ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

МАТЕМАТИКА
MATHEMATICS

УДК 517.977
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-5-359-363

Поступило в редакцию 15.06.2026
Received 15.06.2026

А. И. Калинин, Л. И. Лавринович

Белорусский государственный университет, Минск, Республика Беларусь
пр. Независимости, 4, 220030, Минск, Республика Беларусь

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ К ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ С БОЛЬШОЙ ДЛИТЕЛЬНОСТЬЮ ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

Аннотация. Рассмотрена задача оптимизации переходного процесса большой продолжительности в линейной сингулярно возмущенной системе, которая состоит в нахождении многомерного допустимого управления с наименьшим значением интегрального квадратичного критерия качества. Ее можно трактовать как задачу управления с минимальными энергетическими затратами. Настоящая задача путем перехода к «медленному» времени сводится к задаче оптимизации сингулярно возмущенной системы с двумя группами разнотемповых быстрых переменных при отсутствии медленных переменных. С помощью подхода, опирающегося на принцип максимума и метод пограничных функций, строится асимптотическое приближение к решению этой задачи в виде суммы оптимальных управлений в двух невозмущенных задачах меньшей размерности с бесконечной длительностью процесса.

Ключевые слова: линейно-квадратичная задача, сингулярно возмущенная система, оптимальное управление, асимптотическое приближение

Для цитирования. Калинин, А. И. Применение метода возмущений к задаче оптимизации линейной сингулярно возмущенной системы с большой длительностью процесса управления / А. И. Калинин, Л. И. Лавринович // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2026. – Т. 70, № 5. – С. 359–363. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-5-359-363

Anatoliy I. Kalinin, Leonid I. Lavrinovich

Belarusian State University, Minsk, Republic of Belarus
4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus

APPLICATION OF PERTURBATION METHOD TO OPTIMIZATION PROBLEM OF LINEAR SINGULARLY PERTURBED SYSTEM WITH LONG DURATION OF CONTROL PROCESSS

(Communicated by Corresponding Member Valentin V. Gorokhovik)

Abstract. The paper considers the problem of optimizing a long-term transient process in a linear singularly perturbed system, which consists of finding a multidimensional admissible control with the minimal value of an integral quadratic performance index. This problem can be interpreted as a control problem with minimal energy consumption. By passing to “slow time”, the problem is reduced to that of optimizing a singularly perturbed system with two groups of fast variables at different rates in the absence of slow variables. Using an approach based on the maximum principle and the method of boundary functions, an asymptotic approximation to the solution of this problem is constructed as a sum of optimal controls in two unperturbed problems of lower dimension with infinite process duration.

Keywords: linear-quadratic problem, singularly perturbed systems, optimal control, asymptotic approximation

For citation. Kalinin A. I., Lavrinovich L. I. Application of perturbation method to optimization problem of linear singularly perturbed system with long duration of control process. *Doklady Natsional’noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2026, vol. 70, no. 5, pp. 359–363 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-5-359-363

© Калинин А. И., Лавринович Л. И., 2026

Введение. В математической теории оптимальных процессов значительное внимание уделяется асимптотическим методам оптимизации сингулярно возмущенных систем, содержащих малые параметры при части производных [1; 2]. Как известно, численное решение задач оптимального управления предполагает неоднократное интегрирование прямой и сопряженной систем. В сингулярно возмущенных задачах эти динамические системы являются жесткими и, как следствие, при вычислениях возникают серьезные трудности, выражающиеся в недопустимо большом времени счета и неизбежном накоплении вычислительных ошибок. При этом численное интегрирование на больших временных промежутках сингулярно возмущенных систем только усложняется. Поэтому возрастает роль асимптотических методов тем более, что при их применении происходит декомпозиция исходной задачи оптимального управления на задачи меньшей размерности.

В задачах с малыми управляющими воздействиями эффективным средством преодоления этих трудностей могут оказаться асимптотические методы типа усреднения [3–5]. Предлагаемый в настоящем сообщении подход, который опирается на результаты теории сингулярно возмущенных систем, не требует малости управляющих воздействий.

Постановка задачи. В классе r-мерных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in [0, T/\mu]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассмотрим следующую задачу оптимизации линейной стационарной системы:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= A_1 x + B_1 y + D_1 u, \;\; x(0) = x_0, \\ \mu\dot{y} &= A_2 x + B_2 y + D_2 u, \;\; y(0) = y_0, \end{aligned} \tag{1}$$

$$x(T/\mu) = x_*, \;\; y(T/\mu) = y_*, \tag{2}$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{T/\mu} u^{\mathrm{T}} P u dt \to \min, \tag{3}$$

где μ – малый положительный параметр; x – n-вектор медленных переменных; y – m-вектор быстрых переменных. Остальные элементы задачи имеют соответствующие размеры. В критерии качества (3) P – положительно-определенная симметрическая матрица.

П р е д п о л о ж е н и е 1. Действительные части всех собственных значений матриц $A_0 = A_1 - B_1 B_2^{-1} A_2$ и B_2 отрицательны.

О п р е д е л е н и е. Управление $u(t, \mu)$, $t \in [0, T/\mu]$, с кусочно-непрерывными компонентами назовем асимптотически субоптимальным в задаче (1)–(3), если для любого натурального числа N имеет место

$$\lim_{\mu \to 0} \frac{J(u(\cdot, \mu)) - J(u^0(\cdot, \mu))}{\mu^N} = 0, \;\; \lim_{\mu \to 0} \frac{z(T/\mu, \mu) - z_*}{\mu^N} = 0,$$

где $u^0(t, \mu)$, $t \in [0, T/\mu]$, – оптимальное управление в задаче (1)–(3), а $z(t, \mu) = (x(t, \mu), y(t, \mu))$, $t \in [0, T/\mu]$, – траектория системы (1), порожденная управлением $u(t, \mu)$, $t \in [0, T/\mu]$, $z_* = (x_*, y_*)$.

Переходя к «медленному» времени запишем задачу (1)–(3) в виде

$$\begin{aligned} \mu\dot{x} &= A_1 x + B_1 y + D_1 u, \;\; x(0) = x_0, \\ \mu^2\dot{y} &= A_2 x + B_2 y + D_2 u, \;\; y(0) = y_0, \end{aligned} \tag{4}$$

$$x(T) = x_*, \;\; y(T) = y_*, \tag{5}$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{T} u^{\mathrm{T}} P u dt \to \min. \tag{6}$$

Базовые задачи. Ниже будет показано, что построение асимптотически субоптимального управления в задаче (1)–(3) сводится к решению двух невозмущенных задач оптимального управления меньшей размерности. Будем называть эти задачи базовыми. Первой из них является следующая задача:

$$\frac{dx}{ds} = A_0 x + D_0 u,\ \ x(0) = x_*,$$
$$x(-\infty) = 0,\ \ J_1(u) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} u^{\mathrm{T}} P u ds \to \min, \tag{7}$$

где $D_0 = D_1 - B_1 B_2^{-1} D_2$.

П р е д п о л о ж е н и е 2. Динамическая система в первой базовой задаче вполне управляема [6].

При выполнении этого предположения первая базовая задача имеет единственное решение, которое является нормальной экстремалью [7]. В этом случае принцип максимума [8] для нее может быть сформулирован следующим образом: пусть $u^*(s)$, $x^*(s)$, $s \le 0$, – оптимальные управление и траектория в задаче (7), тогда существует такое решение $\Pi\psi(s)$, $s \le 0$, сопряженной системы

$$\frac{d\Pi\psi}{ds} = -A_0^{\mathrm{T}} \Pi\psi,$$

что выполняется условие

$$\Pi\psi^{\mathrm{T}}(s) D_0 u^*(s) - \frac{1}{2} u^{*\mathrm{T}}(s) P u^*(s) = \max_{u \in R^r} \left(\Pi\psi^{\mathrm{T}}(s) D_0 u - \frac{1}{2} u^{\mathrm{T}} P u \right),\ \ s \le 0.$$

Отсюда непосредственно следует $u^*(s) = P^{-1} D_0^{\mathrm{T}} \Pi\psi(s),\ s \le 0$. Положим $\nu_0 = \Pi\psi(0)$.

Вторая базовая задача имеет вид

$$\frac{dy}{d\tau} = B_2 y + D_2 u,\ y(0) = y_* + B_2^{-1}(A_2 x_* + D_2 u^*(0)),$$
$$y(-\infty) = 0,\ \ J_2(u) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} u^{\mathrm{T}} P u d\tau \to \min. \tag{8}$$

П р е д п о л о ж е н и е 3. Динамическая система во второй базовой задаче вполне управляема.

При выполнении этого предположения вторая базовая задача имеет единственное решение, которое является нормальной экстремалью. В этом случае принцип максимума для нее может быть сформулирован следующим образом: пусть $u_*(\tau)$, $y_*(\tau)$, $\tau \le 0$, – оптимальные управление и траектория в задаче (8), тогда существует такое решение $Q\psi(\tau)$, $\tau \le 0$, системы

$$\frac{dQ\psi}{d\tau} = -B_2^{\mathrm{T}} Q\psi,$$

что выполняется условие

$$Q\psi^{\mathrm{T}}(\tau) B_2 u_*(\tau) - \frac{1}{2} u_*^{\mathrm{T}}(\tau) P u_*(\tau) = \max_{u \in R^r} \left(Q\psi^{\mathrm{T}}(\tau) B_2 u - \frac{1}{2} u^{\mathrm{T}} P u \right),\ \ \tau \le 0.$$

Отсюда непосредственно следует $u_*(\tau) = P^{-1} B_2^{\mathrm{T}} Q\psi(\tau),\ \ \tau \le 0$. Положим $\chi_0 = Q\psi(0)$.

После решения базовых задач найдем вектор $\eta_0 = \chi_0 + (B_1 B_2^{-1})^{\mathrm{T}} \nu_0$.

Построение асимптотически субоптимального управления. Понятно, что говорить об асимптотическом субоптимальном управлении можно лишь в том случае, когда задача имеет решение. Покажем, что при выполнении предположений 1–3 задача (4)–(6) с достаточно малым μ имеет единственное решение, которое является нормальной экстремалью. В этом случае принцип максимума для нее допускает следующую формулировку: пусть $u^0(t, \mu),\ t \in [0, T]$, – оптимальное управление в задаче (4)–(6), тогда существует такое решение $\psi_1(t, \mu),\ \psi_2(t, \mu),\ t \in [0, T]$, сопряженной системы

$$\mu\dot{\psi}_1 = -A_1^{\mathrm{T}} \psi_1 - A_2^{\mathrm{T}} \psi_2,$$
$$\mu^2 \dot{\psi}_2 = -B_1^{\mathrm{T}} \psi_1 - B_2^{\mathrm{T}} \psi_2, \tag{9}$$

что

$$u^0(t, \mu) = P^{-1}(D_1^{\mathrm{T}} \psi_1(t, \mu) + D_2^{\mathrm{T}} \psi_2(t, \mu)),\ \ t \in [0, T]. \tag{10}$$

Обозначим через $\psi_1(t, \nu, \eta, \mu)$, $\psi_2(t, \nu, \eta, \mu)$, $t \in [0, T]$, решение сопряженной системы (9) с начальными условиями

$$\psi_1(T) = \nu, \ \psi_2(T) = \eta. \tag{11}$$

Пусть далее $x(t, \nu, \eta, \mu)$, $y(t, \nu, \eta, \mu)$, $t \in [0, T]$, – траектория системы (4), порожденная управлением

$$u(t, \nu, \eta, \mu) = P^{-1}(D_1^{\mathrm{T}}\psi_1(t, \nu, \eta, \mu) + D_2^{\mathrm{T}}\psi_2(t, \nu, \eta, \mu)), \ t \in [0, T].$$

Поскольку управление (10) является допустимым в задаче (4)–(6), то векторы $\nu(\mu) = \psi_1(T, \mu)$, $\eta(\mu) = \psi_2(T, \mu)$ будут решением системы уравнений

$$x(T, \nu, \eta, \mu) - x_* = 0, \ y(T, \nu, \eta, \mu) - y_* = 0$$

при достаточно малых μ. Введя обозначения

$$\lambda = (\nu, \eta), \ \lambda_0 = (\nu_0, \eta_0),$$

$$R(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} x(t^*, \lambda, \mu) - x_* \\ y(t^*, \lambda, \mu) - y_* \end{pmatrix},$$

запишем эту систему в виде

$$R(\lambda, \mu) = 0. \tag{12}$$

При выполнении предположения 1 левая часть системы (12) может быть разложена в асимптотический ряд по целым степеням μ путем применения метода пограничных функций [9] к системе дифференциальных уравнений (4), (9), (11). Оказывается, что

$$R(\lambda, \mu) = R_0(\lambda) + \Pi R(\lambda, \mu).$$

Здесь

$$R_0(\lambda) =$$

$$= \begin{pmatrix} \int\limits_{-\infty}^{0} G(s) D_0 P^{-1} D_0^{\mathrm{T}} \Pi_0 \psi_1(s, \lambda) ds, \\ \int\limits_{-\infty}^{0} -B_2^{-1} A_2 G(s) D_0 P^{-1} D_0^{\mathrm{T}} \Pi_0 \psi_1(s, \lambda) ds + \int\limits_{-\infty}^{0} G_1(\tau) D_2 P^{-1} (D_0^{\mathrm{T}} \Pi_0 \psi_1(0, \lambda) + D_3^{\mathrm{T}} Q_0 \psi_2(\tau, \lambda)) d\tau \end{pmatrix},$$

где $\Pi_0\psi(s, \lambda) = G^{\mathrm{T}}(s)v$, $s \le 0$, $Q_0\psi(\tau, \lambda) = G_1^{\mathrm{T}}(\tau)\eta$, $\tau \le 0$, $G(s)$, $s \le 0$, – решение начальной задачи

$$\frac{dG}{ds} - GA_0, \ G(0) = E_n,$$

$G_1(\tau)$, $\tau \le 0$, – решение системы

$$\frac{dG}{ds} - G_1 B_2, \ G(0) = E_n.$$

Отметим как существенный факт то, что $\lim\limits_{\mu \to 0} (\Pi R(\lambda, \mu) / \mu^N) = 0$ при любом натуральном N.

Доопределим $R(\lambda, 0) = R_0(\lambda)$. Легко убедиться в том, что $R_0(\lambda_0) = 0$, а матрица Якоби $\partial R_0(\lambda_0) / \partial \lambda$ при выполнении предположений 2, 5 является невырожденной. Тогда, согласно теореме о неявной функции, система уравнений (12) при достаточно малых μ имеет единственное решение $\lambda(\mu)$, при этом

$$\lim_{\mu \to 0} \frac{\lambda(\mu) - \lambda_0}{\mu^N} = 0 \tag{13}$$

для любого натурального N. Из того, как сформирована система (12) видно, что управление $u(t, \lambda(\mu), \mu)$, $t \in [0, T]$, является единственной нормальной экстремалью в задаче (4)–(6). Как

следствие, оно будет единственным решением этой задачи. Тогда в силу (13) $u(t, \lambda_0, \mu)$, $t \in [0, T]$, – асимптотически субоптимальное управление. Заметим, что

$$u(t, \lambda_0, \mu) = u^*((t-T)/\mu) + u_*((t-T)/\mu^2), \ t \in [0, T].$$

Сформулируем полученные результаты применительно к исходной задаче.

Т е о р е м а. *При выполнении предположений 1–3 задача (1)–(3) имеет единственное решение, которое является нормальной экстремалью, а управление*

$$u(t, \mu) = u^*((\mu t - T)/\mu) + u_*((\mu t - T)/\mu^2), \ t \in [0, T/\mu],$$

где $u^*(s)$, $s \le 0$, $u_*(\tau)$, $\tau \le 0$, *– соответственно решения первой и второй базовых задач, является асимптотически субоптимальным.*

Заметим, что в случае, когда $x_* = 0$, $y_* = 0$, асимптотически субоптимальным будет нулевое управление.

Заключение. Предложена вычислительная процедура построения асимптотических приближений к решению рассмотренной задачи в виде суммы решений двух невозмущенных задач оптимального управления меньшей размерности чем исходная задача. Такая декомпозиция позволяет эффективно решать задачи оптимизации динамических систем с большим числом фазовых переменных. Следует отметить, что предлагаемая процедура позволяет избежать интегрирований сингулярно возмущенных систем.

Список использованных источников

1. Дмитриев, М. Г. Сингулярные возмущения в задачах управления / М. Г. Дмитриев, Г. А. Курина // Автоматика и телемеханика. – 2006. – № 1. – С. 3–51.

2. Курина, Г. А. Сингулярно возмущенные задачи с разнотемповыми быстрыми переменными / Г. А. Курина, М. А. Калашникова // Автоматика и телемеханика. – 2022. – № 11. – С. 3–61. https://doi.org/10.31857/s0005231022110010

3. Акуленко, Л. Д. Асимптотические методы оптимального управления / Л. Д. Акуленко. – М., 1987. – 368 с.

4. Carlson, D. A. Infinite Horizon Optimal Control: Theory and Applications / D. A. Carlson, A. Yaurie. – Berlin; Heidelberg, 1987. – Vol. 290. – 259 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-02529-1

5. Плотников, В. А. Метод усреднения в задачах управления / В. А. Плотников. – Киев; Одесса, 1992. – 188 с.

6. Красовский, Н. Н. Теория управления движением / Н. Н. Красовский. – М., 1968. – 476 с.

7. Мордухович, Б. Ш. Существование оптимальных управлений / Б. Ш. Мордухович // Современные проблемы математики. – 1976. – Т. 7, № 6. – С. 207–271.

8. Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. – М., 1983. – 393 с.

9. Васильева, А. Б. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных / А. Б. Васильева // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1963. – Т. 3, № 4. – С. 611–642.

References

1. Dmitriev M. G., Kurina G. A. Singular perturbations in control problems. *Automation and Remote Control*, 2006, vol. 67, no. 1, pp. 1–43. https://doi.org/10.1134/s0005117906010012

2. Kurina G. A., Kalashnikova M. A. Singularly perturbed problems with multi-tempo fast variables. *Automation and Remote Control*, 2022, vol. 83, no. 11, pp. 1679–1723. https://doi.org/10.1134/s0005117922011001 7

3. Akulenko L. D. *Asymptotic Methods of Optimal Control*. Moscow, 1987. 368 p. (in Russian).

4. Carlson D. A., Yaurie A. *Infinite Horizon Optimal Control: Theory and Applications*. Berlin, Heidelberg, 1987, vol. 290. 259 p. https://doi.org/10.1007/978-3-662-02529-1

5. Plotnikov V. A. *Averaging Method in Control Problems*. Kiev, Odessa, 1992. 188 p. (in Russian).

6. Krasovskii N. N. *Theory of Motion Control*. Moscow, 1968. 476 p. (in Russian).

7. Mordukhovich B. Sh. Existence of optimal controls. *Journal of Soviet Mathematics*, 1976, vol. 7, no. 6, pp. 752–794.

8. Pontryagin L. S., Boltyanskii V. G., Gamkrelidze R. V., Mishchenko E. F. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York, 1962. 360 p.

9. Vasil'eva A. B. Asymptotic methods in the theory of ordinary differential equations containing small parameters in front of the higher derivatives. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 1963, vol. 3, no. 4, pp. 823–863. https://doi.org/10.1016/0041-5553(63)90381-1

Информация об авторах

Калинин Анатолий Иосифович – д-р физ.-мат. наук, профессор. E-mail: kalininai@bsu.by.

Лавринович Леонид Иванович – канд. физ.-мат. наук, доцент. E-mail: lavrinovich@bsu.by.

Information about the authors

Kalinin Anatoliy I. – D. Sc. (Physics and Mathematics), Professor. E-mail: kalininai@bsu.by.

Lavrinovich Leonid I. – Ph. D. (Physics and Mathematics), Associate Professor. E-mail: lavrinovich@bsu.by.