Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **сентябрь–октябрь** **Том 59 № 5**

УДК 539.12

Е. М. ОВСИЮК, К. В. ДАШУК, О. В. ВЕКО

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ОСЦИЛЛИРУЮЩЕЙ ВСЕЛЕННОЙ ДЕ СИТТЕРА: ФОРМАЛИЗМЫ МАЙОРАНЫ–ОППЕНГЕЙМЕРА И ДАФФИНА–КЕММЕРА, ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)

Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина, Мозырь, Беларусь
e.ovsiyuk@mail.ru; kristinash2@mail.ru; vekoolga@mail.ru

Обобщенный тетрадный комплексный формализм Майораны–Оппенгеймера применен для исследования электромагнитного поля в осциллирующей Вселенной де Ситтера в нестатических сферически-симметричных координатах. С помощью D-функций Вигнера проведено отделение в комплексном векторном поле $E_j(x)+iB_j(x)$ угловых переменных (θ,ϕ) от переменных (t,r). Система дифференциальных уравнений в переменных (t,r) решена точно. Исследовано соотношение между комплексным 3-векторным формализмом Майораны–Оппенгеймера и 10-компонентным подходом Даффина–Кеммера–Петье. На этой основе построены электромагнитные волны магнитного и электрического типов в двух формализмах. В подходе Даффина–Кеммера–Петье построен класс решений градиентного типа в кулоновской и лоренцевской калибровках.

Ключевые слова: электромагнитное поле, осциллирующая Вселенная де Ситтера, нестатические координаты, формализм Майораны–Оппенгеймера, формализм Даффина–Кеммера.

E. M. OVSIYUK, K. V. DASHUK, O. V. VEKO

ELECTROMAGNETIC FIELD IN OSCILLATING DE SITTER UNIVERSE: MAJORANA–OPPENHEIMER AND DUFFIN–KEMMER APPROACHES, EXACT SOLUTIONS

Mozyr State Pedagogical University named after I. P. Shamyakin, Mozyr, Belarus
e.ovsiyuk@mail.ru; kristinash2@mail.ru; vekoolga@mail.ru

The tetrad-based generalized complex formalism by Majorana–Oppenheimer is applied to examine an electromagnetic field in oscillating de Sitter Universe in nonstatic spherically symmetric coordinates. With the help of Wigner D-functions we separate the angular (θ,ϕ)-dependence in the complex vector field $E_j(x)+iB_j(x)$ from the (t, r)-dependence. After that, the system of differential equations in (t, r) variables is solved exactly. Relations between the complex 3-vector Majorana–Oppenheimer formalism and the 10-component Duffin–Kemmer–Petiau approach have been examined. On this basis, electromagnetic waves of magnetic and electric types have been constructed in the both formalisms. In the Duffin–Kemmer–Petiau formalism, the class of gradient-type solutions is constructed in Coulomb and Lorentz gauges.

Keywords: electromagnetic field, oscillating de Sitter Universe, nonstatic coordinates, Majorana–Oppenheimer approach, Duffin–Kemmer approach.

Введение. В последние годы вырос интерес к комплексному формализму Майораны–Оппенгеймера и матричному формализму Даффина–Кеммера–Петье, в частности, интерес к их применению в электродинамике в римановых пространствах [1–16].

Вопрос об изучении фундаментальных полей частиц на фоне нестационарных Вселенных, моделей де Ситтера и анти де Ситтера имеет долгую историю. Особая значимость этих геометрий состоит в их простоте и высокой симметрии групп, лежащих в их основе, что дает возможность найти точные аналитические решения некоторых основных задач классической и квантовой теории поля в искривленных пространствах. В частности, существуют специальные представления для фундаментальных волновых уравнений, Дирака и Максвелла, которые явно инвариантны относительно соответствующих групп симметрии $SO(4,1)$ и $SO(3,2)$ для этих моделей.

В настоящей работе формализмы Майораны–Оппенгеймера и Даффина–Кеммера–Петье применены для исследования электромагнитного поля в (осциллирующей) Вселенной анти де Ситтера. С помощью D-функций Вигнера [17] отделена угловая зависимость от (t, r) -переменных. Нестатическая геометрия модели анти де Ситтера приводит к определенной зависимости электромагнитных колебаний от временной переменной. Построены точные решения уравнений Максвелла в подходе Майораны–Оппенгеймера. Установлена взаимосвязь 3-векторного комплексного формализма и 10-мерного формализма Даффина–Кеммера–Петье. На этой основе в подходе Даффина–Кеммера–Петье построены электромагнитные волны магнитного и электрического типов, а также решения градиентного типа.

Формализм Майораны–Оппенгеймера. Исходим из матричной формы уравнений Максвелла в подходе Майораны–Оппенгеймера

$$\alpha^c \left(e^{\rho}_{(c)}\partial_\rho + \frac{1}{2} j^{ab}\gamma_{abc} \right) \Psi = 0, \quad \alpha^0 = -iI, \quad \Psi = \begin{vmatrix} 0 \\ \mathbf{E} + i\mathbf{B} \end{vmatrix},$$

или в более детальном виде

$$-i \left(e^{\rho}_{(0)}\partial_\rho + \frac{1}{2} j^{ab}\gamma_{ab0} \right)\Psi + \alpha^k \left(e^{\rho}_{(k)}\partial_\rho + \frac{1}{2} j^{ab}\gamma_{abk} \right)\Psi = 0. \tag{1}$$

Ниже понадобятся выражения для матрицы α^k и шесть генераторов 3-вектора комплексного представления группы $SO(3, C)$. Будем использовать обозначения

$$j^{23} = S^1, \quad j^{31} = S^2, \quad j^{12} = S^3, \quad j^{01} = iS^1, \quad j^{02} = iS^2, \quad j^{03} = iS^3.$$

Рассмотрим уравнение (1) в нестатических координатах пространства де Ситтера (осциллирующая Вселенная)

$$x^\alpha = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, r, \theta, \phi), \quad dS^2 = dt^2 - \cos^2 t[dr^2 + \sinh^2 r(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)]$$

и соответствующей тетраде

$$e^{\alpha}_{(0)} = (1, 0, 0, 0), \quad e^{\alpha}_{(1)} = \left(0, 0, \frac{1}{\cos t \sinh r}, 0 \right),$$

$$e^{\alpha}_{(2)} = \left(0, 0, 0, \frac{1}{\cos t \sinh r \sin\theta} \right), \quad e^{\alpha}_{(3)} = \left(0, \frac{1}{\cos t}, 0, 0 \right).$$

Матричное уравнение Максвелла примет вид

$$\left\{ -i\frac{\partial}{\partial t} + i\tan t(\alpha^1 S^1 + \alpha^2 S^2 + \alpha^3 S^3) + \frac{1}{\cos t}\left(\alpha^3\partial_r + \frac{\alpha^1 S^2 - \alpha^2 S^1}{\tanh r} \right) + \right.$$

$$\left. \frac{1}{\cos t \sinh r}\Sigma_{\theta\phi} \right\}\Psi = 0, \qquad \Sigma_{\theta\phi} = \alpha^1 \frac{\partial}{\partial\theta} + \alpha^2 \frac{\partial_\phi + S^3 \cos\theta}{\sin\theta}.$$

Будем диагонализировать квадрат и третью проекцию полного углового момента, что соответствует подстановке для полевой функции

$$\psi = \begin{vmatrix} 0 \\ \varphi_1(t, r)D_{-1} \\ \varphi_2(t, r)D_0 \\ \varphi_3(t, r)D_{+1} \end{vmatrix};$$

D-функции Вигнера обозначены как $D_\sigma = D^j_{-m,\sigma}(\phi, \theta, 0), \quad \sigma = -1, 0, +1$. С помощью рекуррентных формул [17]

$$\partial_\theta D_{-1} = \frac{1}{2}(a D_{-2} - \nu D_0), \frac{m - \cos\theta}{\sin\theta} D_{-1} = \frac{1}{2}(a D_{-2} + \nu D_0),$$

$$\partial_\theta D_0 = \frac{1}{2}(\nu D_{-1} - \nu D_{+1}), \frac{m}{\sin\theta} D_0 = \frac{1}{2}(\nu D_{-1} + \nu D_{+1}),$$

$$\partial_\theta D_{+1} = \frac{1}{2}(\nu D_0 - a D_{+2}), \frac{m + \cos\theta}{\sin\theta} D_{+1} = \frac{1}{2}(\nu D_0 + a D_{+2}),$$

где $\nu = \sqrt{j(j+1)}$, $a = \sqrt{(j-1)(j+2)}$, находим действие углового оператора

$$\Sigma_{\theta\phi}\Psi = \frac{\nu}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} (\varphi_1 + \varphi_3) D_0 \\ -i\,\varphi_2 D_{-1} \\ i\,(\varphi_1 - \varphi_3) D_0 \\ +i\,\varphi_2 D_{+1} \end{vmatrix}.$$

Далее получаем 4 уравнения для трех функций:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2}{\tanh r}\right)\varphi_2 + \frac{\nu/\sqrt{2}}{\sinh r}(\varphi_1 + \varphi_3) = 0,$$

$$-\left(\cos t \frac{\partial}{\partial t} + 2\sin t\right)\varphi_1 - \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\tanh r}\right)\varphi_1 - \frac{\nu/\sqrt{2}}{\sinh r}\varphi_2 = 0,$$

$$-\left(\cos t \frac{\partial}{\partial t} + 2\sin t\right)\varphi_2 + \frac{\nu/\sqrt{2}}{\sinh r}(\varphi_1 - \varphi_3) = 0,$$

$$-\left(\cos t \frac{\partial}{\partial t} + 2\sin t\right)\varphi_3 + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\tanh r}\right)\varphi_3 + \frac{\nu/\sqrt{2}}{\sinh r}\varphi_2 = 0.$$

Выделив специальный множитель

$$\varphi_j(t, r) = \frac{1}{\cos^2 t} \frac{1}{\sinh r} F_j(t, r),$$

получим более простые уравнения:

$$(1') \qquad \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{\tanh r}\right) F_2 + \frac{\nu/\sqrt{2}}{\sinh r}(F_1 + F_3) = 0,$$

$$(2') \qquad -\cos t \frac{\partial}{\partial t} F_1 - \frac{\partial}{\partial r} F_1 - \frac{\nu/\sqrt{2}}{\sinh r} F_2 = 0,$$

$$(3') \qquad -\cos t \frac{\partial}{\partial t} F_2 + \frac{\nu/\sqrt{2}}{\sinh r}(F_1 - F_3) = 0,$$

$$(4') \qquad -\cos t \frac{\partial}{\partial t} F_3 + \frac{\partial}{\partial r} F_3 + \frac{\nu/\sqrt{2}}{\sinh r} F_2 = 0.$$

Первое уравнение не является независимым: оно может быть получено из трех остальных. Таким образом, далее используем три уравнения для функций F_1, F_2, F_3 в следующем виде (пусть $b = \nu/\sqrt{2}$):

$$\frac{\partial}{\partial t} F_2 = \frac{b}{\cos t \sinh r}(F_1 - F_3), \quad \cos t \frac{\partial}{\partial t}(F_1 + F_3) + \frac{\partial}{\partial r}(F_1 - F_3) = 0,$$

$$\cos t \frac{\partial}{\partial t}(F_1 - F_3) + \frac{\partial}{\partial r}(F_1 + F_3) + \frac{2b}{\sinh r} F_2 = 0. \qquad (2)$$

Исключим F_2 из третьего уравнения в (2). Для этого дифференцируем уравнение по времени, а затем учтем выражение для $\partial_t F_2$

$$\cos t\frac{\partial}{\partial t}\cos t\frac{\partial}{\partial t}(F_1-F_3)+\cos t\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial r}(F_1+F_3)+\frac{2b^2}{\sinh^2 r}(F_1-F_3)=0;$$

введем обозначения $F=F_1+F_3$, $G=F_1-F_3$. В результате вместо (2) будем использовать эквивалентную систему

$$\cos t\frac{\partial}{\partial t}F_2=\frac{b}{\sinh r}G,\qquad \cos t\frac{\partial}{\partial t}F=-\frac{\partial}{\partial r}G,$$

$$\left(-\cos t\frac{\partial}{\partial t}\cos t\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{2b^2}{\sinh^2 r}\right)G=0. \tag{3}$$

Вместо t введем координату согласно

$$\cos t\frac{d}{dt}=\frac{d}{d\tau},\qquad \tau=\operatorname{arctanh}(\sin t).$$

Система (3) может быть представлена в виде

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+\frac{\partial^2}{\partial r^2}-\frac{2b^2}{\sinh^2 r}\right)G=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}F_2=\frac{b}{\sinh r}G,\quad \frac{\partial}{\partial\tau}F=-\frac{\partial}{\partial r}G. \tag{4}$$

Уравнение для $G(t,r)$ решается методом разделения переменных

$$G=T(\tau)R(r),\quad T(\tau)=e^{-i\omega\tau},\quad \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\omega^2-\frac{j(j+1)}{\sinh^2 r}\right)R(r)=0.$$

Чтобы решить уравнение для функции $R(r)$, сделаем замену переменной $z=1-e^{-2r}$, введем подстановку $R=z^a(1-z)^b f(z)$; при $a=j+1,\ -j$; $b=\pm\omega/2$ для функции $f(z)$ получаем уравнение гипергеометрического типа с параметрами

$$\gamma=2a,\qquad \alpha=a+b-\frac{i\omega}{2},\qquad \beta=a+b+\frac{i\omega}{2}.$$

Уравнения (4) дают возможность по найденной функции $f(z)$ получить представления для $F_2(t,r)$ и $F(t,r)$:

$$F_2(t,r)=-\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega\tau}\frac{b}{\sin r}R(r),\qquad F(t,r)=+\frac{1}{i\omega}e^{-i\omega\tau}\frac{d}{dr}R(r).$$

Соотношение между формализмами Майораны–Оппенгеймера и Даффина–Кеммера; волны магнитного и электрического типов. В отличие от подхода Майораны–Оппенгеймера подход Даффина–Кеммера позволяет следить за калибровочными степенями свободы электромагнитного поля. Чтобы связать два формализма, будем исходить из известных структур для электромагнитного комплексного 3-вектора и 10-мерной полевой функции

$$\Psi=e^{-i\omega t}\left(0,\varphi_1 D_{-1},\varphi_2 D_0,\varphi_3 D_{+1}\right),$$

$$\Phi=e^{-i\omega t}\,[f_1 D_0; f_2\, D_{-1}, f_3\, D_0, f_4\, D_{+1};$$

$$f_5\, D_{-1}, f_6\, D_0, f_7\, D_{+1}; f_8\, D_{-1}, f_9\, D_0, f_{10}\, D_{+1}].$$

Из сравнения следует

$$\varphi_2=f_6-i f_9,\quad \varphi_1=f_5-i f_8,\qquad \varphi_3=f_7-i f_{10}.$$

Учитывая ограничения по пространственной четности, получаем два класса решений:

$$P=(-1)^{j+1},\quad \varphi_2=-i f_9,\quad \varphi_1=f_5-i f_8,\quad \varphi_3=-f_5-i f_8;$$

$$P=(-1)^{j},\quad \varphi_2=f_6,\quad \varphi_1=f_5-i f_8,\quad \varphi_3=f_5+i f_8.$$

Обратные соотношения имеют вид

$$P=(-1)^{j+1}, \qquad f_9=i\varphi_2, \quad f_5=\frac{1}{2}(\varphi_1-\varphi_3), \quad f_8=\frac{i}{2}(\varphi_1+\varphi_3);$$

$$P=(-1)^{j}, \qquad f_6=\varphi_2, \quad f_5=\frac{1}{2}(\varphi_1+\varphi_3), \quad f_8=\frac{i}{2}(\varphi_1-\varphi_3).$$

Удобно выделить специальный множитель, а затем использовать следующие комбинации:

$$\varphi_j=\frac{1}{\cos^2 t\sinh r}F_j \quad \Rightarrow \quad F=F_1+F_3, \quad G=F_1-F_3, \quad F_2.$$

Несложно показать, что для состояний электромагнитного поля с четностью $P=(-1)^{j+1}$, оба подхода дают эквивалентные системы. Они описывают решения магнитного типа.

Обратимся к состояниям с четностью $P=(-1)^{j}$, в этом случае имеем 6 уравнений. Сначала рассмотрим первые три уравнения, в которых присутствуют только (относящиеся к тензору) функции:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{\tan r}\right)F_2+\frac{\nu}{\sin r}F=0,$$

$$-\cosh t\frac{\partial}{\partial t}F_2+\frac{\nu}{\sin r}G=0, \quad \cosh t\frac{\partial}{\partial t}F+\frac{\partial}{\partial r}G=0. \tag{5}$$

Можно показать, что уравнения (5) эквивалентны уравнениям, полученным в подходе Майораны–Оппенгеймера. Это решения электрического типа.

Рассмотрим три оставшихся уравнения из системы Даффина–Кеммера. Они могут быть преобразованы в 3 уравнения для 6 функций g_1, g_2, g_3, G, F, F_2:

$$f_1=\frac{g_1}{\cosh t}, \quad f_2=\frac{g_2}{\cosh t}, \quad f_3=\frac{g_3}{\cosh t},$$

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2\nu^2}{\sinh^2 r}+\cos t\frac{\partial}{\partial t}\cos t\frac{\partial}{\partial t}\right)G=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}g_2+\frac{\nu}{\sin r}g_1=\frac{F/2}{\sin r}, \qquad \frac{\partial}{\partial\tau}g_3-\frac{\partial}{\partial r}g_1=\frac{F_2}{\sin r}.$$

Из двух последних уравнений видно, что они не позволяют вычислить функции g_1, g_2, g_3 по известным функциям F_2, F. Эта ситуация ожидаема из-за существования калибровочной свободы в электродинамике.

Чтобы получить описание волн электрического типа в калибровке Лоренца, нужно согласовать уравнения с условием Лоренца:

$$-\frac{2\nu}{\sin r}g_2+(\cosh t\partial_t+2\sinh t)g_1-\left(\partial_r+\frac{2}{\tan r}\right)g_3=0.$$

Исключив функции g_2, g_3, получаем

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2}+3\tanh t\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{\cosh^2 t}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{\tan r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{j(j+1)}{\sin^2 r}\right)+2\right]g_1=0. \tag{6}$$

Очевидно, это (t,r)-часть конформно-инвариантного безмассового волнового уравнения в пространстве де Ситтера

$$\left(\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial x^\beta}+2\right)\Phi=0.$$

Уравнение (6) с помощью подстановки

$$g_1=\frac{g_1(t)}{\cosh t}\frac{g_1(r)}{\sin r}$$

приводит к уравнениям в разделенных переменных

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\omega^2-\frac{j(j+1)}{\sin^2 r}\right)g_1(r)=0, \quad \left(\frac{d^2}{d\tau^2}+\omega^2\right)g_1(\tau)=0.$$

Функции $g_2(t,r)$ и $g_3(t,r)$, определяемые соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial\tau}g_2=-\frac{\nu}{\sin r}g_1+\frac{F/2}{\sin r}, \qquad \frac{\partial}{\partial\tau}g_3=\frac{\partial}{\partial r}g_1+=\frac{F_2}{\sin r},$$

дают нам полное описание волн электрического типа в калибровке Лоренца.

Кроме того, в подходе Даффина–Кеммера в лоренцевской калибровке могут быть построены решения градиентного типа, не будем на этом останавливаться детально.

Заключение. Обобщенный тетрадный комплексный формализм Майораны–Оппенгеймера применен для исследования электромагнитного поля в осциллирующей Вселенной де Ситтера. С помощью D-функций Вигнера проведено отделение угловых переменных (θ,ϕ) в векторном поле $E_j(x)+iB_j(x)$ от переменных (t,r). Система дифференциальных уравнений в переменных (t,r) решена точно. Нестатическая геометрия модели де Ситтера приводит к определенной зависимости электромагнитных колебаний от временной переменной. Установлена связь 3-векторного комплексного формализма с 10-мерным матричным формализмом Даффина–Кеммера–Петье. На этой основе построены электромагнитные волны магнитного и электрического типов в обоих подходах.

Авторы благодарны В. М. Редькову за помощь и советы. Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований в рамках сотрудничества между Беларусью и Украиной (грант Ф13К-079), а также в рамках сотрудничества между Беларусью и Арменией (грант Ф14АРМ-021).

Список использованной литературы

1. *Silberstein, L.* Elektromagnetische Grundgleichungen in bivectorieller Behandlung / L. Silberstein // Ann. Phys. (Leiptzig). – 1907. – Vol. 22. – P. 579–586.

2. *Silberstein, L.* Nachtrag zur Abhandlung Über elektromagnetische Grundgleichungen in bivektorieller Behandlung / L. Silberstein // Ann. der Phys. – 1907. – Vol. 24. – P. 783–784.

3. *Majorana, E.* Scientific Papers. (Unpublished). Deposited at the «Domus Galileana» / E. Majorana. – Pisa, quaderno 2. – P. 101/1; 3, P. 11, 160; 15, P. 16; 17, P. 83, 159.

4. *Oppenheimer, J.* Note on Light Quanta and the Electromagnetic Field / J. Oppenheimer // Rev. – 1931. – Vol. 38. – P. 725–746.

5. *Weber, H.* Die partiellen Differential-Gleichungen der mathematischen Physik nach Riemann's Vorlesungen / H. Weber. – Braunschweig, 1901.

6. *Bialynicki-Birula, I.* On the Wave Function of the Photon / I. Bialynicki-Birula // Acta Phys. Polon. – 1994. – Vol. 86. – P. 97–116.

7. *Bialynicki-Birula, I.* Photon Wave Function / I. Bialynicki-Birula // Progress in Optics. – 1996. – Vol. 36. – P. 248–294.

8. *Sipe, J.* Photon Wave Functions / J. Sipe // Phys. Rev. A. – 1995. – Vol. 52. – P. 1875–1883.

9. *Gersten, A.* Maxwell equations as the one photon quantum equation / A. Gersten // Found. of Phys. Lett. – 1998. – Vol. 12. – P. 291–298.

10. *Rodrigues, W. A.* The Many Faces of Maxwell, Dirac and Einstein Equations. Lecture Notes in Physics / W. A. Rodrigues, E. C. de Oliveira // The Many Faces of Maxwell, Dirac and Einstein Equations. Lecture Notes in Physics. – Springer, 2007. – Vol. 722.

11. *Red'kov, V.* The Lorentz Group, Noncommutative Space-Time, and Nonlinear Electrodynamics in Majorana-Oppenheimer Formalism / V. Red'kov, E. Tolkachev // NPCS. – 2010. – Vol. 13. – P. 249–266.

12. Maxwell Equations in Complex form of Majorana–Oppenheimer, Solutions with Cylindric Symmetry in Riemann S_3 and Lobachevsky H_3 spaces / A. A. Bogush [et al.] // Ricerche di matematica. – 2010. – Vol. 59. – P. 59–96.

13. *Red'kov, V.* Majorana–Oppenheimer Approach to Maxwell Electrodynamics. Part II. Curved Riemannian Space / V. M. Red'kov, N. G. Tokarevskaya, G. J. Spix // Adv. Appl. Clifford Algebras. – 2013. – Vol. 23. – P. 165–178.

14. *Ovsiyuk, E. M.* Majorana–Oppenheimer Approach to Maxwell Electrodynamics. Part III. Electromagnetic Spherical Waves in Spaces of Constant Curvature / E. M. Ovsiyuk, V. M. Red'kov, N. G. Tokarevskaya // Adv. Appl. Clifford Algebras. – 2013. – Vol. 23. – P. 153–163.

15. Electromagnetic Field on de Sitter Expanding Universe: Majorana–Oppenheimer Formalism, Exact Solutions in non-Static Coordinates / O. V. Veko [et al.] // NPCS. – 2014. – Vol. 17. – P. 17–39.

16. *Ovsiyuk, E. M.* Maxwell Electrodynamics and Boson Fields in Spaces of Constant Curvature / E. M. Ovsiyuk, V. V. Kisel, V. M. Red'kov. – New York, 2014.

17. *Варшалович, Д. А.* Квантовая теория углового момента / Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский. – Ленинград, 1975.

Поступило в редакцию 29.06.2015