

МАТЕМАТИКА

УДК 519.173

В. И. БЕНЕДИКТОВИЧ

ДОСТАТОЧНОЕ СПЕКТРАЛЬНОЕ УСЛОВИЕ ГАМИЛЬТОНОВОСТИ ГРАФА

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
vbened@im.bas-net.by

В данной работе доказывается достаточное условие гамильтоновости графа.

Ключевые слова: спектральный радиус, гамильтонов цикл, гамильтонова цепь, минимальная степень.

V. I. BENEDIKTOVICH

SUFFICIENT SPECTRAL CONDITION FOR HAMILTONICITY OF A GRAPH

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
vbened@im.bas-net.by

In this article the sufficient spectral condition for Hamiltonicity of a graph has been proved.

Keywords: Spectral radius, Hamiltonian cycle, Hamiltonian path, minimum degree.

Пусть $G = (V(G), E(G))$ – простой неориентированный связный граф порядка n и пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ являются собственными значениями его матрицы смежности $A = A(G)$, упорядоченными по убыванию (с учетом их кратностей), или его *спектром*. Наибольшее собственное значение λ_1 называется *спектральным радиусом* графа G и часто обозначается через $\rho(G)$. Согласно известной теореме Перрона–Фробениуса, спектральный радиус $\rho(G)$ является положительным действительным числом кратности 1 и существует единичный положительный собственный вектор (с положительными компонентами), относящийся к нему, называемый *вектором Перрона*.

Для произвольной вершины $v_i \in V$ графа G ее степень $\deg_G(v)$ обозначим через d_i . Пусть (d_1, d_2, \dots, d_n) – последовательность степеней графа G , упорядоченная по возрастанию: $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$. Тогда $d_1 = \delta$ называется *минимальной степенью* графа G .

Объединением двух простых графов G и H называется простой граф $G \cup H$ с множеством вершин $V(G) \cup V(H)$ и множеством ребер $E(G) \cup E(H)$. Если графы G и H не пересекаются ($V(G) \cap V(H) = \emptyset$), то их объединение называется *дизъюнктным* и обозначается через $G + H$. Дизъюнктное объединение k копий графа G обозначается через kG . *Соединением* непересекающихся графов G и H называется граф $G \vee H$, получаемый из дизъюнктного объединения $G + H$ добавлением всех ребер, которые соединяют каждую вершину графа G с каждой вершиной графа H .

Цикл или цепь, проходящие через все вершины графа G , называются *гамильтоновыми*. Граф G , содержащий гамильтонов цикл или цепь, называется соответственно *гамильтоновым* или *трассируемым*. Как известно, *задача распознавания* гамильтоновости или трассируемости заданного графа является NP-полной. Недавно для решения этой проблемы стала применяться спектральная теория графов.

В 1986 г. Brualdi и Solheid [1] поставили следующую проблему:

Пр о б л е м а 1. *Какой максимальный спектральный радиус у графа G на n вершинах, принадлежащего специальному классу графов?*

В последнее время интенсивно изучалась следующая тесно связанная проблема:

Пр о б л е м а 2. *Для заданного графа F каким максимальным спектральным радиусом должен обладать граф G на n вершинах, не содержащий подграфа, изоморфного графу F ?*

Проблема 2 рассматривалась для случаев, когда граф F является кликой, четной (нечетной) цепью (циклом) заданной длины и гамильтоновой цепью (циклом) [2–5]. В частности, изучались достаточные спектральные условия для существования гамильтоновых цепей и циклов. Fiedler, Nikiforov получили некоторые достаточные условия для существования гамильтоновых цепей и циклов в терминах спектральных радиусов графов и дополнений графов [2]. Lu и др. [3] изучали достаточные условия для гамильтоновых цепей в связных графах и гамильтоновых циклов в двудольных графах в терминах спектрального радиуса графа. Некоторые другие спектральные условия для гамильтоновых цепей и циклов в графах получены в [6–7].

Совсем недавно [8] было найдено следующее достаточное условие трассируемости графа в терминах спектрального радиуса.

Т е о р е м а 1 [8]. *Пусть G граф на $n \geq 4$ вершинах с $\delta \geq 1$. Если $\rho(G) > n - 3$, то G содержит гамильтонову цепь, кроме случаев, когда $G \in \{K_1 \vee (K_{n-3} + 2K_1), K_2 \vee 4K_1, K_1 \vee (K_{1,3} + K_1)\}$.*

В данной работе будет получена нижняя оценка спектрального радиуса для гамильтоновости графа.

Т е о р е м а 2. *Пусть G – простой связный граф на $n > 8$ вершинах с $\delta \geq 2$, отличный от графов $5K_1 \vee K_4, K_3 \vee (K_{1,4} + K_1), K_2 \vee (K_{n-4} + 2K_1), K_1 \vee (K_{n-3} + K_2)$. Тогда если его спектральный радиус $\rho(G) \geq n - 3$, то граф G гамильтонов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства нам понадобятся следующие известные факты.

Л е м м а 1 [9]. *Пусть G – простой граф порядка n с t ребрами и минимальной степенью вершин δ . Тогда его спектральный радиус удовлетворяет неравенству*

$$\rho(G) \leq \frac{\delta - 1 + \sqrt{(\delta + 1)^2 + 4(2m - \delta n)}}{2}.$$

Л е м м а 2 [9]. *Функция $f(x) = x - 1 + \sqrt{(x + 1)^2 + 4(2m - xn)}$ является убывающей функцией на промежутке $[1; n - 1]$, где $n - 1 \leq m \leq n(n - 1) / 2$ и $2m \geq xn$.*

В силу лемм 1, 2, а также условий теоремы, мы получаем, что спектральный радиус

$$n - 3 \leq \rho(G) \leq \frac{1 + \sqrt{9 + 8(m - n)}}{2}.$$

Из этого неравенства после преобразований получаем

$$n^2 - 5n + 10 \leq 2m. \quad (1)$$

Предположим, что граф G негамильтонов. Тогда, согласно теореме Хватала [10], существует натуральное число k , такое, что $d_k \leq k < \frac{n}{2}$ и $d_{n-k} \leq n - k - 1$ для последовательности степеней графа G : $\delta = d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n = \Delta$. Поэтому имеем следующую цепочку неравенств:

$$2m = \sum_{i=1}^n d_i \leq k \cdot k + (n - 2k)(n - k - 1) + k(n - 1) = n^2 + 3k^2 + k - 2kn - n. \quad (2)$$

Используя неравенство (1) получаем

$$n^2 - 5n + 10 \leq n^2 + 3k^2 + k - 2kn - n.$$

Откуда следует

$$3k^2 + k - 10 \geq (2k - 4)n \geq (2k - 4)(2k + 1) = 4k^2 - 6k - 4$$

или

$$k^2 - 7k + 6 = (k - 1)(k - 6) \leq 0,$$

поэтому, поскольку $k \in \mathbb{N}$, имеем $k \in \{1, 2, \dots, 6\}$. Однако в силу условия $\delta \geq 2$ сразу замечаем, что $k \neq 1$.

Рассмотрим случай $k = 2$. Тогда $d_1 = d_2 = 2, d_{n-2} \leq n - 3$ и неравенство (2) нам дает верхнюю оценку: $2m \leq n^2 - 5n + 14$. Таким образом, вместе с неравенством (1) имеем

$$\frac{n(n-5)}{2} + 5 \leq m \leq \frac{n(n-5)}{2} + 7 = C_{n-2}^2 + 4.$$

Заметим, что верхняя оценка $C_{n-2}^2 + 4$ для числа ребер графа G достигается только для графа $K_2 \vee (K_{n-4} + 2K_1)$, каким по условию теоремы граф G не является.

Нетрудно видеть, что негамильтоновым графом G с числом ребер $C_{n-2}^2 + 3$ может быть либо граф $K_1 \vee (K_{n-3} + K_2)$, который входит в список исключений теоремы, либо граф G , который получается из графа $K_2 \vee (K_{n-4} + 2K_1)$ удалением одного ребра.

Покажем, что граф, который получается из графа $K_2 \vee (K_{n-4} + 2K_1)$ удалением одного ребра имеет спектральный радиус $\rho(G) < n - 3$. В силу условий $d_1 = d_2 = 2, d_{n-2} \leq n - 3$ граф G может иметь только одну из следующих последовательностей степеней (рисунок):

- 1) $2, 2, \underbrace{(n-3), \dots, (n-3)}_{n-4}, (n-2), (n-2)$, т. е. $G = 2K_1 \vee (K_{n-4} + 2K_1)$;
- 2) $2, 2, (n-4), \underbrace{(n-4), \dots, (n-4)}_{n-4}, (n-1), (n-1)$, т. е. $G = K_2 \vee ((2K_1 \vee K_{n-6}) + 2K_1)$;
- 3) $2, 2, (n-4), \underbrace{(n-3), \dots, (n-3)}_{n-5}, (n-2), (n-1)$.

Пусть $y^T = (y_1 y_2 \dots y_n) > 0$ – вектор Перрона, соответствующий спектральному радиусу $\rho(G) =: \theta > 0$. Введем обозначение

$$C := \sum_{i=1}^{n-2} y_i. \quad (3)$$

Рассмотрим случай 1). При нумерации вершин графа G , указанной на рисунке, a , его матрица смежности имеет вид

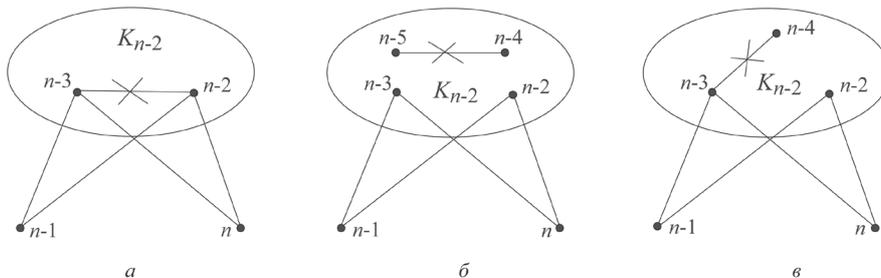
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n-4} \\ A_{n-3} \\ A_{n-2} \\ A_{n-1} \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Тогда из равенства $Ay = \theta y$ получаем, что при $i = \overline{1, n-4}$

$$A_i y = y_1 + \dots + y_{i-1} + y_{i+1} + \dots + y_{n-2} = \theta y_i,$$

откуда в силу обозначения (3) имеем

$$y_i = \frac{C}{\theta + 1}, \quad i = \overline{1, n-4}.$$



Графы, полученные из графа $K_2 \vee (K_{n-4} + 2K_1)$ удалением одного ребра

Из равенств

$$A_{n-3}y = y_1 + \dots + y_{n-4} + y_{n-1} + y_n = \theta y_{n-3};$$

$$A_{n-2}y = y_1 + \dots + y_{n-4} + y_{n-1} + y_n = \theta y_{n-2}$$

с учетом равенства (3) вытекают равенства $y_{n-3} = y_{n-2}$ и $C + y_{n-1} + y_n = (\theta + 2)y_{n-3}$. Далее, из равенств

$$A_{n-1}y = y_{n-3} + y_{n-2} = \theta y_{n-1};$$

$$A_n y = y_{n-3} + y_{n-2} = \theta y_n$$

вытекают равенства $y_{n-1} = y_n$ и $2y_{n-3} = \theta y_{n-1}$. Решая систему линейных уравнений

$$\begin{cases} C + 2y_{n-1} = (\theta + 2)y_{n-3}; \\ 2y_{n-3} = \theta y_{n-1} \end{cases}$$

получаем

$$y_{n-3} = y_{n-2} = \frac{\theta C}{\theta(\theta + 2) - 4};$$

$$y_{n-1} = y_n = \frac{2C}{\theta(\theta + 2) - 4}.$$

Подставляя теперь найденные компоненты вектора Перрона y в равенство (3), получим

$$\frac{C}{\theta + 1}(n - 4) + \frac{2\theta C}{\theta(\theta + 2) - 4} = C.$$

Разделив последнее равенство на $C > 0$ и преобразовав его, получим равенство

$$f(\theta) := \theta^3 + (5 - n)\theta^2 + 2(2 - n)\theta + 4(n - 5) = 0.$$

Таким образом, спектральный радиус $\rho(G)$ является корнем многочлена $f(\theta)$. Покажем теперь, что все корни этого многочлена лежат левее числа $n - 3$. Действительно, при условии теоремы $n > 8$ легко проверить, что выполняются следующие неравенства:

$$f(n - 3) = 2n - 14 > 0;$$

$$f'(n - 3) = 3\theta^2 + 2(5 - n)\theta + 2(2 - n) \Big|_{\theta=n-3} = n^2 - 4n + 1 > 0;$$

$$f''(n - 3) = 6\theta + 2(5 - n) \Big|_{\theta=n-3} = 4n - 8 > 0;$$

$$f'''(n - 3) = 6 > 0.$$

Следовательно, по теореме Фурье–Бюдана [12] на интервале $[n - 3; +\infty)$ нет корней многочлена $f(\theta)$. Тем самым, показано, что $\rho(G) < n - 3$, что противоречит условию теоремы.

Рассмотрим случай 2). При нумерации вершин графа G , указанной на рисунке, \bar{b} , его матрица смежности имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n-6} \\ A_{n-5} \\ A_{n-4} \\ A_{n-3} \\ A_{n-2} \\ A_{n-1} \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Тогда из равенства $Ay = \theta y$ получаем, что при $i = \overline{1, n-6}$

$$A_i y = y_1 + \dots + y_{i-1} + y_{i+1} + \dots + y_{n-2} = \theta y_i,$$

откуда в силу обозначения (3) имеем

$$y_i = \frac{C}{\theta+1}, \quad i = \overline{1, n-6}.$$

Из равенств

$$A_{n-5} y = y_1 + \dots + y_{n-6} + y_{n-3} + y_{n-2} = \theta y_{n-5};$$

$$A_{n-4} y = y_1 + \dots + y_{n-6} + y_{n-3} + y_{n-2} = \theta y_{n-4}$$

и $\theta > 0$ с учетом равенства (3) вытекают равенства $y_{n-5} = y_{n-4}$ и $C = (\theta+2)y_{n-5}$. Поэтому $y_{n-5} = y_{n-4} = \frac{C}{\theta+2}$. Далее, из равенств

$$A_{n-3} y = y_1 + \dots + y_{n-4} + y_{n-2} + y_{n-1} + y_n = \theta y_{n-3};$$

$$A_{n-2} y = y_1 + \dots + y_{n-3} + y_{n-1} + y_n = \theta y_{n-2}$$

вытекают равенства $C + y_{n-1} + y_n = (\theta+1)y_{n-3}$ и $C + y_{n-1} + y_n = (\theta+1)y_{n-2}$. Откуда $y_{n-3} = y_{n-2}$. Кроме того, из равенств

$$A_{n-1} y = y_{n-3} + y_{n-2} = \theta y_{n-1};$$

$$A_n y = y_{n-3} + y_{n-2} = \theta y_n$$

следует, что $y_{n-1} = y_n$. Поэтому получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} C + 2y_{n-1} = (\theta+1)y_{n-3}; \\ 2y_{n-3} = \theta y_{n-1}, \end{cases}$$

решая которую, находим

$$y_{n-3} = y_{n-2} = \frac{\theta C}{\theta(\theta+1)-4};$$

$$y_{n-1} = y_n = \frac{2C}{\theta(\theta+1)-4}.$$

Подставляя теперь найденные компоненты вектора Перрона y в равенство (3), получим

$$\frac{C}{\theta+1}(n-6) + \frac{2C}{\theta+2} + \frac{2\theta C}{\theta(\theta+1)-4} = C.$$

Разделив последнее равенство на $C > 0$ и преобразовав его, получим равенство

$$f(\theta) := \theta^4 + (6-n)\theta^3 + 3(3-n)\theta^2 + 2(n-10)\theta + 8(n-6) = 0.$$

Таким образом, спектральный радиус $\rho(G)$ является корнем многочлена $f(\theta)$. Покажем теперь, что все корни этого многочлена лежат левее числа $n-3$. Действительно, при условии теоремы $n > 8$ нетрудно проверить, что выполняются следующие неравенства:

$$f(n-3) = 2n^2 - 18n + 12 > 0;$$

$$f'(n-3) = 4\theta^3 + 3(6-n)\theta^2 + 6(3-n)\theta + 2(n-10) \Big|_{\theta=n-3} = n(n-3)^2 + 2(n-10) > 0;$$

$$f''(n-3) = 12\theta^2 + 6(6-n)\theta + 6(3-n) \Big|_{\theta=n-3} = 6(n-3)(n-1) > 0;$$

$$f'''(n-3) = 24\theta + 6(6-n) \Big|_{\theta=n-3} = 18(n-2) > 0;$$

$$f^{(4)}(n-3) = 24 > 0.$$

Следовательно, по теореме Фурье–Бюдана [12] на интервале $[n-3; +\infty)$ нет корней многочлена $f(\theta)$. Тем самым показано, что $\rho(G) < n-3$, что противоречит условию теоремы.

Наконец, рассмотрим случай 3). При нумерации вершин, указанной на рисунке, \mathcal{G} , его матрица смежности имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{n-5} \\ A_{n-4} \\ A_{n-3} \\ A_{n-2} \\ A_{n-1} \\ A_n \end{pmatrix}.$$

Тогда из равенства $Ay = \theta y$ получаем, что для $i = \overline{1, n-5}$

$$A_i y = y_1 + \dots + y_{i-1} + y_{i+1} + \dots + y_{n-2} = \theta y_i,$$

откуда в силу обозначения (3) имеем

$$y_i = \frac{C}{\theta + 1}, i = \overline{1, n-5}.$$

Из равенств

$$\begin{aligned} A_{n-4} y &= y_1 + \dots + y_{n-5} + y_{n-2} = \theta y_{n-4}; \\ A_{n-3} y &= y_1 + \dots + y_{n-5} + y_{n-2} + y_{n-1} + y_n = \theta y_{n-3}; \\ A_{n-2} y &= y_1 + \dots + y_{n-3} + y_{n-1} + y_n = \theta y_{n-2}; \\ A_{n-1} y &= A_n y = y_{n-3} + y_{n-2} = \theta y_{n-1} = \theta y_n \end{aligned}$$

и $\theta > 0$ вытекает равенство $y_{n-1} = y_n$ и, с учетом равенства (3), система линейных уравнений

$$\begin{cases} (1 + \theta)y_{n-4} + y_{n-3} = C; \\ y_{n-4} + (1 + \theta)y_{n-3} - 2y_{n-1} = C; \\ (1 + \theta)y_{n-2} - 2y_{n-1} = C; \\ y_{n-3} + y_{n-2} - \theta y_{n-1} = 0, \end{cases}$$

решая которую, находим

$$\begin{aligned} y_{n-4} &= \frac{\theta^3 + \theta^2 - 4\theta - 4}{\theta^4 + 3\theta^3 - 2\theta^2 - 8\theta - 2} C; \\ y_{n-3} &= \frac{\theta^3 + \theta^2 + 2}{\theta^4 + 3\theta^3 - 2\theta^2 - 8\theta - 2} C; \\ y_{n-2} &= \frac{\theta^3 + 2\theta^2 - 2}{\theta^4 + 3\theta^3 - 2\theta^2 - 8\theta - 2} C; \\ y_{n-1} = y_n &= \frac{2\theta^2 + 3\theta}{\theta^4 + 3\theta^3 - 2\theta^2 - 8\theta - 2} C. \end{aligned}$$

Подставляя теперь найденные компоненты вектора Перрона y в равенство (3), получим

$$\frac{C}{\theta + 1}(n-5) + \frac{(\theta^3 + \theta^2 - 4\theta - 4) + (\theta^3 + \theta^2 + 2) + (\theta^3 + 2\theta^2 - 2)}{\theta^4 + 3\theta^3 - 2\theta^2 - 8\theta - 2} C = C.$$

Разделив последнее равенство на $C > 0$ и преобразовав его, получим равенство

$$f(\theta) := \theta^5 + (6-n)\theta^4 + 3(3-n)\theta^3 + 2(n-10)\theta^2 + (8n-42)\theta + (2n-8) = 0.$$

Таким образом, спектральный радиус $\rho(G)$ является корнем многочлена $f(\theta)$. Покажем теперь, что все корни многочлена лежат левее числа $n-3$. Действительно, при условии теоремы $n > 8$ нетрудно проверить, что выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} f(n-3) &= 2n^3 - 24n^2 + 74n - 62 > 0; \\ f'(n-3) &= 5\theta^4 + 4(6-n)\theta^3 + 9(3-n)\theta^2 + 4(n-10)\theta + (8n-42) \Big|_{\theta=n-3} = n(n-3)^3 + 4n^2 - 44n + 78 > 0; \\ f''(n-3) &= 20\theta^3 + 12(6-n)\theta^2 + 18(3-n)\theta + 4(n-10) \Big|_{\theta=n-3} = 2(n-3)^2(4n-3) + 4(n-10) > 0; \\ f'''(n-3) &= 60\theta^2 + 24(6-n)\theta + 18(3-n) \Big|_{\theta=n-3} = 18(n-3)(2n-1) > 0; \\ f^{(4)}(n-3) &= 120\theta + 24(6-n) \Big|_{\theta=n-3} = 96n - 196 > 0; \\ f^{(5)}(n-3) &= 120 > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, по теореме Фурье–Бюдана [12] на интервале $[n-3; +\infty)$ нет корней многочлена $f(\theta)$. Тем самым, показано, что $\rho(G) < n-3$, что противоречит условию теоремы.

Аналогично можно показать, что граф, который получается из графа $K_1 \vee (K_{n-3} + K_2)$ удалением одного ребра также имеет спектральный радиус $\rho(G) < n-3$.

Отметим, что для графа, полученного из графа $K_2 \vee (K_{n-4} + 2K_1)$ удалением двух ребер, это неравенство также справедливо в силу следующего утверждения.

Л е м м а 3 [11]. *Пусть G – простой связный граф и H – его собственный подграф. Тогда $\rho(G) > \rho(H)$.*

Таким образом, предположение о негамильтоновости графа G при $k=2$ приводит к противоречию с условиями теоремы.

Пусть $k=3$. Тогда из неравенства (2) получаем, что $n \leq 10$, а следовательно, $n \in \{9; 10\}$. Если $n=9$, то из (2) получаем $23 \leq m \leq 24$, причем максимальное число ребер графа достигается для последовательности степеней (3; 3; 3; 5; 5; 5; 8; 8; 8), которая соответствует графу $G = K_3 \vee (3K_1 + K_3)$. Нетрудно проверить, что для этого графа $\rho(G) = 5,864 < 6$, а значит, по лемме 3 для всех графов H , которые получаются из графа G удалением одного ребра, также имеет место неравенство $\rho(H) < 6$, что неверно по условию теоремы.

Если $n=10$, то из (2) получаем, что $m=30$, причем это число ребер графа достигается для последовательности степеней (3; 3; 3; 6; 6; 6; 6; 9; 9; 9), которая соответствует графу $G = K_3 \vee (3K_1 + K_4)$. Нетрудно проверить, что для этого графа $\rho(G) = 6,646 < 7$, что неверно по условию теоремы.

Пусть $k=4$. Тогда из неравенства (2) получаем, что $n \leq 10$, и следовательно, $n \in \{9; 10\}$. Если $n=9$, то получаем, что $23 \leq m \leq 26$, причем максимальное число ребер графа достигается для последовательности степеней (4; 4; 4; 4; 4; 8; 8; 8; 8), которая соответствует графу $G = 5K_1 \vee K_4$, входящему в список исключений теоремы. Последовательностями степеней, удовлетворяющими условию $m=25$, являются последовательность (3; 4; 4; 4; 4; 7; 8; 8; 8), которая соответствует графу $G = K_3 \vee (K_{1,4} + K_1)$, также входящему в список исключений теоремы, или последовательность (4; 4; 4; 4; 4; 7; 7; 8; 8), которая соответствует графу $H = 2K_1 \vee (K_2 \vee 5K_1)$ со спектральным радиусом $\rho(H) = 5,915 < 6$, что неверно по условию теоремы. Последовательностями, удовлетворяющими условию $m=24$, и не соответствующими собственному подграфу H , могут быть только три последовательности: (2; 4; 4; 4; 4; 7; 7; 8; 8), (3; 3; 4; 4; 4; 6; 8; 8; 8) или (3; 3; 4; 4; 4; 7; 7; 8; 8). Нетрудно проверить, что спектральные радиусы графов G_1, G_2, G_3 , соответствующих этим последовательностям, равны $\rho(G_1) = 5,89$; $\rho(G_2) = 5,85$; $\rho(G_3) = 5,837$. Таким образом, все негамильтоновы графы G порядка $n=9$ с $m=24$, а значит, графы с $m=23$, которые являются их собственными подграфами, удовлетворяют неравенству $\rho(G) < 6$, что неверно по условию теоремы.

Если $n = 10$, то из (2) получаем, что $30 \leq m \leq 31$, причем максимальное число ребер графа достигается для последовательности степеней (4; 4; 4; 4; 5; 5; 9; 9; 9; 9), которая соответствует графу $G = K_4 \vee (4K_1 + K_2)$. Нетрудно проверить, что $\rho(G) = 6,757 < 7$, а значит, по лемме 3 для всех графов H , которые получаются из графа G удалением одного ребра, также имеет место неравенство $\rho(H) < 7$, что неверно по условию теоремы.

Пусть $k = 5$. Тогда из неравенства (2) получаем, что $n \leq 11$. Но $2k + 1 \leq n$, т. е. $11 \leq n$. Поэтому $n = 11$. Тогда из (2) получаем, что $76 \leq m \leq 80$, причем максимальное число ребер графа достигается для последовательности степеней (5; 5; 5; 5; 5; 5; 10; 10; 10; 10; 10), которая соответствует графу $G = 6K_1 \vee K_5$. Нетрудно проверить, что $\rho(G) = 7,831 < 8$, а значит, по лемме 3 для всех графов H , которые получаются из графа G удалением 1–4 ребер, также имеет место неравенство $\rho(H) < 8$, что неверно по условию теоремы.

Наконец, пусть $k = 6$. Тогда из неравенства (2) получаем $n \leq 13$, а из неравенства $2k + 1 \leq n$ получаем $13 \leq n$. Поэтому $n = 13$. Тогда $m = 57$, причем это число ребер графа достигается для последовательности степеней (6; 6; 6; 6; 6; 6; 12; 12; 12; 12; 12; 12), которая соответствует графу $G = 7K_1 \vee K_6$. Нетрудно проверить, что $\rho(G) = 9,446 < 10$, что неверно по условию теоремы.

Таким образом, предположение о негамильтоновости графа G приводит к противоречию с условиями теоремы, и тем самым она доказана.

Работа профинансирована Институтом математики НАН Беларуси в рамках Государственной программы фундаментальных исследований «Конвергенция» и Белорусским республиканским фондом фундаментальных исследований (грант № Ф14РА-004).

Список использованной литературы

1. Brualdi, R. A. On the spectral radius of complementary acyclic matrices of zeros and ones / R. A. Brualdi, E. S. Solheid // SIAM J. Algebraic Discrete Methods. – 1986. – Vol. 7, N 2. – P. 265–272.
2. Fiedler, M. Spectral radius and Hamiltonicity of graphs / M. Fiedler, V. Nikiforov // Linear Algebra Appl. – 2010. – Vol. 432. – P. 2170–2173.
3. Lu, M. Spectral radius and Hamiltonian graphs / M. Lu, H. Liu, F. Tian // Linear Algebra Appl. – 2012. – Vol. 437. – P. 2670–2741.
4. Nikiforov, V. The spectral radius of graphs without paths and cycles of specified length / V. Nikiforov // Linear Algebra Appl. – 2010. – Vol. 432. – P. 2243–2256.
5. Yuan, W. On the spectral radii of graphs without given cycles / W. Yuan, B. Wang, M. Zhai // Electron. J. Linear Algebra. – 2012. – Vol. 23. – P. 599–606.
6. Krivelevich, M. Sparse pseudo-random graphs are Hamiltonian / M. Krivelevich, B. Sudakov // J. Graph Theory. – 2003. – Vol. 42, N 1. – P. 17–33.
7. Mohar, B. A domain monotonicity theorem for graphs and hamiltonicity / B. Mohar // Discrete Appl. Math. – 1992. – Vol. 36, N 2. – P. 169–177.
8. Ning, B. Spectral radius and Hamiltonian properties of graphs / B. Ning, J. Ge // Linear and Multilinear Algebra. – 2014. – Vol. 63, N 8. – P. 1520–1530.
9. Hong, Y. A sharp upper bound of the spectral radius of graphs / Y. Hong, J. Shu, K. Fang // J. Combin. Theory. – 2001. – Vol. 81. – P. 177–183.
10. Лекции по теории графов / В. А. Емеличев [и др.]. – М.: Наука, 1990.
11. Brouwer, A. E. Spectra of graphs / A. E. Brouwer, W. H. Haemers. – Springer-Verlag, 2011.
12. Прасолов, В. В. Многочлены / В. В. Прасолов. – М.: МЦНМО, 2001.

Поступило в редакцию 25.05.2015