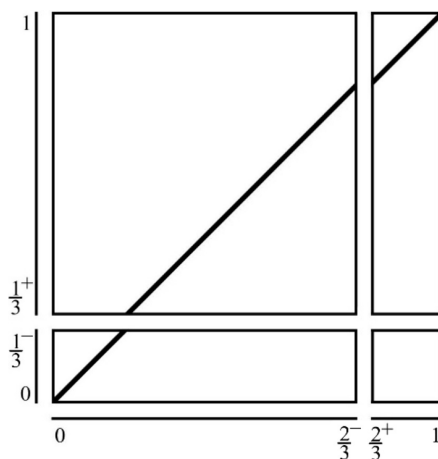
$$\pi_x : \mathfrak{M}(A_x) \rightarrow X, \quad \pi_x(\mu) = \mu|_{C(X)}.$$

Применяя к рассматриваемой функциональной алгебре A теорему 2 получаем

С л е д с т в и е. *Пространство максимальных идеалов $\mathfrak{M}(A)$ гомеоморфно расслоенному произведению P пространств $\mathfrak{M}(A_x)$ над базой X относительно семейства отображений $\{\pi_x\}_{x \in X}$.*

Проиллюстрируем суть данного следствия на примере.

П р и м е р 2. Пусть A_1, A_2 – алгебры функций на $[0; 1]$, A_1 состоит из непрерывных слева и имеющих предел справа в $1/3$ и непрерывных в остальных точках функций, а A_2 состоит из непрерывных слева и имеющих предел справа в $2/3$ и непрерывных в остальных точках функций. Пусть $B = A_1 \cap A_2 = C[0; 1]$. Алгебры A_1 и A_2 являются образующими алгебры A , состоящей из непрерывных слева и имеющих предел справа в $1/3$ и $2/3$ и непрерывных в остальных точках функций. Пространствами максимальных идеалов являются $\mathfrak{M}(A_1) = [0; 1/3^-] \sqcup [1/3^+; 1]$, $\mathfrak{M}(A_2) = [0; 2/3^-] \sqcup [2/3^+; 1]$. Рассмотрим расслоенное произведение P пространств $\mathfrak{M}(A_1)$ и $\mathfrak{M}(A_2)$ относительно естественных проекций на $\mathfrak{M}(C[0; 1]) = [0; 1]$. На рисунке показано, как расслоенное произведение P , гомеоморфное $\mathfrak{M}(A) = [0; 1/3^-] \sqcup [1/3^+; 2/3^-] \sqcup [2/3^+; 1]$, вложено в декартово произведение пространств $\mathfrak{M}(A_1)$ и $\mathfrak{M}(A_2)$.



Доказательство теоремы 2 в качестве ключевого объекта использует понятие конфлюэнтного спектра. Пусть D – подалгебра в A . **Конфлюэнтным спектром** $\mathfrak{M}_{D \subset A}$ алгебры A относительно подалгебры D будем называть множество $\mathfrak{M}(A)$, наделенное слабой топологией, относительно которой непрерывны функции из D (в этот момент мы отождествляем A с ее вложением в $C(\mathfrak{M}(A))$). Пространство $\mathfrak{M}_{D \subset A}$ обладает более слабой (кроме случая $D = A$) топологией, чем $\mathfrak{M}(A)$, оно компактно, но не хаусдорфово.

Термин «конфлюэнтный» (от лат. confluent – сливающийся) отражает факт, что при переходе к более слабой топологии точки спектра $\mathfrak{M}(A)$, в которых функции из подалгебры D принимают одинаковые значения, «сливаются» (склеиваются) друг с другом.

Введем отношение эквивалентности на $\mathfrak{M}_{D \subset A}$. Функционалы $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}(A)$ называются **неотделимыми** (с помощью алгебры D), если $\mu_1(a) = \mu_2(a)$ для всех $a \in D$, т. е. $\mu_1|_D = \mu_2|_D$.

Классы эквивалентности по этому отношению будем называть *компонентами неотделимости*. Фактор-пространство $\mathfrak{M}_{D \subset A}$ по компонентам неотделимости является хаусдорфовым и компактным и гомеоморфно классическому спектру $\mathfrak{M}(D)$ алгебры D .

В условиях теоремы 1 рассмотрим семейство конфлюэнтных спектров $\{\mathfrak{M}_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$, $\mathfrak{M}_\gamma = \mathfrak{M}_{A_\gamma \subset A}$, их произведение $\prod_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{M}_\gamma$ и расслоенное произведение P_C над базой $\mathfrak{M}_{B \subset A}$ относительно тождественных отображений: $i_\gamma : \mathfrak{M}_\gamma \rightarrow \mathfrak{M}_{B \subset A}$, непрерывных в силу ослабления топологии. В этом случае P_C состоит из элементов $\prod_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{M}_\gamma$, все координаты которых совпадают, такое подмножество называется диагональю D произведения. Далее нам потребуются некоторые дополнительные факты о диагонали.

Пусть имеется декартова степень $\prod X$ одного и того же множества X . Обозначим через $\bar{x}$ — элемент $\prod X$, все координаты которого равны x . Диагональ, как подмножество произведения, естественно отождествляется с самим множеством X посредством отображения $x \rightarrow \bar{x}$. Если на каждом множестве X задана некоторая топология τ_α , индуцированная топология диагонали в $\prod (X, \tau_\alpha)$ равна супремуму топологий $\sup_{\alpha \in A} \tau_\alpha$. Этот факт вытекает непосредственно из определения тихоновской топологии.

Из изложенного выше следует, что P_C гомеоморфно $\mathfrak{M}(A)$. Обозначим фактор-отображения, сопоставляющие точке ее компоненту неотделимости через $q_\gamma : \mathfrak{M}_{A_\gamma \subset A} \rightarrow \mathfrak{M}(A_\gamma)$. Семейство отображений $\{q_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ порождает естественное отображение произведений $\Phi : \prod_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{M}_\gamma \rightarrow \prod_{\gamma \in \Gamma} \mathfrak{M}(A_\gamma)$.

Отображение Φ непрерывно и сюръективно, поскольку непрерывно и сюръективно каждое q_γ . Сужение $\Phi|_{P_C}$ инъективно и $\Phi(P_C) \subset P$, а в случае выполнения условия теоремы 2 — $\Phi(P_C) = P$. Значит P_C гомеоморфно P (по теореме Александрова о гомеоморфизме), ранее мы установили гомеоморфизм P_C и $\mathfrak{M}(A)$, получаем, что P гомеоморфно $\mathfrak{M}(A)$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке НАН Беларуси в рамках государственной программы «Конвергенция–2030» (задание 1.08.1).

Acknowledgments. This work was supported by the National Academy of Sciences of Belarus within the framework of the state program “Convergence–2030” (task 1.08.1).

Список использованных источников

1. Гельфанд, И. М. Коммутативные нормированные кольца / И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Г. Е. Шиллов. — М., 1960. — 315 с.
2. Вечтомов, Е. М. Кольца непрерывных функций. Алгебраические аспекты / Е. М. Вечтомов // Итоги науки и техники. Серия: Алгебра. Топология. Геометрия. — 1991. — Т. 29. — С. 119–191.
3. Gillman, L. Rings of Continuous Functions / L. Gillman, M. Jerison. — New York, 1960. — 300 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-7819-2>
4. Келли, Дж. Л. Общая топология / Дж. Л. Келли. — М., 1981. — 432 с.
5. Myers, S. B. Normed linear spaces of continuous functions / S. B. Myers // Annals of Mathematics. — 1950. — Vol. 51, N 3. — P. 528–540.
6. Агеев, С. М. Функциональные методы в теории абсолюта / С. М. Агеев // Успехи математических наук. — 1983. — Т. 38, № 5. — С. 177–178.
7. Байбулов, И. В. О представлениях C^* -алгебры сингулярных интегральных операторов на сложном контуре с разрывными полу-почти-периодическими коэффициентами / И. В. Байбулов // Известия Российской академии наук. Серия математическая. — 2025. — Т. 89, № 6. — С. 45–84. <https://doi.org/10.4213/im9665>
8. Александров, П. С. Введение в теорию размерности / П. С. Александров, Б. А. Пасынков. — М., 1973. — 576 с.

References

1. Gel'fand I. M., Raikov D. A., Shilov G. E. *Commutative Normed Rings*. Moscow, 1960. 315 p. (in Russian).
2. Vechtomov E. M. Rings of Continuous Functions. Algebraic Aspects. *Journal of Mathematical Sciences*, 1994, vol. 71, no. 2, pp. 2364–2408. <https://doi.org/10.1007/bf02111022>
3. Gillman L., Jerison M. *Rings of Continuous Functions*. New York, 1960. 300 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4615-7819-2>

4. Kelley J. L. *General Topology*. New York, 1955. 298 p.
5. Myers S. B. Normed linear spaces of continuous functions. *Annals of Mathematics*, 1950, vol. 51, no. 3, pp. 528–540.
6. Ageev S. M. Functional methods in the theory of the absolute. *Russian Mathematical Surveys*, 1983, vol. 38, no. 5, pp. 131–132. <https://doi.org/10.1070/rm1983v038n05abeh003503>
7. Baibulov I. V. On the representations of the C^* -algebra of singular integral operators on a complex contour with discontinuous semi-almost periodic coefficients. *Izvestiya: Mathematics*, 2025, vol. 89, no. 6, pp. 1125–1162. <https://doi.org/10.4213/im9665>
8. Aleksandrov P. S., Pasynkov B. A. *Introduction to Dimension Theory*. Moscow, 1973. 576 p. (in Russian).

Информация об авторе

Люксембург Иосиф Леонович – мл. науч. сотрудник.
E-mail: josef2016kolbasidze@mail.ru. ORCID: 0009-0002-7156-4869.

Information about the author

Luxemburg Josef L. – Junior Researcher. E-mail: josef2016kolbasidze@mail.ru. ORCID: 0009-0002-7156-4869.