Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 сентябрь–октябрь Том 59 № 5

УДК 535.14

М. ЭСКАНДЕРИ[1], А. В. ЛЕОНОВ[1], И. Д. ФЕРАНЧУК[2]

АНАЛИЗ РЕЛАКСАЦИИ ТРЕХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЫ ВНЕ РАМОК ПРИБЛИЖЕНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ВОЛНЫ

(Представлено академиком С. Я. Килиным)

[1]Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь
cosmic.mahdi@gmail.com; leonov.bsu@gmail.com
[2]Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
iferanchuk@gmail.com

В настоящей работе исследуются квазистационарные энергетические состояния трехуровневой системы в V-конфигурации, находящейся в управляющем резонансном поле. Целью исследования является определение условий, при которых возможно существенное влияние на вероятность спонтанного излучения в такой системе. Показано, что выход за рамки приближения вращающейся волны значительно изменяет спонтанные ширины линий.

Ключевые слова: двухуровневая система, резонансное поле, квазистационарные уровни.

M. ESKANDARI[1], A. V. LEONOV[1], I. D. FERANCHUK[2]

ANALYSIS OF A RELAXATION IN A THREE-LEVEL SYSTEM OUT OF FRAMEWORK OF THE ROTATING WAVE APPROXIMATION

[1]B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
cosmic.mahdi@gmail.com, leonov.bsu@gmail.com
[2]Belarusian State University, Minsk, Belarus
iferanchuk@gmail.com

Quasi-stationary states of the V-configuration three-level system in a driving resonant field is considered in the present article. The main goal of the analysis is to define the conditions when the essential impact on spontaneous emission is possible in this system. It is shown that the spontaneous linewidths substantially change if they are calculated outside the framework of the rotating wave approximation.

Keywords: two-level system, resonant field, quasi-stationary levels.

.

Введение. В настоящее время большой интерес вызывает возможность управления процессами релаксации в квантовых системах с помощью внешних полей. В частности, недавно в [1] было экспериментально продемонстрировано динамическое подавление спектральных линий при резонансной флуоресценции квантовой системы, обусловленное интерференцией амплитуд перехода релаксирующих состояний. Теоретический анализ эффекта изменения ширины линий излучения квантовых систем при воздействии на них монохроматическим полем лазера рассматривался во многих работах. Насколько нам известно, впервые такая возможность была описана в [2; 3]. Детальное теоретическое исследование этого явления рассматривалось в [4] при описании эволюции двухуровневой системы в резонансном поле. Существенно, что во всех этих работах «одетые» состояния излучающей двухуровневой системы, находящейся в управляющем поле лазера, описывались в рамках приближения вращающейся волны (ПВВ).

В [5; 6] для состояний двухуровневого атома в одномодовом резонансном квантовом поле было найдено аналитическое приближение, которое остается равномерно-пригодным (РПП) во всем диапазоне изменения амплитуды резонансного поля. Было показано [7; 8], что выход за рамки ПВВ существенно изменяет эволюцию состояний такой системы. Согласно [5; 6] условие применимости ПВВ определяется неравенством

$$\Omega_R < \Omega, \tag{1}$$

где Ω – частота резонансного поля; Ω_R – частота Раби двухуровневой системы.

С другой стороны, динамическое управление процессами спонтанного излучения двухуровневой системы наиболее эффективно в том случае, когда время жизни относительно спонтанного распада велико по сравнению с периодом осцилляций Раби, что соответствует условию «сильной связи» системы с управляющим полем [9]:

$$\Omega_R > \Gamma, \tag{2}$$

где Γ – ширина линии спонтанного излучения рассматриваемой двухуровневой системы, используется система единиц, где $\hbar = c = 1$.

Таким образом, существует такой диапазон изменения характерных параметров системы ($\Gamma < \Omega_R < \Omega$), когда поправки, обусловленные «антивращающими» слагаемыми в гамильтониане двухуровневой системы, могут быть существенными при детальном описании спектра флуоресценции и вычислении параметров поля, при которых «управление» эволюцией будет наиболее эффективным. Анализ роли таких поправок при формировании спектра спонтанного излучения и является целью настоящей работы. Чтобы не загромождать результаты большим количеством параметров, исследование проведено для достаточно простой модели атомной системы с V-конфигурацией в расположении энергетических уровней (рис. 1).

Основная часть. Как известно [10], задача о вычислении радиационной ширины уровней относительно спонтанного излучения при взаимодействии атома с вакуумным электромагнитным полем состоит в построении квазистационарных решений уравнения Шрёдингера:

$$\begin{gathered} \widehat{H}\left|\psi\right\rangle = E\left|\psi\right\rangle; \\ \widehat{H} = \widehat{H}_a + \widehat{H}_r + \widehat{H}_e + \widehat{V}_r + \widehat{V}_e. \end{gathered} \tag{3}$$

Для принятой 3-уровневой схемы (рис. 1) различные вклады в полный гамильтониан системы $\widehat{H}$ в нерелятивистском случае определяются формулами (частота внешнего «управляющего» поля определяет энергетический масштаб в системе и без нарушения общности можно положить $\Omega = 1$):

$$\widehat{H}_a = -E_0 \,|\, \chi_0 \rangle\langle \chi_0 \,| + \frac{1}{2}\Delta\sigma_3;$$

$$\widehat{H}_e = a^{\dagger}a; \qquad \widehat{V}_e = f\sigma_1(a + a^{\dagger}); \tag{4}$$

$$\widehat{H}_r = \sum_{\mathbf{k},s} \omega_{\mathbf{k}} b^{\dagger}_{\mathbf{k},s} b_{\mathbf{k},s};$$

$$\widehat{V}_r = -\frac{e}{m_e}\sum_{\mathbf{k},s}\left(\frac{2\pi}{V\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2} e^{i\mathbf{kr}}(e_{\mathbf{k},s}\hat{\mathbf{p}})(b^{\dagger}_{-\mathbf{k},s} + b_{\mathbf{k},s}).$$

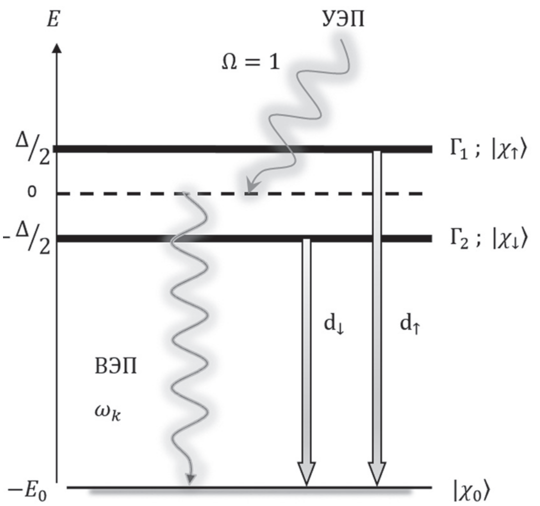

Рис. 1. Схема энергетических уровней V-конфигурации. УЭП – управляющее электромагнитное поле; ВЭП – вакуумное электромагнитное поле

В приведенных уравнениях величина $(-E_0)$, $E_0 > 0$, определяет энергию основного состояния атома (в единицах Ω), соответствующего вектору $|\chi_0\rangle$; энергетическое расщепление возбужденных состояний $|\chi_{\uparrow,\downarrow}\rangle$ с энергиями соответственно $\pm\frac{1}{2}\Delta$, в пространстве которых действуют матрицы Паули σ_i; константа взаимодействия атома с внешним полем f пропорциональна дипольному моменту перехода между возбужденными состояниями; $a^{\dagger}, a$ – операторы уничтожения и рождения квантов внешнего монохроматического поля; операторы $b^{\dagger}_{\mathbf{k},s}, b_{\mathbf{k},s}$ – соответственно операторы рождения и уничтожения фотонов вакуумного электромагнитного поля с волновым вектором **k**, частотой $\omega_{\mathbf{k}}$ и поляризацией $e_{\mathbf{k},s}$; заряд, масса и оператор импульса атомного электрона обозначены соответственно $e, m_e, \hat{\mathbf{p}}$; V – нормировочный объем. В рассматриваемой системе единиц частота Раби, соответствующая n-квантовому состоянию резонансного поля, определяется соотношением

$$\Omega_R = 2f\sqrt{n}. \tag{4}$$

Для дальнейших вычислений определим новый базисный набор возбужденных состояний атома при точном учете его взаимодействия с «управляющим» резонансным полем, так называемые одетые состояния атома, по принятой в квантовой оптике терминологии [11] (отметим, что взаимодействие поля с атомом в основном состоянии пропорционально квадрату амплитуды поля и далее не учитывается). Эти состояния представляют собой точные решения следующего уравнения [5]:

$$\left\{\frac{1}{2}\Delta\sigma_3 + \Omega a^{\dagger}a + f\sigma_1(a + a^{\dagger}) - E^{(0)}_{np}\right\}|\Psi_{np}\rangle = 0. \tag{5}$$

Таким образом, вместо двух возбужденных состояний у «одетого» атома возникает спектр состояний с квазиэнергиями E_{np}, зависящими от квантового числа n, которое определяет число фотонов внешнего поля, и квантового числа $p = \pm 1$, связанного с оператором четности, коммутирующим с гамильтонианом двухуровневой системы в квантовом поле

$$\hat{P}|\Psi_{np}\rangle \equiv \sigma_3 e^{i\pi a^{+}a}|\Psi_{np}\rangle = p|\Psi_{np}\rangle. \tag{6}$$

В большинстве работ в качестве «одетых» состояний атома используются решения уравнения (5) в рамках ПВВ, которые приводят к простым аналитическим выражениям для спектра квазиэнергий. Однако в соответствии с результатами [5] ПВВ справедливо только в области достаточно малых значений $\Omega_R < 1$, так что поправки к квазиэнергиям, обусловленные «антивращающими» слагаемыми в уравнении (5) могут быть сравнимы с радиационной шириной возбужденных состояний. Для выхода за рамки ПВВ можно использовать точное решение уравнений (5), (6), найденное в [5] в следующем виде:

$$|\Psi_{np}\rangle = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{q=\pm} C^{np}_{kq}|k,f\rangle|\chi_q\rangle, \tag{7}$$

где коэффициенты разложения C^{np}_{kq} при любых квантовых числах и константе связи f находятся численно с помощью быстро сходящейся рекуррентной процедуры, основанной на операторном методе [12] и описанной в [5], причем

$$|n,f\rangle = \frac{(a^{\dagger}+f)^n}{\sqrt{n!}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^k}{k!}(a^{\dagger})^k|0_a\rangle e^{-f^2/2}; \quad a|0_a\rangle = 0; \quad |\chi_{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\chi_{\uparrow}\rangle \pm |\chi_{\downarrow}\rangle).$$

Однако более удобным для практических расчетов является аналитическое РПП решение уравнений (5), (6), которое было впервые найдено в работе [5] (см. также [7]). Приведем явный вид этого решения

$$\begin{gathered}
E^{(0)}_{np} \simeq (n + \frac{1}{2}q) - f^2 + \frac{1}{4}p\Delta(S_{nn} + S_{n+q,n+q}) - \frac{1}{2}qM; \\
q = p(-1)^n; \quad M = \{[1 - \frac{1}{2}\Delta(-1)^n(S_{nn} - S_{n+q,n+q})]^2 + \Delta^2 S^2_{n,n+q}\}^{1/2}; \\
S_{km} = (-1)^m \exp(-2f^2)(2f)^{k-m}\sqrt{\frac{m!}{k!}}L^{k-m}_m(4f^2); \quad m \le k; \quad S_{km} = S_{mk}.
\end{gathered} \tag{8}$$

Здесь $L^k_m(x)$ – полиномы Лагерра; симметричная матрица S_{mk} возникает вследствие учета точного интеграла движения (6) при вычислении квазиэнергий «одетого» атома.

В этом же нулевом приближении ОМ интересующие нас коэффициенты разложения (7) волновой функции определяются следующими соотношениями [5]:

$$C_{l+}^{np} \approx B_{np}[\gamma\delta_{ln} + \delta_{l,n+q}]\,; \quad C_{l-}^{np} \approx pB_{np}[(\gamma S_{nn} + S_{n,n+q})\delta_{ln} + (\gamma S_{n+q,n} + S_{n+q,n+q})\delta_{l,n+q}];$$

$$q = p(-1)^n\,; \quad B_{np}^2 = [(\gamma^2 + 1) + (\gamma S_{nn} + S_{n,n+q})^2 + (\gamma S_{n+q,n} + S_{n+q,n+q})^2]^{-1}; \tag{9}$$

$$\gamma = -\frac{p\Delta S_{n,n+q}}{2\Omega - 2f^2 + p\Delta S_{nn} - E_{np}} = -\frac{p\Delta S_{n,n+q}}{\frac{p\Delta}{2}(S_{nn} - S_{n+q,n+q}) - q\Omega + qM},$$

где δ_{kl} – символ Кронекера, коэффициент B_{np} определяется условием нормировки. Отметим, что согласно [13], в практически важном случае достаточно слабого взаимодействия, но интенсивного «управляющего» поля $f \ll 1$; $n \gg 1$ формулы (8), (9) существенно упрощаются и все величины зависят только от частоты Раби (4), которую можно считать постоянной и отнесенной к среднему значению $\bar{n}$, связанному с мощностью W и длительностью τ импульса поля

$$\bar{n} = \frac{W\tau}{\hbar\Omega}; \qquad \Omega_R = 2f\Omega\sqrt{\bar{n}}.$$

Расчет ширины уровней. Численные результаты. Время жизни возбужденного состояния определяется переходом атома в основное состояние с испусканием фотона (**k**s), соответствующего возбуждению вакуумного электромагнитного поля в резонаторе. По предположению, можно пренебречь взаимодействием управляющего электромагнитного поля с атомом, находящимся в основном состоянии. Это означает, что внешнее поле переходит в одно из своих стационарных состояний с определенным числом фотонов m. Таким образом, волновая функция системы в первом приближении по радиационному взаимодействию определяется следующей линейной комбинацией:

$$|\psi_{np}^{(1)}\rangle = |\Psi_{np}\rangle + \sum_{m\mathbf{k}s} B_{m\mathbf{k}s}^{np}\,|\psi_{m\mathbf{k}s}\rangle;$$

$$|\psi_{m\mathbf{k}s}\rangle = |\chi_0, m\rangle b_{\mathbf{k},s}^{\dagger}\,|0_b\rangle; \qquad |\chi_0, m\rangle = |\chi_0\rangle \frac{1}{\sqrt{m!}}(a^{\dagger})^m\,|0_a\rangle.$$

Коэффициенты $B_{m\mathbf{k}s}$ в рассматриваемом приближении по $\hat{V}_r$ вычисляются непосредственно из уравнения (3)

$$B_{m\mathbf{k}s}^{np} = -\frac{1}{m + \omega_{\mathbf{k}} - E_0 - E_{np} - i0}\langle\chi_0, m|\,d_{\mathbf{k}s}e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{r}}\,|\Psi_{np}\rangle; \quad d_{\mathbf{k}s} = -\frac{e}{m_e}\left(\frac{2\pi}{V\omega_{\mathbf{k}}}\right)^{1/2}(\mathbf{e}_{\mathbf{k},s}\hat{\mathbf{p}}).$$

Учет второго порядка по взаимодействию с вакуумным полем в приближении Вейскопфа–Вигнера [10] приводит к уравнению для определения комплексных значений для энергии квазистационарных состояний

$$E_{np} = -\sum_{m\mathbf{k}s}\frac{|\langle\chi_0, m|\,d_{\mathbf{k}s}e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{r}}\,|\Psi_{np}\rangle|^2}{m + \omega_{\mathbf{k}} - E_0 - E_{np} - i0}.$$

В предположении, что мнимая часть энергии мала по сравнению с действительной, решение этого уравнения для энергии одного из возбужденных состояний «одетого» атома имеет вид

$$E_{np} \simeq E_{np}^{(0)} + \delta E_{np} - i\frac{\Gamma_{np}}{2};$$

$$\Gamma_{np} = 2\pi\sum_{m\mathbf{k}s}|\langle\chi_0, m|\,d_{\mathbf{k}s}e^{-i\mathbf{k}\boldsymbol{r}}\,|\Psi_{n}p\rangle|^2\,\delta(m + \omega_{\mathbf{k}} - E_0 - E_{np}^{(0)}).$$

При использовании определения (7) для волновой функции «одетого» атома можно выразить матричный элемент от оператора его взаимодействия с вакуумным полем через матричные элементы переходов реального атома

$$\langle \chi_0, m \,|\, d_{\mathbf{k}s} e^{-i\mathbf{kr}} \,|\, \Psi_{np} \rangle = \sum_{lq} C_{lq}^{np} \langle \chi_0 \,|\, d_{\mathbf{k}s} e^{-i\mathbf{kr}} \,|\, \chi_q \rangle \langle m \,|\, l, f \rangle. \quad (10)$$

Как будет видно из дальнейшего, явный вид матричного элемента $\langle m \,|\, l, f \rangle$ между различными состояниями внешнего поля нам не понадобится, хотя его и можно найти в аналитическом виде [13].

Используем теперь дипольное приближение в матричных элементах взаимодействия с вакуумным полем и определим обычным образом векторы, пропорциональные дипольным моментам атомных переходов, участвующих в радиационной релаксации,

$$\mathbf{d}_{\uparrow,\downarrow} = \frac{e}{m_e} \langle \chi_0 \,|\, \hat{\mathbf{p}} \,|\, \chi_{\uparrow,\downarrow} \rangle.$$

Тогда после стандартного суммирования по поляризациям и интегрированию по волновым векторам испускаемых фотонов в формуле (10) получаем следующий результат:

$$\Gamma_{np} = \frac{2}{3} \sum_{m<(E_{np}+E_0)} (E_{np}^{(0)} + E_0 - m) \left| \sum_l \langle l, f \,|\, m \rangle [C_{l+}^{np} (\mathbf{d}_\uparrow + \mathbf{d}_\downarrow) + C_{l-}^{np} (\mathbf{d}_\uparrow - \mathbf{d}_\downarrow)] \right|^2. \quad (11)$$

Формула (11) получена в рамках обычных приближений, используемых при вычислении радиационного времени жизни в нерелятивистском случае. Несмотря на то что ширина уровня представлена суммой положительно определенных слагаемых, она не сводится к простой сумме ширин возбужденных состояний свободного атома, а содержит также вклад, определяемый интерференцией матричных элементов обоих переходов.

В работе [7] была получена оценка для ширины уровня, справедливая при любой амплитуде поля. Однако в настоящей работе мы проведем аналитическое вычисление непосредственно по формуле (11) с учетом неравенства (1). В этом случае для интеграла перекрытия $\langle l, f \,|\, m \rangle$ справедливо соотношение [13]

$$\langle l, f \,|\, m \rangle = \delta_{mn} + O\left(\frac{\Omega_R^2}{\Omega^2} \right) = \delta_{mn} + O(f^2 n).$$

Тогда формула (11) преобразуется к виду

$$\Gamma_{np} \approx \frac{2}{3} \sum_m (E_{np}^{(0)} + E_0 - m) \left| [C_{m+}^{np} (\mathbf{d}_\uparrow + \mathbf{d}_\downarrow) + C_{m-}^{np} (\mathbf{d}_\uparrow - \mathbf{d}_\downarrow)] \right|^2 .$$

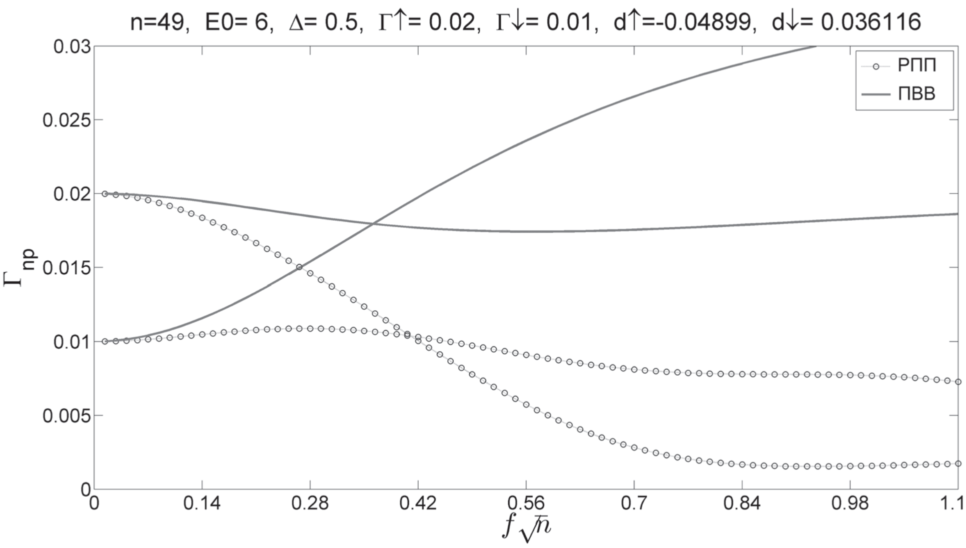

Рис. 2. Зависимость ширины возбужденных уровней от константы связи вдали от резонанса, вычисленная в рамках ПВВ (сплошная линия) и РПП (пунктирная). Верхняя и нижняя кривые отвечают четности ($p = 1, p = -1$) соответственно

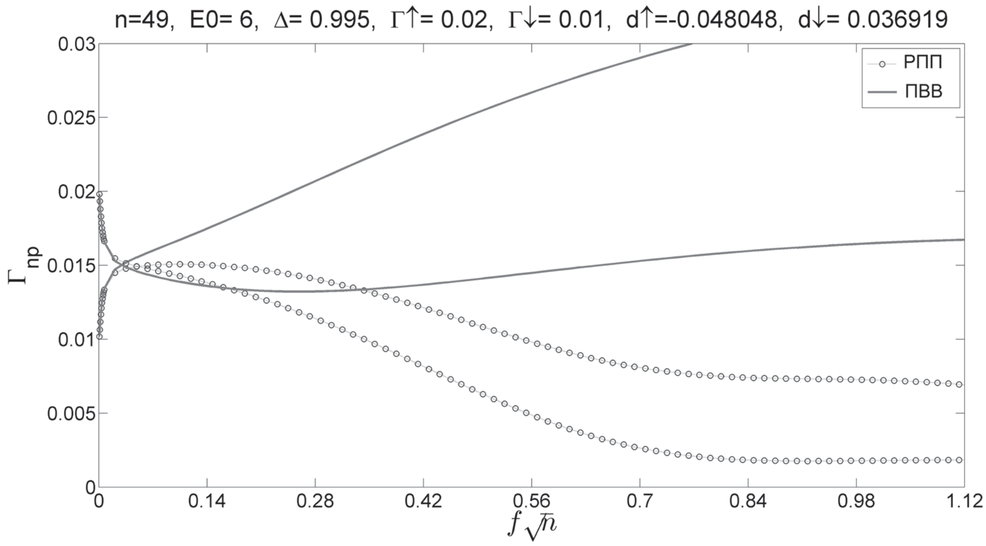

Рис. 3. То же, что на рис. 2, но вблизи резонанса

После алгебраических преобразований находим

$$\Gamma_{np} \equiv \frac{2}{3}[|\mathbf{d}_\uparrow|^2 D_\uparrow^{np} + |\mathbf{d}_\downarrow|^2 D_\downarrow^{np} + 2Re(\mathbf{d}_\uparrow \mathbf{d}_\downarrow^*) D_\pm^{np}];$$

$$\Gamma_{\uparrow,\downarrow} = \frac{4}{3}(E_0 \pm \Delta/2)|\mathbf{d}_{\uparrow,\downarrow}|^2;$$

$$D_{\uparrow,\downarrow}^{np} = \sum_m (E_{np}^{(0)} + E_0 - m)|C_{m+}^{np} \pm C_{m-}^{np}|^2; \qquad D_\pm^{np} = \sum_m (E_{np}^{(0)} + E_0 - m)[|C_{m+}^{np}|^2 - |C_{m-}^{np}|^2].$$

Введенные определения $\Gamma_{\uparrow,\downarrow}$ совпадают с шириной возбужденных уровней свободного атома, тогда как все остальные величины связаны с перенормировкой дипольного момента в «одетом» атоме, обусловленной интерференцией в суперпозиционном состоянии, возникшем вследствие взаимодействия атома с внешним полем.

На рис. 2, 3 сравниваются результаты расчета ширины уровней, выполненные в рамках ПВВ и РПП при разных значениях параметров системы. Значения этих параметров выбраны соответствующими эксперименту [1] и условиям (2). Как видим, ширина линии при расчетах в рамках ПВВ и РПП имеет качественно различное поведение в зависимости от константы связи.

Заключение. Таким образом, в настоящей работе показано, что динамику переходов между уровнями квантовой системы в резонансном электромагнитном поле необходимо рассматривать вне рамок приближения вращающейся волны даже при достаточно слабой связи между системой и полем. Это обусловлено высокой чувствительностью интерференционных слагаемых в амплитудах спонтанного излучения к вкладу нерезонансных гармоник, формирующих энергетические уровни «одетого» атома. Полученные результаты существенны при выборе параметров поля, использующегося для управления процессами эволюции в атомных системах.

Список использованной литературы

1. Dynamically Controlled Resonance Fluorescence Spectra from a Doubly Dressed Single InGaAs Quantum Dot / Y. He [et al.] // Phys. Rev. Lett. – 2015. – Vol. 114. – Art. 097402. – P. 1–4.

2. *Feranchuk, I.* About possibility of a decrease in the radiation width of excited levels of atoms and nuclei / I. Feranchuk // Phys. Lett. – 1985. – Vol. 83A. – P. 126–129.

3. *Kocharovskaya, O.* Coherent amplification of an ultrashort pulse in a three-level medium without a population inversion / O. Kocharovskaya, Ya. I. Khanin // JETP Lett. – 1988. – Vol. 48. – P. 630–634; Scully M. O., Zhu S. Y., Gavrielides A. // Phys. Rev. Lett. – 1989. – Vol. 62. – P. 2813; Cardimona D. A., Raymer M. G., Stroud C. R. // J. Phys. B. – 1982. – Vol. 55. – P. 15–21.

4. *Scully, M. O.* Spectral Line Elimination and Spontaneous Emission Cancellation via Quantum Interference / M. O. Scully, S. Y. Zhu // Phys. Rev. Lett. – 1996. – Vol. 76. – P. 388–391; *Ficek, H. Z.* Fluorescence and absorption by a two-level atom in

a bichromatic field with one strong and one weak component / Z. Ficek, H. S. Freedhoff // Phys. Rev. D. – 1996. – Vol. 53. – P. 4275–4287.

5. *Feranchuk, I. D.* Two-level system in a one-mode quantum field: numerical solution on the basis of the operator method / I. D. Feranchuk, L. I. Komarov, A. P. Ulyanenkov // J. Phys. A.: Math. Gen. – 1996. – Vol. 29. – P. 4035–4047.

6. *Irish, E. K.* Generalized rotating-wave approximation for arbitrarily large coupling / E. K. Irish // Phys. Rev. Lett. – 2007. – Vol. 99. – Art. 173601. – P. 1–4: Erratum: // Phys. Rev. Lett. – 2007. – Vol. 99. – Art. 259901. – P. 1.

7. *Feranchuk, I. D.* Control of the atom (nucleus) lifetime in the excited state by means of a low-frequency external field / I. D. Feranchuk, L. I. Komarov, A. P. Ulyanenkov // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. – 2002. – Vol. 35. – P. 3957–3965.

8. *Feranchuk, I. D.* Strong field effects in the evolution of a two-level system / I. D. Feranchuk, A. V. Leonov // Phys. Lett. A. – 2011. – Vol. 375, N 3. – P. 385–389.

9. *Scully, M. O.* Quantum optics / M. O. Scully, M. S. Zubairy. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 630 p.

10. *Heitler, W.* Quantum Theory of Radiation / W. Heitler. – Oxford: Clarendon,1936. – 685 p.

11. *Килин, С. Я.* Квантовая оптика: Поля и их детектирование / С. Я. Килин. – 2-е изд. – М.: УРСС, 2003. – 176 с.

12. Nonperturbative description of quantum systems / I. Feranchuk [et al.]. – Berlin: Springer, 2015. – 360 p.

13. *Feranchuk, I.* Two-level system in a single mode quantum field / I. D. Feranchuk, A. V. Leonov. – Berlin: LAP, Berlin, 2013. – 135 p.

Поступило в редакцию 07.09.2015