УДК 519.63

*П. П. МАТУС*[1], *Л. М. ХИЕУ*[2], *Л. Г. ВОЛКОВ*[3]

# ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ С НЕЗНАКОПОСТОЯННЫМИ ВХОДНЫМИ ДАННЫМИ

*(Представлено академиком И. В. Гайшуном)*

[1]*Католический университет, Люблин, Польша*
*matus@im.bas-net.by*
[2]*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*
*lmhieuktdn@gmail.com*
[3]*Русенский университет, Болгария*
*lvalkov@uni-ruse.bg*

В настоящей работе для так называемой канонической формы записи разностной схемы общего вида при обычных условиях положительности коэффициентов уравнения получены двусторонние оценки сеточного решения при произвольных незнакопостоянных входных данных задачи. Полученные результаты применяются для получения двусторонних оценок конкретных монотонных разностных схем, аппроксимирующих начально-краевую задачу для квазилинейного параболического уравнения типа конвекции диффузии, а также для исследования корректности Гамма-уравнения, используемого при описании опционной цены в финансовой математике.

*Ключевые слова*: принцип максимума, монотонная разностная схема, квазилинейное параболическое уравнение, Гамма-уравнение.

*P. P. MATUS*[1], *L. M. HIEU*[2], *L. G. VULKOV*[3]

## MAXIMUM PRINCIPLE FOR FINITE-DIFFERENCE SCHEMES WITH NON SIGH-CONSTANT INPUT DATA

[1]*The John Paul II Catholic Univercity of Lublin, Poland*
*matus@im.bas-net.by*
[2]*Belarusian State University, Minsk, Belarus*
*lmhieuktdn@gmail.com*
[3]*«Angel Kanchev» University of Ruse, Ruse, Bulgaria*
*lvalkov@uni-ruse.bg*

In this article, for the so-called canonical form of a difference scheme under usual positivity conditions on the equation coefficients two-sided estimates for the approximate solution are obtained at the arbitrary non sigh-constant input data of the problem. The obtained results are used both for deriving two-sided estimates of monotone difference schemes, which approximate the initial boundary-value problem for the quasi-linear parabolic convection-diffusion equation, and for studying the correctness of the Gamma equation that is used for describing the option price in financial mathematics.

*Keywords*: maximum principle, monotone difference scheme, quasi-linear parabolic equation, Gamma equation.

**Введение.** Принцип максимума с успехом применяется для доказательства существования и единственности решения начально-краевых задач для параболических и эллиптических уравнений. В отличие от метода энергетических неравенств он позволяет устанавливать априорные оценки решения в наиболее сильной равномерной норме для задач произвольной размерности с несамосопряженным эллиптическим оператором [1].

Аналогичный математический аппарат используется и в теории разностных схем [2]. Вычислительные методы, удовлетворяющие сеточному принципу максимума, в линейном случае принято называть монотонными. Важность монотонных разностных схем обусловлена отсутствием нефазических осцилляций при моделировании прикладных задач, описываемых уравнениями в частных производных на ЭВМ.

Не менее важными являются и нижние оценки решения дифференциально-разностных задач или в общем случае – двусторонние оценки решения задачи. Отметим также, что при формулировке сеточного принципа максимума обычно требуется знакоопределенность входных данных задачи.

В настоящей работе для так называемой канонической формы записи разностной схемы общего вида [2] при обычных условиях положительности коэффициентов уравнения получены двусторонние оценки сеточного решения при произвольных незнакопостоянных входных данных задачи. Полученные результаты применяются для получения двусторонних оценок конкретных монотонных разностных схем, аппроксимирующих начально-краевую задачу для квазилинейного параболического уравнения типа конвекции диффузии, а также для исследования корректности Гамма-уравнения, используемого при описании опционной цены в финансовой математике [3]. Любопытно отметить, что доказанные двусторонние оценки не зависят от величины коэффициентов диффузии и конвекции.

**Постановка задачи и формулировка основных результатов.** Пусть в $n$-мерном евклидовом пространстве задано конечное количество точек – сетка $\Omega_h$. Каждой точке $x \in \Omega_h$ сопоставим один и только один шаблон $\mathcal{M}(x)$ – любое подмножество $\Omega_h$, содержащее данную точку. Окрестностью точки $x$ назовем множество $\mathcal{M}'(x) = \mathcal{M}(x) \setminus x$. Пусть заданы функции $A(x)$, $B(x, \xi)$, $F(x)$, определенные при любых $x \in \Omega_h$, $\xi \in \Omega_h$ и принимающие вещественные значения. Далее, каждой точке $x \in \Omega_h$ соотносится одно и только одно уравнение вида [2]

$$A(x)y(x) = \sum_{\xi \in \mathcal{M}'(x)} B(x, \xi)y(\xi) + F(x), \ x \in \Omega_h, \tag{1}$$

называемое канонической формой записи разностной схемы. Заметим, что множество $\mathcal{M}'(x)$ может быть и пустым, как, например, в случае граничных условий Дирихле. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений с числом уравнений, равным числу неизвестных. Эта система уравнений и называется разностной схемой. Наряду с сеткой $\Omega_h$, будем рассматривать какое-либо ее подмножество $\overline{\omega}_h$ и обозначим

$$\overline{\Omega}_h = \bigcup_{x \in \omega_h} \mathcal{M}(x).$$

Например, $\Omega_h$ – множество внутренних узлов при аппроксимации уравнения Пуассона. Очевидно, что при этом $\overline{\omega}_h = \Omega_h$. В соответствии с [2, с. 244], точка $x$ называется граничным узлом сетки, если в ней задано условие Дирихле:

$$y(x) = \mu(x), \quad x \in \gamma,$$

где $\gamma$ – множество граничных узлов. Отметим, что при аппроксимации граничных условий второго или третьего рода сетка может не содержать граничных узлов, т. е. все точки сетки будут являться только внутренними узлами. Будем предполагать выполнение обычных условий положительности коэффициентов

$$A(x) > 0, \quad B(x, \xi) > 0 \ \text{ для всех } \ \xi \in \mathcal{M}'(x), \tag{2}$$

$$D(x) = A(x) - \sum_{\xi \in \mathcal{M}'(x)} B(x, \xi) > 0 \ \text{ для всех } \ \xi \in \mathcal{M}'(x), \tag{3}$$

гарантирующих однозначную разрешимость разностной схемы (1), монотонность и ее устойчивость в равномерной норме по отношению к малому возмущению входных данных.

Сформулируем основные утверждения, позволяющие установить двусторонние оценки сеточного решения через входные данные задачи при незнакоопределенных входных данных задачи $F(x)$.

Т е о р е м а 1. *Пусть выполнены условия положительности коэффициентов (2) и (3). Тогда максимальное и минимальное значения решения разностной схемы (1) принадлежат интервалу изменения входных данных:*

$$\min_{x\in\Omega_h}\frac{F(x)}{D(x)}\leqslant y(x)\leqslant\max_{x\in\Omega_h}\frac{F(x)}{D(x)}. \qquad (4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть максимум решения $y(x)$ разностной задачи (1) достигается в некоторой точке $x_0\in\Omega_h$ :

$$\max_{x\in\Omega_h} y(x)=y(x_0).$$

Тогда из уравнения (1) имеем

$$A(x_0)y(x_0)=\sum_{\xi\in\mathcal{M}'(x_0)}B(x_0,\xi)y(\xi)+F(x_0)\leqslant$$
$$\sum_{\xi\in\mathcal{M}'(x_0)}B(x_0,\xi)y(x_0)+F(x_0).$$

В силу условий теоремы:

$$A(x_0)-\sum_{\xi\in\mathcal{M}'(x_0)}B(x_0,\xi)=D(x_0)>0.$$

Следовательно,

$$y(x)\leqslant y(x_0)\leqslant\frac{F(x_0)}{D(x_0)}\leqslant\max_{x\in\Omega_h}\frac{F(x)}{D(x)} \quad \text{для всех } x\in\Omega_h.$$

Итак, первая оценка (4) доказана. Аналогично доказывается и вторая оценка. Действительно, пусть в некоторой точке $x_1\in\Omega_h$ :

$$\min_{x\in\Omega_h} y(x)=y(x_1).$$

Тогда из уравнения (1) следует цепочка неравенств:

$$A(x_1)y(x_1)=\sum_{\xi\in\mathcal{M}'(x_1)}B(x_1,\xi)y(\xi)+F(x_1)\geqslant$$
$$\sum_{\xi\in\mathcal{M}'(x_1)}B(x_1,\xi)y(x_1)+F(x_1).$$

На основании условия (3) заключаем, что

$$y(x)\ \geqslant y(x_1)\ \geqslant\min_{x\in\Omega_h}\frac{F(x)}{D(x)}.\ \square$$

С л е д с т в и е 1 [2]. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для решения разностной задачи (1) имеет место оценка в сеточном аналоге нормы C:*

$$\|y\|_C=\max_{x\in\Omega_h}|y(x)|\ \leqslant\ \left\|\frac{F}{D}\right\|_C.$$

**Монотонные разностные схемы для квазилинейных параболических уравнений.** Рассмотрим нестационарное уравнение конвекции-диффузии, когда конвективный перенос записывается в недивергентном виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r(x)\frac{\partial u}{\partial x}+f(x,t),\quad 0<x<l,\quad 0<t\le T, \qquad (5)$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ \ u(0,t)=\mu_1(t),\ \ u(l,t)=\mu_2(t),$$

$$0<k_1\leqslant k(u)\leqslant k_2,\ \ k_1,k_2=\text{const}.$$

Чтобы получить для (5) монотонную схему, для которой справедлив принцип максимума при любых $h$ и $\tau$, рассмотрим уравнение с возмущенным оператором $\tilde{L}$ [2]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\tilde{L}u+f,\ \ \tilde{L}u=\kappa(x,u)\frac{\partial}{\partial x}\left(k(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+r(x)\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (6)$$

$$\kappa(x,u)=\frac{1}{1+R(x,u)},\ \ R(x,u)=\frac{h|r(x)|}{2k(u)}.$$

Представим $r(x)$ в виде суммы

$$r=r^{+}+r^{-},\ \ r^{+}=\frac{1}{2}(r+|r|)\geqslant 0,\ \ r^{-}=\frac{1}{2}(r-|r|)\leqslant 0,$$

и аппроксимируем $ru'$ выражением

$$(ru')_i=\left(\frac{r}{k(u)}(k(u)u')\right)_i\sim b_i^{+}a_{i+1}u_{x,i}+b_i^{-}a_iu_{\bar{x},i}.$$

Оператор $\tilde{L}$ при фиксированном $t=t_j$ аппроксимируем разностным оператором

$$\tilde{\Lambda}y=\kappa(a(y)y_{\bar{x}})_x+b^{+}a(y)^{(+1)}y_x+b^{-}a(y)y_{\bar{x}}.$$

Уравнение (6) на обычной равномерной сетке по пространству и времени

$$\bar{\omega}=\bar{\omega}_h\times\bar{\omega}_\tau,\ \ \bar{\omega}_h=\{x_i=ih,\ i=\overline{0,N},\ hN=l\},\ \ \bar{\omega}_h=\omega_h\cup\{x_0=0,\ x_N=l\},$$

$$\bar{\omega}_\tau=\{t_n=n\tau,\ n=\overline{0,N_0},\ \tau N_0=T\},\ \ \bar{\omega}_\tau=\omega_\tau\cup\{t_{N_0}=T\},$$

аппроксимируем монотонной схемой вида

$$\frac{y_i^{n+1}-y_i^n}{\tau}=\frac{\kappa_i^n}{h}\left(a(y_{i+1}^n)\frac{y_{i+1}^{n+1}-y_i^{n+1}}{h}-a(y_i^n)\frac{y_i^{n+1}-y_{i-1}^{n+1}}{h}\right)+$$
$$b_i^{+}a(y_{i+1}^n)\frac{y_{i+1}^{n+1}-y_i^{n+1}}{h}+b_i^{-}a(y_i^n)\frac{y_i^{n+1}-y_{i-1}^{n+1}}{h}+\varphi_i^{n+1},\tag{7}$$

где

$$a(y_i^n)=\frac{1}{2}\Big(k(y_{i-1}^n)+k(y_i^n)\Big),\ \ \kappa_i^n=\frac{1}{1+\dfrac{h|r_i|}{2k(y_i^n)}}\geqslant 0,\tag{8}$$

$$b_i^{+}=\frac{r_i+|r_i|}{2k(y_i^n)}\geqslant 0,\ \ b_i^{-}=\frac{r_i-|r_i|}{2k(y_i^n)}\leqslant 0,\ \ \varphi_i^{n+1}=f_i^{n+1}.$$

Данная разностная схема записывается в каноническом виде (1)

$$A_i^ny_i^{n+1}=B_{1i}^ny_{i-1}^{n+1}+B_{2i}^ny_{i+1}^{n+1}+F_i^n,\ \ i=1,2,...,N-1,\tag{9}$$

$$A_0^ny_0^{n+1}=F_0^n,\ \ A_N^ny_N^{n+1}=F_N^n,\tag{10}$$

с коэффициентами

$$B_{1i}^n=\frac{\tau}{h^2}a(y_i^n)(\kappa_i^n-hb_i^{-})\geqslant 0,\ \ B_{2i}^n=\frac{\tau}{h^2}a(y_{i+1}^n)(\kappa_i^n+hb_i^{+})\geqslant 0,\ \ i=\overline{1,N-1},$$

$$A_i^n=1+B_{1i}^n+B_{2i}^n\geqslant 0,\ \ i=\overline{1,N-1},\ \ A_0^n=A_N^n=1,$$

$$F_i^n=y_i^n+\tau f_i^{n+1},\ \ i=\overline{1,N-1},\ \ F_0^n=\mu_1^{n+1},\ \ F_N^n=\mu_2^{n+1},$$

$$D_i^n=1,\ \ i=\overline{0,N}.$$

Так как выполнены все условия теоремы 1, то на основании оценки (4) для произвольного $t=t_n\in\omega_\tau$ и всех $i=0,1,...,N$ имеем

$$\min\left\{\mu_1^{n+1},\mu_2^{n+1},\min_{1\leqslant i\leqslant N-1}(y_i^n+\tau f_i^{n+1})\right\}\leqslant y_i^{n+1}\leqslant$$
$$\max\left\{\mu_1^{n+1},\mu_2^{n+1},\max_{1\leqslant i\leqslant N-1}(y_i^n+\tau f_i^{n+1})\right\},\tag{11}$$

Используя индукцию по $n$ из (11) получаем двустороннюю оценку через входные данные без предположения о знакоопределенности входных данных

$$m_1^n \leqslant y_i^n \leqslant m_2^n, \ \ i=\overline{0, N}, \ \ n=\overline{0, N_0},$$

где

$$m_1^n = \min\left\{ \min_{t\in[0,T]}\{\mu_1(t), \mu_2(t)\}, \ \min_{x\in[0,l]} u_0(x) + t_n \min_{(x,t)\in Q_T} f(x,t) \right\},$$

$$m_2^n = \max\left\{ \max_{t\in[0,T]}\{\mu_1(t), \mu_2(t)\}, \ \max_{x\in[0,l]} u_0(x) + t_n \max_{(x,t)\in Q_T} f(x,t) \right\}.$$

На основании принципа максимума обычным образом устанавливается и оценка устойчивости в норме $C$:

$$\max_{t\in\omega_\tau}\|y(t)\|_{C(\overline{\omega}_h)} \leqslant \max_{t\in[0,T]}\left\{ \max_{t\in[0,T]}\{|\mu_1(t)|, |\mu_2(t)|\}, \|u_0\|_{C(0,l)} \right\} + T\max_{t\in[0,T]}\|f(t)\|_{C(0,l)},$$

где

$$\|\upsilon\|_{C(\overline{\omega}_h)} = \max_{x\in\overline{\omega}_h}|\upsilon(x)|, \ \ \|g\|_{C(0,l)} = \max_{0\leqslant x\leqslant l}|g(x)|.$$

З а м е ч а н и е. *Максимальное и минимальное значения разностного решения не зависит от коэффициентов диффузии* $k(u)$ *и конвекции* $r(x)$.

**Пример.** Рассмотрим частный случай Гамма-уравнения [3], полученного преобразованием нелинейного уравнения Black–Scholes к квазилинейному параболическому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + r(x)\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{12}$$

Для случая $\beta = u/(1-\rho u)^2$, $\rho > 0$, получаем коэффициент $k(u)$

$$k(u) = \frac{1+\rho u}{(1-\rho u)^3}.$$

Тогда по определению А. Фридмана [4] уравнение (12) будет параболическим, если

$$-\frac{1}{\rho} < u < \frac{1}{\rho}. \tag{13}$$

Для разностной схемы вида (7)–(10), аппроксимирующей начальную краевую задачу для уравнения (12), условия (13) будут выполнены при

$$-\frac{1}{\rho} < y_i^n < \frac{1}{\rho}, \ \ i=\overline{0, N}, \ \ n=\overline{0, N_0}.$$

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (договор № Ф14Р-108) и Болгарского научного фонда (проект N FNI I02/20 – 2014).

## Список использованной литературы

1. *Владимиров, В. С.* Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1981.

2. *Самарский, А. А.* Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977.

3. *Koleva, M. N.* A second-order positivity preserving numerical method for Gamma equation / M. N. Koleva, L. G. Vulkov // Appl. Math. and Comput. – 2013. – Vol. 220. – P. 722–734.

4. *Фридман, А.* Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. – М.: Издательство «Мир», 1968.

*Поступило в редакцию 29.06.2015*