ISSN 1561-8323 (Print)
ISSN 2524-2431 (Online)

ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

TECHNICAL SCIENCES

УДК 536.2.001
https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-5-406-414

Поступило в редакцию 05.02.2026
Received 05.02.2026

В. А. Кот

Институт тепло- и массообмена имени А. В. Лыкова Национальной академии наук Беларуси, Минск, Республика Беларусь
ул. П. Бровки, 15, 220072, Минск, Республика Беларусь

ПРЕДЕЛЬНОЕ ГОМОТОПИЧЕСКОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ. ЗАДАЧА РАДИАЦИОННОГО ТЕПЛООБМЕНА

(Представлено членом-корреспондентом Н. В. Павлюкевичем)

Аннотация. Предложен новый подход в гомотопии, который нашел свое выражение в методе предельного гомотопического разложения (LHDM). В данном методе игнорируется одно из основных свойств известных гомотопических построений, согласно которому полностью сохраняется исходное нелинейное дифференциальное уравнение при параметре $p = 1$. В предложенном новом подходе при $p = 1$ происходит соответствующее нарушение исходного вида нелинейного дифференциального уравнений с коэффициентом перед нелинейной частью дифференциального уравнения (параметр согласования), стремящимся в пределе порядка приближения ($M \to \infty$) к единице. Такой подход позволяет находить приближенные решения краевых задач, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями, в более простой аналитической форме. На основе LHDM получено приближенное решение задачи радиационного теплообмена тонкого прямоугольного ребра. Показано, что метод LHDM дает более компактные и простые по форме аналитические решения по сравнению с соответствующими решениями основным вариантом оптимального гомотопического асимптотического метода (OHAM), причем с той же точностью. При этом значение параметра согласования C_N^M с каждым новым приближением асимптотически быстро стремится к своему предельному единичному значению. Это позволяет считать предложенный метод LHDM хорошей альтернативой основному варианту OHAM.

Ключевые слова: гомотопия, метод предельного гомотопического разложения, нелинейные дифференциальные уравнения, краевые задачи, радиационный теплообмен

Для цитирования. Кот, В. А. Предельное гомотопическое разложение. Задача радиационного теплообмена / В. А. Кот // Доклады Национальной академии наук Беларуси. – 2026. – Т. 70, № 5. – С. 406–414. https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-5-406-414

Valery A. Kot

A. V. Luikov Heat and Mass Transfer Institute of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Republic of Belarus
15, P. Brovka Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus

LIMIT HOMOTOPY DECOMPOSITION. RADIATIVE HEAT TRANSFER PROBLEM

(Communicated by Corresponding Member Nikolay V. Pavlyukevich)

Abstract. A new homotopy-based approach is proposed, embodied in the Limit Homotopy Decomposition Method (LHDM). This method departs from a fundamental property of standard homotopy constructions – namely, the requirement that the original nonlinear differential equation be fully preserved at the parameter value $p = 1$. In the proposed approach, the original form of the nonlinear differential equation is modified at $p = 1$ by introducing a coefficient (a matching parameter) multiplying the nonlinear term; this coefficient approaches unity as the order of approximation increases ($M \to \infty$). This approach enables the derivation of approximate analytical solutions for boundary-value problems governed by nonlinear differential equations in a simpler form. Using LHDM, an approximate solution was obtained for the problem of radiative heat transfer in a thin rectangular fin. It is demonstrated that LHDM yields analytical solutions that are more compact and simpler in form than those obtained via the standard version of the Optimal Homotopy Analysis Method (OHAM), while maintaining comparable accuracy. Furthermore, the matching parameter rapidly C_N^M approaches its limiting value of unity with each successive approximation. These results suggest that the proposed LHDM is a viable alternative to the standard OHAM.

Keywords: homotopy, limiting homotopy expansion method, nonlinear differential equations, boundary value problems, radiative heat transfer

For citation. Kot V. A. Limit homotopy decomposition. Radiative heat transfer problem. *Doklady Natsional'noi akademii nauk Belarusi = Doklady of the National Academy of Sciences of Belarus*, 2026, vol. 70, no. 5, pp. 406–414 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-8323-2026-70-5-406-414

© Кот В. А., 2026

Введение. Решение и анализ нелинейных задач в различных областях науки и техники вызывает в последнее время повышенный интерес. Общим аналитическим методом решения нелинейных дифференциальных уравнений является метод возмущений [1; 2], который имеет большие ограничения. Такие численно-аналитические методы, как разложение Адомиана (Adomian Decomposition Method – ADM) [3–5], вариационно-итерационный метод (Variational Iteration Method – VIM) [6] и метод гомотопического возмущения (Homotopy Perturbation Method – HPM) [7], дают относительно хорошие результаты при весьма быстрой сходимости. Каждый из названных методов имеет как сильные, так и слабые стороны. В 1992 г. был предложен метод гомотопического анализа (Homotopy Analysis Method – HAM) как аналитический метод решения нелинейных задач [8]. Независимость этого метода от малого параметра обеспечила высокую эффективность подхода при решении нелинейных дифференциальных уравнений. Благодаря HAM стало возможным эффективное управление сходимостью аппроксимационных рядов с корректировкой областей сходимости. Оптимальный гомотопический асимптотический метод (Optimal Homotopy Asymptotic Method – OHAM) – это относительно новая аналитическая процедура [9; 10]. В одном из его вариантов вместо управляющего сходимостью параметра $\hbar$ вводится функция $H(p) = c_1 p + c_2 p^2 + c_3 p + \ldots$ с несколькими коэффициентами, которые подлежат определению.

Настоящая работа ставит целью дальнейшее развитие гомотопических подходов к решению нелинейных краевых задач, возникающих, прежде всего, в сложных теплофизических процессах. Предлагается метод предельных гомотопических разложений (Limit Homotopy Decompositions Method – LHDM), с помощью которого можно быстро и в более простой аналитической форме получать решения нелинейных краевых задач с заданным порядком приближения.

Предельное гомотопическое разложение. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\mathcal{N}[u(x)] + g(x) = 0, \quad x \in [x_1, x_2], \tag{1}$$

с дополнительными ограничениями

$$B(u(x)) = 0,$$

где $\mathcal{N}(\cdot)$ – общий нелинейный оператор, который можно представить в виде суммы линейного $L(\cdot)$ и нелинейного $N(\cdot)$ операторов. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$L(u(x)) + N(u(x)) + g(x) = 0 \tag{2}$$

с граничными условиями (для уравнения второго порядка)

$$B\left(u(x), \frac{\partial u(x)}{\partial x}\right) = 0.$$

Здесь x – независимая переменная; $u(x)$ – неизвестная функция; $g(x)$ – известная функция.

Согласно одному из вариантов OHAM составим для уравнения (2) гомотопию

$$\begin{gathered}\mathcal{H}[v(x, p, \{a_1, a_M\})] = (1-p)[L(v(x,p)) + g(x)] + \\ + H(p, c_k)[L(v(x,p)) + g(x) + N(v(x,p))] = 0, \\ B\left(v(x, p), \frac{\partial v(x, p)}{\partial x}\right) = 0.\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь $p \in [0,1]$ – встраиваемый параметр; $H(p)$ – вспомогательная функция, причем такая, что $H(p, c_m) \neq 0$ при $p \neq 0$ и $H(0, c_m) = 0$, c_m $(m = 1, 2, \ldots)$ – коэффициенты, которые подлежат определению [9; 10]; $v(x, p)$ – неизвестная функция с ограничениями при $p = 0$ и $p = 1$:

$$v(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 1) = u(x).$$

Вспомогательную функцию $H(p, c_m)$ зададим в виде

$$H(p, c_m) = \sum_{m=1}^{M} c_m p^m,$$

где M – порядок приближения, в котором находится функция $u(x)$.

При $p = 0$ имеем линейное дифференциальное уравнение

$$L(u_0(x)) + g(x) = 0, \quad B\left(u_0, \frac{\partial u_0}{\partial x}\right) = 0, \tag{4}$$

из которого находится начальное (нулевое) приближение $u_0(x)$.

Запишем функцию $v(x, p)$ в виде разложения по параметру p:

$$v(x, \{c_1, c_M\}, p) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x, \{c_1, c_M\}) p^m. \tag{5}$$

Если коэффициенты $\overline{c_1, c_m}$ выбраны таким образом, что при $p = 1$ ряд сходится, то тогда

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} u_m(x).$$

Приближенное решение выразится как

$$u(x) \approx \tilde{u}_M = \sum_{m=0}^{M} u_m(x, \{c_1, c_M\}). \tag{6}$$

Для приближенного решения (6) определяем невязку дифференциального уравнения (2):

$$R(x, \{c_1, c_M\}) = L(\tilde{u}_M) + g(x) + N(\tilde{u}_M). \tag{7}$$

Минимизация остаточной квадратичной ошибки

$$J = \int_{x_1}^{x_2} R^2(x, \{c_1, c_M\})\, dx \to \min \tag{8}$$

позволяет определить коэффициенты $\{c_1, c_M\}$ как решение системы нелинейных алгебраических уравнений, удовлетворяющих условиям

$$\frac{\partial J}{\partial c_1} = \frac{\partial J}{\partial c_2} = \ldots \frac{\partial J}{\partial c_M} = 0. \tag{9}$$

Предельное гомотопическое разложение $\tilde{\mathcal{H}}(v, p, \hbar)$ уравнения (2) нарушает постулат теории гомотопии, в частности, когда левая часть уравнения (2), входящая в (3), сохраняет исходный вид при $p = 1$. Построим для уравнения (2) гомотопию следующего вида:

$$\begin{gathered} \tilde{\mathcal{H}}[v(x, p, \{a_1, a_M\})] = L(v(x, p)) + g(x) + F_N(p, \{a_1, a_M\})\, N(v(x, p)) = 0, \\ B\left(v(x, p), \frac{\partial v(x, p)}{\partial x}\right) = 0, \end{gathered} \tag{10}$$

где

$$F_N(\{a_1, a_M\}, p) = \sum_{m=1}^{M} a_m p^m.$$

При $p = 0$ из уравнения (10) имеем

$$\left\{ \begin{gathered} L(v(x, 1)) + g(x) + F_N(\{a_1, a_M\}, 1)\, N(v(x, 1)) = 0 \\ B\left(v(x, 1), \frac{\partial v(x, 1)}{\partial x}\right) = 0 \end{gathered} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{gathered} L(u(x)) + g(x) + C_N^M N(u(x)) = 0 \\ B\left(u(x), \frac{\partial u(x)}{\partial x}\right) = 0 \end{gathered} \right\}, \tag{11}$$

где $C_N^M = \sum_{m=1}^{M} a_m$. В силу

$$C_N^M > 0$$

уравнение (11) не эквивалентно уравнению (2). Можно предположить, что в пределе

$$\lim_{M \to \infty} \left(\sum_{m=1}^{M} a_m\right) = \lim_{M \to \infty} C_N^M = 1.$$

Тогда деформированное дифференциальное уравнение (11) асимптотически должно стремиться к исходному (первоначальному) виду (2):

$$\left\{\begin{matrix} L(\tilde{u}_M)+g(x)+C_N^M\,N(\tilde{u}_M)=0 \\ B\left(\tilde{u}_M,\ \dfrac{\partial\tilde{u}_M}{\partial x}\right)=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} M\rightarrow\infty \\ C_N^M\rightarrow 1 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{\begin{matrix} L(u)+g(x)+N(u)=0 \\ B\left(u,\ \dfrac{\partial u}{\partial x}\right)=0 \end{matrix}\right\}.$$

В итоге приближенное решение $\tilde{u}_M(x)$ при $M\rightarrow\infty$ становится предельным точным решением.

Используя гомотопию $\tilde{\mathcal{H}}[v(x,p,\{a_1,a_M\})]$, получим дифференциальное уравнение для функции $u_m(x)$. Зададим условие

$$\left.\frac{\partial^m\tilde{\mathcal{H}}[v(x,p,\{a_1,a_M\})]}{\partial p^m}\right|_{p=0}=0,\quad m=0,1,2,.... \tag{12}$$

При $m = 0$ из (3) и (12) получаем уравнение (4) для $u_0(x)$. При $m = 1$ имеем уравнение

$$L(u_1)+a_1N_0=0,\quad B\left(u_1,\frac{\partial u_1}{\partial x}\right)=0, \tag{13}$$

совпадающее с уравнением для ОНАМ. При $m = 2$ из (11) и (12) получаем новое уравнение

$$L(u_2)+f_2[L(u_0),L(u_1)]=0,\quad B\left(u_2,\frac{\partial u_2}{\partial x}\right)=0. \tag{14}$$

Для общего случая, основываясь на (13), (14), запишем

$$L(u_m)+f_m[L(u_0),...,L(u_{m-1})]=0,\quad B\left(u_m,\frac{\partial u_m}{\partial x}\right)=0, \tag{15}$$

где f_m – некоторая функция. Введя в рассмотрение обратный интегральный оператор $L^{-1}(\cdot)$ [3–5], согласно которому

$$L^{-1}(L(u))=u,$$

из (15) находим решение для m-й составляющей

$$u_m=-L^{-1}(f_m[L(u_0),...,L(u_{m-1})])+a_m x+b_m, \tag{16}$$

где a и b – константы интегрирования, определяемые из граничных условий (15).

Из (5) и (16) приходим к решению задачи с порядком приближения M:

$$u(x)\approx u_0(x)-\sum_{m=1}^{M}L^{-1}(f_m[L(u_0),...,L(u_{m-1})])+a_m x+b_m. \tag{17}$$

Тонкое прямоугольное ребро в условиях радиационного охлаждения. Рассмотрим стационарную задачу установившегося теплопереноса в тонком прямоугольном ребре, излучающем в свободное (космическое) пространство радиационным механизмом [11; 12]. Зададим площадь поперечного сечения ребра (A_c), его периметр (P), длину (L), коэффициент теплопроводности (λ) и излучательную способность (E). Допустим, что основание ребра поддерживается при более высокой температуре T_b. Тогда приходим к задаче [11; 12]

$$\frac{d}{dX}\left(A_c\,\lambda\frac{dT}{dX}\right)=P\sigma E(T^4-T_s^4),\quad \frac{dT(0)}{dX}=0,\quad T(L)=T_b. \tag{18}$$

Заменив космическую температуру T_s абсолютной нулевой температурой $T_s=0$ и введя безразмерные параметры

$$\theta=\frac{T}{T_b},\quad x=\frac{X}{L},\quad \varepsilon=\frac{E\sigma P T_b^3L^2}{\lambda A_c},$$

из (18) приходим к нелинейной задаче

$$\frac{d^2\theta}{dx^2}-\varepsilon\theta^4=0,\quad \frac{d\theta(0)}{dx}=0,\quad \theta(1)=1. \tag{19}$$

В [13; 14] получено в неявном виде точное решение данной задачи:

$$\sqrt{\frac{5}{2\varepsilon(\theta^5-\theta_0^5)}}\,\theta\sqrt{1-\frac{\theta^5}{\theta_0^5}}\,HG_2F_1\left[\frac{1}{5},\frac{1}{2},\frac{6}{5},\frac{\theta^5}{\theta_0^5}\right]-i\sqrt{\frac{5\pi}{2\varepsilon}}\,\frac{1}{\theta_0^{3/2}}\,\frac{\Gamma\left[\frac{6}{5}\right]}{\Gamma\left[\frac{7}{10}\right]}=x. \tag{20}$$

Неизвестный параметр θ_0 рассматривается как решение нелинейного трансцендентного уравнения, вытекающего из (20) при удовлетворении граничному условию $\theta(1)=1$, где $\Gamma[z]$ и $HG_2F_1[a,b,c,z]$ – функция Гаусса и гипергеометрическая функция Гаусса соответственно:

$$\Gamma[z]=\int_0^\infty t^{z-1}\mathrm{e}^{-t}dt,$$

$$HG_2F_1[a,b,c,z]=\frac{\Gamma[c]}{\Gamma[b]\Gamma[c-b]}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-tz)^{-a}dt.$$

ОНАМ. Найдем приближенное решение задачи (19) с помощью одного из вариантов ОНАМ [9]. Выделим в уравнении (19), соответственно, линейную и нелинейную части:

$$L(\theta)=\frac{d^2\theta}{dx^2},\quad N(\theta)=-\varepsilon\theta^4.$$

Для начального (нулевого) приближения имеем уравнение

$$\frac{d^2\theta_0(x)}{dx^2}=0,\quad \left\{\frac{d\theta_0(0)}{dx}=0,\quad \theta_0(1)=1\right\}, \tag{21}$$

из которого мы можем записать

$$\theta_0(x)=1. \tag{22}$$

В соответствии с (3) для уравнения (19) имеем гомотопию

$$\mathcal{H}[v(x,p,\{c_1,c_3\})]=(1-p)\frac{d^2v(x,p)}{dx^2}+\left(\sum_{m=1}^{M=3}c_m\,p^m\right)\left(\frac{d^2v(x,p)}{dx^2}-\varepsilon\,v(x,p)^4\right)=0, \tag{23}$$

где

$$v(x,p)=\theta_0(x)+\sum_{m=1}^{M}v_m(x)p^m,\quad v_m(x)=\frac{1}{m!}\frac{\partial^m v(x,p)}{\partial p^m}\bigg|_{p=0}. \tag{24}$$

Задача для m-го порядка деформации уравнения (23) принимает вид

$$\frac{1}{m!}\frac{\partial^m\mathcal{H}(v(x,p,\hbar))}{\partial p^m}\bigg|_{p=0}=0,\quad \left\{\frac{dv_m(0)}{dx}=0,\quad v_m(1)=0\right\}. \tag{25}$$

Для $m=\overline{1,3}$, с учетом (21), (23)–(25), получаем рекуррентные уравнения

$$\theta_1''+c_1\varepsilon=0,\quad \theta_1'(0)=\theta_1(1)=0, \tag{26}$$

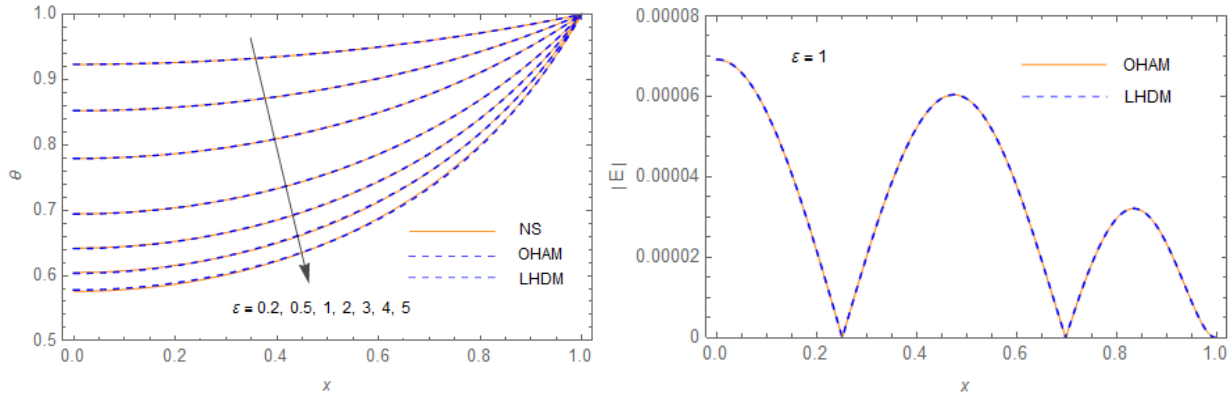
$$\theta_2''-\theta_1''+c_1(4\varepsilon\theta_1-\theta_1'')+c_2\varepsilon=0,\quad \theta_2'(0)=\theta_2(1)=0, \tag{27}$$

$$\theta_3''-\theta_2''+c_1(6\varepsilon\theta_1^2+4\varepsilon\theta_2-\theta_2'')+c_2(4\varepsilon\theta_1-\theta_1'')+c_3\varepsilon=0,\qquad \theta_3'(0)=\theta_3(1)=0. \tag{28}$$

Последовательно решив уравнения (26)–(28), находим

$$\theta_1=\frac{\varepsilon}{2}c_1(1-x^2), \tag{29}$$

$$\theta_2=\frac{\varepsilon}{2}(1-x^2)\left[c_1+c_2+c_1{}^2\left(1+\frac{\varepsilon}{3}(5-x^2)\right)\right], \tag{30}$$



a *b*

Рис. 1. Графики распределения температурной функции θ(*x*) в зависимости от параметра ε (*a*) и графики абсолютной ошибки решений в третьем приближении при ε = 1 (*b*)

Fig. 1. Graphs of the temperature function θ(*x*) depending on the parameter ε (*a*) and graphs of the absolute error of the solutions of the problem in the third approximation at ε = 1 (*b*)

$$\theta_3 = \frac{\varepsilon}{2}(1-x^2)\left\{c_2 + c_3 + 2c_1^2\left(1+\frac{\varepsilon}{3}(5-x^2)\right) + c_1\left[1+2c_2\left(1+\frac{\varepsilon}{3}(5-x^2)\right)\right] + c_1^3\left(1+\frac{2\varepsilon}{3}(5-x^2)+\frac{\varepsilon^2}{90}(343-92x^2+13x^4)\right)\right\}. \quad (31)$$

Объединив, в соответствии с (6), решения (22), (29)–(31), получаем окончательное решение

$$\theta(x) = 1+\frac{\varepsilon}{2}(1-x^2)\left\{c_1\left[3+2c_2\left(1+\frac{\varepsilon}{3}(5-x^2)\right)\right] + c_1^2(3+\varepsilon(5-x^2)) + c_1^3\left[1+\frac{\varepsilon}{90}(300+343\varepsilon-4(15+23\varepsilon)x^2+13\varepsilon x^4)\right] + 2c_2 + c_3\right\}. \quad (32)$$

Осуществив согласно (7)–(9) минимизацию остаточной квадратичной ошибки *J*, находим коэффициенты при разных значениях параметра ε. В частности, при ε = 1 имеем

$$c_1 = -0{,}5303001397,\ c_2 = -0{,}1166236469,\ c_3 = 0{,}0172924499. \quad (33)$$

Подстановка коэффициентов (33) в (32) дает решение задачи в третьем приближении

$$\theta(x) = 0{,}7790759621 + 0{,}1856318000x^2 + 0{,}0245217328x^4 + 0{,}0107705051x^6. \quad (34)$$

Графики найденных приближенных решений при ε = 0,2, 0,5, 1, 2, 3, 4 и 5 в сравнении с соответствующими численными решениями (Numerical Solution – NS) приведены на рис. 1, *a*. Обращает внимание практически полное слияние графиков при ε = 0,2, 0,5, 1 и 2. График абсолютной ошибки $E = |\theta(x) - \theta_{NS}(x)|$ при ε = 1 представлен на рис. 1, *b*. Максимальная абсолютная ошибка $|E_{max}|$ в данном случае не превышает $7\cdot10^{-5}$.

LHDM. В соответствии с (10) для уравнения (27) составим гомотопию

$$\tilde{\mathcal{H}}(v) = \frac{d^2v}{dx^2} - (a_1p + a_2p^2 + a_3p^3)\varepsilon v^4 = 0. \quad (35)$$

Применив для (35) формулы (24), (25) и (17), приходим к уравнениям

$$\theta_1'' = \varepsilon a_1, \quad \theta_1'(0) = \theta_1(1) = 0, \quad (36)$$

$$\theta_2'' = \varepsilon(4a_1\theta_1 + a_2), \quad \theta_2'(0) = \theta_2(1) = 0, \quad (37)$$

$$\theta_3'' = \varepsilon(a_1(6\theta_1^2 + 4\theta_2) + 4a_2\theta_1 + a_3), \quad \theta_3'(0) = \theta_3(1) = 0. \quad (38)$$

Решив уравнения (36)–(38), находим

$$\theta_1 = -\frac{\varepsilon}{2} c_1 (1 - x^2), \tag{39}$$

$$\theta_2 = \frac{\varepsilon}{2}(1 - x^2)\left(a_1{}^2 \frac{\varepsilon}{3}(5 - x^2) - a_2 \right), \tag{40}$$

$$\theta_3 = \frac{\varepsilon}{2}(1 - x^2)\left[a_1 \varepsilon \left(\frac{2}{3} a_2 (5 - x^2) - a_1^2 \frac{\varepsilon}{90}(343 - 92x^2 + 13x^4) \right) - a_3 \right]. \tag{41}$$

Просуммировав (22), (39)–(41), находим решение задачи в третьем приближении

$$\theta(x) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}(1 - x^2)\left[a_1 - \frac{\varepsilon}{3}\left(a_1(a_1 + 2a_2)(5 - x^2) - a_1^3 \frac{\varepsilon}{30}(343 - 92x^2 + 13x^4) \right) + a_2 + a_3 \right]. \tag{42}$$

Применив процедуру минимизации остаточной квадратичной ошибки J согласно (7)–(9), находим коэффициенты $\{a_1, a_3\}$. При $\varepsilon = 1$ имеем

$$a_1 = 0{,}5303001398,\ a_2 = 0{,}3657055485,\ a_3 = 0{,}0926338588. \tag{43}$$

Обратим внимание, что сумма найденных коэффициентов достаточно близка единице:

$$C_a^3 = a_1 + a_2 + a_3 = 0{,}9886395471,$$

что косвенно свидетельствует о достаточно хорошем аппроксимационном решении. Подстановка найденных коэффициентов (43) в (42) дает следующее решение:

$$u(x) = 0{,}7790759621 + 0{,}1856318000x^2 + 0{,}0245217328x^4 + 0{,}0107705051x^6. \tag{44}$$

Найденное с помощью LHDM решение (44) совпадает с аналогичным решением OHAM (34) (рис. 1). Такое же совпадение решений имеет место при других значениях ε (рис. 1, *а*).

Проследим за изменением коэффициента C_a^M при $M = \overline{3,5}$ и $\varepsilon = 1$:

$$M = 3: \begin{Bmatrix} a_1 = 0{,}5303001398 \\ a_2 = 0{,}3657055485 \\ a_3 = 0{,}0926338588 \end{Bmatrix} \rightarrow C_a^3 = 0{,}9886395471,$$

$$M = 4: \begin{Bmatrix} a_1 = 0{,}5274018400 \\ a_2 = 0{,}3626639071 \\ a_3 = 0{,}0958761807 \\ a_4 = 0{,}0125961972 \end{Bmatrix} \rightarrow C_a^4 = 0{,}9985381250, \tag{45}$$

$$M = 5: \begin{Bmatrix} a_1 = 0{,}5316911086 \\ a_2 = 0{,}3633232550 \\ a_3 = 0{,}0921652049 \\ a_4 = 0{,}0114312633 \\ a_5 = 0{,}0012779904 \end{Bmatrix} \rightarrow C_a^5 = 0{,}9998888222. \tag{46}$$

С увеличением порядка приближения параметр согласования C_a^M стремится к единице.

Запишем в соответствии с найденными коэффициентами (45) и (46) приближенные решения, соответственно, при $M = 4$ и 5:

$$u(x) = 0{,}7791472313 + 0{,}1841667316x^2 + 0{,}0297019801x^4 + 0{,}0045125497x^6 + 0{,}0024715073x^8,$$

$$u(x) = 0{,}7791449399 + 0{,}1842777674x^2 + 0{,}0289413730x^4 + 0{,}0063187089x^6 + 0{,}0007080419x^8 + 0{,}0006091689x^{10}.$$

По сравнению с приближением $M = 4$ максимальная абсолютная ошибка $|E_{\max}|$ в приближении $M = 5$ уменьшается примерно на порядок (рис. 2).

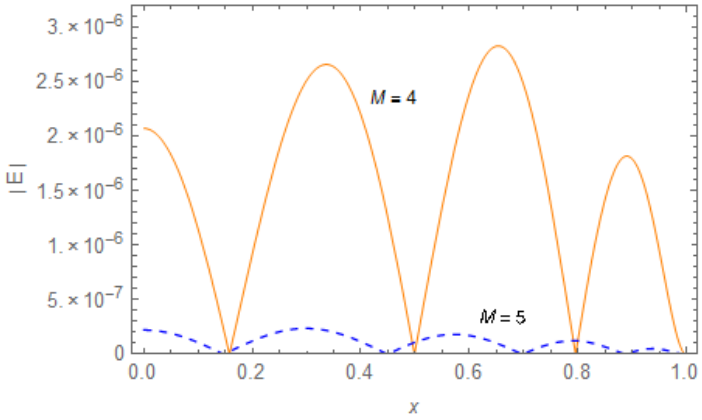


Рис. 2. Графики абсолютной ошибки решений в четвертом и пятом приближениях при ε = 1

Fig. 2. Graphs of the absolute error of the solutions of the problem in the fourth and fifth approximations at ε = 1

Заключение. В настоящей работе рассмотрено гомотопическое разложение нелинейных дифференциальных уравнений (2), которое предполагает деформацию нелинейной части уравнения $N(\cdot)$ с помощью встраиваемой функции $F(\{a_1, a_M\}, p) = \sum_{m=1}^{M} a_m p^m$, $p \in [0,1]$:

$$\tilde{\mathcal{H}}[v(x, \{a_1, a_M\}, p)] = L(v) + \left(\sum_{m=1}^{M} a_m p^m\right) N(v) + g = 0.$$

При $p = 1$ данная гомотопия предполагает неэквивалентность уравнения

$$L(\tilde{u}_M) + C_N^M N(\tilde{u}_M) + g = 0, \quad C_N^M = \sum_{m=1}^{M} a_m, \quad 0 < C_N^M \approx 1$$

(в приближении M) исходному дифференциальному уравнению (2), и одновременно эквивалентность лишь в предельном смысле ($M \to \infty$):

$$\lim_{M\to\infty} C_N^M = 1,$$

$$\lim_{M\to\infty} (L(\tilde{u}_M) + C_N^M N(\tilde{u}_M) + g = 0) \equiv L(u) + N(u) + g = 0.$$

На основе данной концепции предложен метод предельных гомотопических разложений (LHDM), который предоставляет наиболее простую и эффективную альтернативную возможность в получении приближенных решений разного рода нелинейных задач в виде

$$u(x) \approx u_0(x) - \sum_{m=1}^{M} L^{-1}(f_m[L(u_0), ..., L(u_{m-1})]) + a_m x + b_m.$$

На основе LHDM получено приближенное решение задачи радиационного теплообмена тонкого прямоугольного ребра. Метод LHDM дает наиболее компактные и простые по форме аналитические решения. Значение параметра согласования C_N^M с каждым новым приближением асимптотически стремится к предельному единичному значению. Это позволяет считать предложенный метод LHDM хорошей и удобной альтернативой.

Список использованных источников

1. Nayfeh, A. H. Introduction to Perturbation Technique / A. H. Nayfeh. – New York, 1981. – 539 p.

2. Rand, R. H. Perturbation Methods, Bifurcation Theory and Computer Algebraic / R. H. Rand, D. Armbruster. – New York, 1987. – 251 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1060-3

3. Adomian, G. A new approach to nonlinear partial differential equations / G. Adomian // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1984. – Vol. 102, N 2. – P. 420–434. https://doi.org/10.1016/0022-247x(84)90182-3

4. Adomian, G. A review of the decomposition method in applied mathematics / G. Adomian // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 1988. – Vol. 135, N 2. – P. 501–544. https://doi.org/10.1016/0022-247x(88)90170-9

5. Adomian, G. Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method / G. Adomian. – Boston, 1994. – 354 p. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8289-6

6. He, J. A new approach to nonlinear partial differential equations / J. He // Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 1997. – Vol. 2, N 4. – P. 230–235. https://doi.org/10.1016/s1007-5704(97)90007-1

7. He, J.-H. Homotopy perturbation technique / J.-H. He // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1999. – Vol. 178, N 3–4. – P. 257–262. https://doi.org/10.1016/s0045-7825(99)00018-3

8. Liao, S. Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method / S. Liao. – Boca Raton, 2003. – 336 p.

9. Marinca, V. Application of optimal homotopy asymptotic method for solving nonlinear equations arising in heat transfer / V. Marinca, N. Herisanu // International Communications in Heat and Mass Transfer. – 2008. – Vol. 35, N 6. – P. 710–715. https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2008.02.010

10. Semi-analytical solution of two-dimensional viscous flow through expanding/contracting gaps with permeable walls / M. M. Rashidi, M. A. Sheremet, M. Sadri [et al.] // Mathematical and Computational Applications. – 2021. – Vol. 26, N 2. – Art. 41. https://doi.org/10.3390/mca26020041

11. Abbasbandy, S. The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer / S. Abbasbandy // Physics Letters A. – 2006. – Vol. 360, N 1. – P. 109–113. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.07.065

12. Rajabi, A. Application of homotopy perturbation method in nonlinear heat conduction and convection equations / A. Rajabi, D. D. Ganji, H. Taherian // Physics Letters A. – 2007. – Vol. 360, N 4–5. – P. 570–573. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.08.079

13. Abbasbandy, S. Exact analytical solution of a nonlinear equation arising in heat transfer / S. Abbasbbandy, E. Shivanian // Physics Letters A. – 2010. – Vol. 374, N 4. – P. 567–574. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2009.11.062

14. Danish, M. Exact analytical solutions of three nonlinear heat transfer models / M. Danish, Sh. Kumar, S. Kumar // Proceedings of the World Congress on Engineering. – London, 2011. – Vol. III. URL: https://www.iaeng.org/publication/WCE2011/WCE2011_pp2550-2555.pdf (date of access: 05 January 2026).

References

1. Nayfeh A. H. *Introduction to Perturbation Technique*. New York, 1981. 536 p.

2. Rand R. H., Armbruster D. *Perturbation Methods, Bifurcation Theory and Computer Algebraic.* New York, 1987. 251 p. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1060-3

3. Adomian G. A new approach to nonlinear partial differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1984, vol. 102, no. 2, pp. 420–434. https://doi.org/10.1016/0022-247x(84)90182-3

4. Adomian G. A review of the decomposition method in applied mathematics. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1988, vol. 135, no. 2, pp. 501–544. https://doi.org/10.1016/0022-247x(88)90170-9

5. Adomian G. *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*. Boston, 1994. 354 p. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8289-6

6. He J. H. A new approach to non-linear partial differential equations. *Communication in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 1997, vol. 2, no. 4, pp. 230–235. https://doi.org/10.1016/s1007-5704(97)90007-1

7. He J.-H. Homotopy perturbation technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1999, vol. 178, no. 3–4, pp. 257–262. https://doi.org/10.1016/s0045-7825(99)00018-3

8. Liao S. *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*. Boca Raton, 2003. 336 p.

9. Marinca V., Herisanu N. Application of optimal homotopy asymptotic method for solving nonlinear equations arising in heat transfer. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, 2008, vol. 35, no. 6, pp. 710–715. https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2008.02.010

10. Rashidi M. M., Sheremet M. A., Sadri M., Mishra S., Pattnaik P. K., Rabiei F., Abbasbandy S., Sahihi H., Erfani E. Semi-analytical solution of two-dimensional viscous flow through expanding/contracting gaps with permeable walls. *Mathematical and Computational Applications*, 2021, vol. 26, no. 2, art. 41. https://doi.org/10.3390/mca26020041

11. Abbasbandy S. The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer. *Physics Letters A*, 2006, vol. 360, no. 1, pp. 109–113. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.07.065

12. Rajabi A., Ganji D. D., Taherian H. Application of homotopy perturbation method in nonlinear heat conduction and convection equations. *Physics Letters A*, 2007, vol. 360, no. 4–5, pp. 570–573. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2006.08.079

13. Abbasbandy S., Shivanian E. Exact analytical solution of a nonlinear equation arising in heat transfer. *Physics Letters A*, 2010, vol. 374, no. 4, pp. 567–574. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2009.11.062

14. Danish M., Kumar Sh., Kumar S. Exact analytical solutions of three nonlinear heat transfer models. *Proceedings of the World Congress on Engineering.* London, 2011, vol. III. Available at: https://www.iaeng.org/publication/WCE2011/WCE2011_pp2550-2555.pdf (accessed: 05 January 2026).

Информация об авторе

Кот Валерий Андреевич – канд. техн. наук, ст. науч. сотрудник. E-mail: valery.kot@hmti.ac.by.

Information about the author

Kot Valery A. – Ph. D. (Engineering), Senior Researcher. E-mail: valery.kot@hmti.ac.by.