Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **ноябрь–декабрь** **Том 59 № 6**

МАТЕМАТИКА

УДК 519.2

Член-корреспондент Ю. С. ХАРИН, М. К. ЖУРАК

БИНОМИАЛЬНАЯ УСЛОВНО АВТОРЕГРЕССИОННАЯ МОДЕЛЬ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ ДАННЫХ И ЕЕ ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

НИИ прикладных проблем математики и информатики Белорусского государственного университета, Минск, Беларусь
kharin@bsu.by; mzhurak@gmail.com

Разработана биномиальная условно авторегрессионная модель пространственно-временных данных. Исследованы вероятностные свойства этой модели. Построены оценки максимального правдоподобия параметров модели на основе наблюдаемых пространственно-временных данных. Представлены результаты компьютерных экспериментов.

Ключевые слова: пространственно-временные данные, оценки максимального правдоподобия, биноминальное распределение, цепь Маркова.

Yu. S. KHARIN, M. K. ZHURAK

BINOMIAL CONDITIONAL AUTOREGRESSIVE MODEL OF THE SPACE-TIME DATA AND ITS PROBABILISTIC AND STATISTICAL ANALYSIS

Research Institute for Applied Problems of Mathematics and Informatics of the Belarusian State University, Minsk, Belarus
kharin@bsu.by; mzhurak@gmail.com

The binomial conditional autoregressive model of spatio-temporal data is constructed. The probabilistic properties of the model constructed are studied. The maximum likelihood estimators of parameters of the model based on the observed spatio-temporal data are calculated. The results of computer experiments are presented.

Keywords: spatio-temporal data, maximum likelihood estimators, binomial distribution, Markov chain.

Введение. На практике статистические данные часто содержат информацию об изменении реального процесса во времени и в пространстве совместно. Поэтому математические модели на основе пространственно-временных данных дают возможность адекватно описывать реальные процессы и проводить их статистический анализ, учитывая большее число факторов [1]. Приведем краткий обзор моделей пространственно-временных данных.

В [2] для анализа пространственно-временных данных младенческой смертности используется байесовская иерархическая статистическая модель со скрытым динамическим марковским случайным процессом. В [3] байесовская геостатистическая биномиальная и отрицательная биномиальная модели разработаны для моделирования распределения плотности локализации малярийных комаров. В [4] рассмотрена байесовская биномиальная геостатистическая модель и проведен сравнительный анализ со стандартными биномиальными моделями. Иерархические байесовские модели предложены для моделирования лонгитюдных и пространственно коррелированных биномиальных данных в [5].

В сообщении предлагается новая модель пространственно-временных данных – биномиальная условно авторегрессионная модель, исследуются вероятностные свойства этой модели и решается задача статистического оценивания параметров модели по наблюдаемым пространственно-временным данным.

Биномиальная условно авторегрессионная модель и ее свойства. Введем обозначения: (Ω, F, P) – вероятностное пространство; $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $I\{H\}$ –

индикаторная функция события H; $s \in S = \{1, 2, ..., n\}$ – индексная переменная, кодирующая пространственные координаты географических регионов (условимся далее их называть сайтами), на которые разбита изучаемая пространственная область; n – число сайтов; $t \in \{1, 2, ..., T\}$ – дискретное время; T – длительность временного промежутка наблюдений; $x_{s,t} \in \{0, 1, \ldots, N\} = A$ – дискретная случайная величина наблюдения в момент времени t в сайте s; $F_{<t} = \sigma\{x_{u,\tau} : u \in S, \tau \le t-1\} \subset F$ – σ-алгебра, порожденная указанными в скобках случайными величинами; $z_{j,t} \ge 0$, $j = 1, ..., m$, – наблюдаемый (известный) набор значений m внешних факторов в момент времени t; $L(\xi)$ – закон распределения вероятностей случайной величины ξ; $\mathbf{E}\{\cdot\}$, $\mathbf{D}\{\cdot\}$, $\operatorname{cov}\{\cdot\}$ – символы математического ожидания, дисперсии, ковариации случайных величин соответственно; $Bi(\cdot; N, p)$ – биномиальный закон распределения вероятностей с параметрами $N \in \mathbb{N}$, $0 \le p \le 1$ для случайной величины ξ:

$$\mathbf{P}\{\xi = l\} = Bi(l; N, p) ::= C_N^l p^l (1-p)^{N-l}, \quad l \in A, \ L\{\xi\} = Bi(\cdot; N, p), \tag{1}$$

где $C_N^l = (N!/(N-l)!l!)$.

Построим биномиальную условно авторегрессионную модель пространственно-временных наблюдений $\{x_{s,t}\}$, следуя [6; 7]. Будем предполагать, что при фиксированной предыстории $\{x_{s,\tau} : s \in S, \tau \le t-1\}$ случайные величины $x_{1,t}, x_{2,t}, \ldots, x_{n,t}$ условно независимы, причем

$$L\{x_{s,t} \mid F_{<t}\} = Bi(\cdot; N, p_{s,t}), \tag{2}$$

$$\ln \frac{p_{s,t}}{1-p_{s,t}} = I\{t > 1\} \sum_{i=1}^{n} a_{s,i} x_{i,t-1} + \sum_{j=1}^{m} b_{s,j} z_{j,t}, \quad s \in S, t \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

где $\theta_s = (a_s', b_s')' \in R^{n+m}$; $a_s = (a_{s,1}, a_{s,2}, \ldots, a_{s,n})' \in R^n$; $b_s = (b_{s,1}, \ldots, b_{s,m})' \in R^m$, $s \in S$, – векторы-столбцы параметров модели. Число параметров модели равно $D = n(n+m)$.

Из (3) получим полезные выражения для вычисления $p_{s,t}$:

$$\begin{gathered} p_{s,t} = p_s(X_{t-1}, Z_t) ::= \frac{\exp\{I\{t>1\} a_s' X_{t-1} + b_s' Z_t\}}{1 + \exp\{I\{t>1\} a_s' X_{t-1} + b_s' Z_t\}} = \frac{\exp\{\theta_s' Y_t\}}{1 + \exp\{\theta_s' Y_t\}}, s \in S, t \in \mathbb{N}, \\ 1 - p_{s,t} = (1 + \exp\{\theta_s' Y_t\})^{-1}, \ \frac{p_{s,t}}{1-p_{s,t}} = \exp\{\theta_s' Y_t\}, \end{gathered} \tag{4}$$

где $Z_t = (z_{1,t}, z_{2,t}, \ldots, z_{m,t})' \in R^m$ – вектор-столбец, задающий значения внешних факторов в момент времени t; $X_t = (x_{1,t}, x_{2,t}, \ldots, x_{n,t})' \in A^n$ – вектор-столбец, задающий временной срез исследуемого явления в момент времени $t \in \mathbb{N}$; $Y_t = (I\{t>1\} X_{t-1}', Z_t')' \in R^{n+m}, t \in \mathbb{N}$. Обозначим $L = \{l_j = (l_{1,j}, \ldots, l_{n,j})' \in A^n : j = 1, 2, \ldots, (N+1)^n\}$ – упорядоченное множество $\nu = (N+1)^n$ значений, которые принимает вектор X_t. Например, множество L может быть упорядочено следующим образом:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} N \\ N \\ \vdots \\ N \end{pmatrix} \right\}, \ |L| = \nu.$$

Здесь при упорядочении сначала идет нулевой вектор, затем – векторы всевозможных комбинаций 0 и 1, затем – комбинации из 0, 1 и 2 и так далее.

Т е о р е м а 1. *Если имеет место модель (2), (3), то наблюдаемый векторный временной ряд X_t является неоднородной n-мерной векторной цепью Маркова с конечным пространством состояний L, матрицей вероятностей одношаговых переходов* $Q(t) = (q_{I,J}(t)) \in [0,1]^{\nu \times \nu}$:

$$q_{I,J}(t) = \prod_{s=1}^{n} C_N^{j_s} (\exp\{a_s' I + b_s' Z_{t-1}\})^{j_s} (1 + \exp\{a_s' I + b_s' Z_{t-1}\})^{-N}, \quad I, J \in L, t \ge 2, \ t \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

и начальным распределением вероятностей $p = (p_J)' \in [0,1]^{\nu}$:

$$p_J = \prod_{s=1}^{n} C_N^{j_s} (\exp\{b_s' Z_1\})^{j_s} (1 + \exp\{b_s' Z_1\})^{-N}, \quad J \in L. \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что для модели (2), (3) выполняется марковское свойство. Воспользуемся обобщенной формулой умножения вероятностей, модельными предположениями (2), (3) и условной независимостью случайных величин $x_{1,t}, x_{2,t}, \ldots, x_{n,t} \in A$ при фиксированной σ-алгебре $F_{<t} = \sigma\{x_{u,\tau} : u \in S, \tau \le t-1\}$:

$$\mathbf{P}\{X_t = I_t \,|\, X_{t-1} = I_{t-1}, \ldots, X_1 = I_1\} = \mathbf{P}\{x_{1,t} = i_{1,t}, \ldots, x_{n,t} = i_{n,t} \,|\, X_{t-1} = I_{t-1}\} =$$

$$\prod_{s=1}^{n} \mathbf{P}\{x_{s,t} = i_{s,t} \,|\, X_{t-1} = I_{t-1}\} = \mathbf{P}\{X_t = I_t \,|\, X_{t-1} = I_{t-1}\}.$$

Таким образом, выполняется марковское свойство и X_t является неоднородной n-мерной векторной цепью Маркова. Матрица вероятностей одношаговых переходов $Q(t) = (q_{I,J}(t))$ определяется с учетом (1), (3) и свойства условной независимости:

$$q_{I,J}(t) = \mathbf{P}\{X_t = J \,|\, X_{t-1} = I\} = \prod_{s=1}^{n} \mathbf{P}\{x_{s,t} = j_s \,|\, X_{t-1} = I\} =$$

$$\prod_{s=1}^{n} C_N^{j_s} p_s^{j_s}(I, Z_t)(1 - p_s(I, Z_t))^{N - j_s} = \prod_{s=1}^{n} C_N^{j_s} \left(\frac{p_s(I, Z_t)}{1 - p_s(I, Z_t)} \right)^{j_s} (1 - p_s(I, Z_t))^{N}.$$

Далее, с учетом (4) имеем

$$q_{I,J}(t) = \prod_{s=1}^{n} C_N^{j_s} (\exp\{a_s' I + b_s' Z_{t-1}\})^{j_s} (1 + \exp\{a_s' I + b_s' Z_{t-1}\})^{-N},$$

что совпадает с (5).

Вычислим теперь начальное распределение вероятностей $p = (p_J)' \in [0,1]^{\nu}$ цепи Маркова X_t согласно (1)–(4)

$$p_J := \mathbf{P}\{X_1 = J\} = \prod_{s=1}^{n} \mathbf{P}\{x_{s,t} = j_s\} = \prod_{s=1}^{n} C_N^{j_s} p_s^{j_s}(Z_1)(1 - p_s(Z_1))^{N - j_s} =$$

$$\prod_{s=1}^{n} C_N^{j_s} \left(\frac{p_s(Z_1)}{1 - p_s(Z_1)} \right)^{j_s} (1 - p_s(I, Z_1))^{N} = \prod_{s=1}^{n} C_N^{j_s} (\exp\{b_s' Z_1\})^{j_s} (1 + \exp\{b_s' Z_1\})^{-N},$$

что совпадает с (6). □

С л е д с т в и е 1. В условиях теоремы 1 матрица условных вероятностей переходов $H(t_1, t_2) = (h_{i,j}(t_1, t_2))$, $h_{I,J}(t_1, t_2) = \mathbf{P}\{X_{t_2} = J \mid X_{t_1} = I\}$, $I, J \in L$, цепи Маркова X_t за $t_2 - t_1$ шагов от момента времени t_1 до момента t_2 $(t_1 < t_2, t_1, t_2 \in N)$ имеет вид

$$H(t_1, t_2) = Q(t_1 + 1) Q(t_1 + 2) \ldots Q(t_2).$$

С л е д с т в и е 2. В условиях теоремы 1 если вектор внешних факторов $Z_t = Z = (z_1, \ldots, z_m)' \in R^m$ не зависит от *t*, то матрица вероятностей одношаговых переходов (5) не зависит от *t* и цепь Маркова является однородной:

$$Q = (q_{I,J}) \in [0,1]^{\nu \times \nu},$$

$$q_{I,J} = \prod_{s=1}^{n} C_N^{j_s} (\exp\{a_s' I + b_s' Z\})^{j_s} (1 + \exp\{a_s' I + b_s' Z\})^{-N}, \quad I, J \in L,$$

$$H(t_1, t_2) = Q^{t_2 - t_1}.$$

С л е д с т в и е 3. Текущее распределение вероятностей $p(t) = (p_J(t))' \in [0,1]^{\nu}$, $p_J(t) ::= \mathbf{P}\{X_t = J\}, J \in L,$ в момент времени t определяется соотношением

$$p_J(t) = \sum_{I \in L} p_I h_{I,J}(1,t), \quad J \in L, t \in \mathbb{N}, \tag{7}$$

или в матричном виде

$$p(t) = H'(1,t)p, \quad t \in \mathbb{N},$$

где $H(1,1) = \mathbf{I}_{\nu}$ – единичная матрица порядка ν.

Л е м м а 1. *Если имеет место модель (2), (3), то распределение вероятностей* $\mathbf{P}\{x_{s,t} = i_{s,t}\}$, $s \geq 1$, $t \in \mathbb{N}$, *находится следующим образом:*

$$\mathbf{P}\{x_{s,t} = i_{s,t}\} = \sum_{i_{1,t},\ldots,\, i_{s-1,t}, i_{s+1,t},\ldots, i_{n,t} \in A} ((Q(1) \cdot \ldots \cdot Q(t))' p)_{I_t},$$

где матрицы $Q(t), p$ *определены в теореме 1.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для нахождения $\mathbf{P}\{x_{s,t} = i_{s,t}\}$ воспользуемся формулой маргинального распределения вероятностей

$$\mathbf{P}\{x_{s,t} = i_{s,t}\} = \sum_{i_{1,t},\ldots,\, i_{s-1,t}, i_{s+1,t},\ldots, i_{n,t} \in A} \mathbf{P}\{X_t = I_t\}.$$

Далее в силу следствий 1, 3 имеем

$$\mathbf{P}\{x_{s,t} = i_{s,t}\} = \sum_{i_{1,t},\ldots,\, i_{s-1,t}, i_{s+1,t},\ldots, i_{n,t} \in A} (H'(1,t)p)_{I_t} = \sum_{i_{1,t},\ldots,\, i_{s-1,t}, i_{s+1,t},\ldots, i_{n,t} \in A} \Big((Q(1) \cdot \ldots \cdot Q(t))' p\Big)_{I_t},$$

что совпадает с доказываемым выражением. □

Л е м м а 2. *Если имеет место модель (2), (3), то математическое ожидание и дисперсия случайной величины* $x_{s,t}$ *имеют вид*

$$\mathbf{E}\{x_{s,t}\} = N \sum_{i_1,\ldots,i_n \in A} p_s(I, Z_t) p_I(t-1),$$

$$\mathbf{D}\{x_{s,t}\} = N(N-1)\mathbf{E}\{p_s^2(X_t, Z_t)\} + \mathbf{E}\{x_{s,t}\}(1 - \mathbf{E}\{x_{s,t}\}),$$

где $\mathbf{E}\{p_s^2(X_t, Z_t)\} = N \sum_{i_1,\ldots,i_n \in A} p_s^2(I, Z_t) p_I(t-1).$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся формулой полного математического ожидания и тем фактом, что в силу модели (2), (3) случайная величина $x_{s,t}$ имеет условное биномиальное распределение

$$\mathbf{E}\{x_{s,t}\} = \mathbf{E}\{\mathbf{E}\{x_{s,t} \,|\, X_{t-1}\}\} = \mathbf{E}\{N p_s(X_{t-1}, Z_t)\}.$$

По определению математического ожидания и в силу следствия 3 к теореме 1 получим

$$\mathbf{E}\{x_{s,t}\} = N\mathbf{E}\{p_s(X_{t-1}, Z_t)\} = N \sum_{i_1,\ldots,i_n = 0}^{N} p_s(I, Z_t) p_I(t-1),$$

где $p_s(I, Z_t)$, $p_I(t-1)$ находятся из (4) и (7) соответственно.

Далее, пользуясь формулой полного математического ожидания, свойством дисперсии биномиального распределения и полученными ранее результатами, найдем дисперсию

$$\mathbf{D}\{x_{s,t}\} = \mathbf{E}\{x_{s,t}^2\} - \mathbf{E}^2\{x_{s,t}\} = \mathbf{E}\{\mathbf{E}\{x_{s,t}^2 \,|\, X_{t-1}\}\} - \mathbf{E}^2\{\mathbf{E}\{x_{s,t} \,|\, X_{t-1}\}\} =$$

$$\mathbf{E}\{N p_{s,t}(1 - p_{s,t} + N p_{s,t})\} - \mathbf{E}^2\{N p_{s,t}\} = N\mathbf{E}\{p_{s,t}\} - N\mathbf{E}\{p_{s,t}^2\} + N^2\mathbf{E}\{p_{s,t}^2\} - N^2\mathbf{E}^2\{p_{s,t}\} =$$

$$N(N-1)\mathbf{E}\{p_s^2(X_t, Z_t)\} + \mathbf{E}\{x_{s,t}\}(1 - \mathbf{E}\{x_{s,t}\}),$$

где $\mathbf{E}\{p_s^2(X_t, Z_t)\} = N \sum_{i_1,\ldots,i_n \in A} p_s^2(I, Z_t) p_I(t-1)$. □

Л е м м а 3. *Если имеет место модель (2), (3) и* $Z_t = Z = (z_1, \ldots, z_m)' \in R^m$ *не зависит от t, то для n-мерной векторной цепи Маркова* X_t *существует единственное стационарное распределение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Условия леммы удовлетворяют следствию 2 теоремы 1, поэтому цепь Маркова X_t является однородной. Оценим снизу элементы матрицы Q:

$$q_{I,J} = \prod_{s=1}^{n} C_N^{j_s} (\exp\{a_s{}'I + b_s{}'Z\})^{j_s} (1 + \exp\{a_s{}'I + b_s{}'Z\})^{-N}, \quad I, J \in L.$$

Так как

$$C_N^{j_s} (\exp\{a_s{}'I + b_s{}'Z\})^{j_s} \geq 1, \ (1 + \exp\{a_s{}'I + b_s{}'Z\})^{-N} > 0, \ N < \infty,$$

то $q_{I,J} = \prod_{s=1}^{n} C_N^{j_s} (\exp\{a_s{}'I + b_s{}'Z\})^{j_s} (1 + \exp\{a_s{}'I + b_s{}'Z\})^{-N} > 0$ для всех $I, J \in L$. Поэтому согласно [8] цепь Маркова является эргодической и существует единственное стационарное распределение. □

Для нахождения стационарного распределения $\pi = (\pi_I) \in [0,1]^{\nu \times \nu}$ необходимо решить систему уравнений

$$Q'\pi = \pi, \ \sum_{I \in A^n} \pi_I = 1.$$

Статистическое оценивание параметров. Примем обозначения: $\theta = (\theta_1{}', \ldots, \theta_n{}')' \in R^{n(n+m)}$ – составной вектор параметров, подлежащих оцениванию.

Т е о р е м а 2. *В рамках модели (2), (3) логарифмическая функция правдоподобия для наблюдений* $\{X_t : t = 1, 2, ..., T\}$ *имеет аддитивный по* $\theta_1, \ldots, \theta_n$ *вид*

$$l(\theta) = \sum_{s=1}^{n} l_s(\theta_s), \ l_s(\theta_s) = \sum_{t=1}^{T} (x_{s,t} \theta_s{}'Y_t - N \ln(1 + \exp\{\theta_s{}'Y_t\}) + \ln C_N^{x_{s,t}}). \tag{8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся обобщенной формулой умножения и марковским свойством, установленным в теореме 1, для построения функции правдоподобия

$$L(\theta) = \mathbf{P}\{X_1, \ldots, X_T\} = \mathbf{P}\{X_1\} \prod_{t=2}^{T} \mathbf{P}\{X_t \mid X_{t-1}\}.$$

В теореме 1 найдены выражения для $\mathbf{P}\{X_1\}$ и $\mathbf{P}\{X_t \mid X_{t-1}\}$:

$$\mathbf{P}\{X_1\} = \prod_{s=1}^{n} C_N^{x_{s,1}} (\exp\{b_s{}'Z_1\})^{x_{s,1}} (1 + \exp\{b_s{}'Z_1\})^{-N},$$

$$\mathbf{P}\{X_t \mid X_{t-1}\} = \prod_{s=1}^{n} C_N^{x_{s,t}} (\exp\{\theta_s{}'Y_t\})^{x_{s,t}} (1 + \exp\{\theta_s{}'Y_t\})^{-N}, \quad t \geq 2.$$

Тогда имеем

$$L(\theta) = \prod_{t=1}^{T} \prod_{s=1}^{n} C_N^{x_{s,t}} (\exp\{\theta_s{}'Y_t\})^{x_{s,t}} (1 + \exp\{\theta_s{}'Y_t\})^{-N} = \prod_{s=1}^{n} \prod_{t=1}^{T} C_N^{x_{s,t}} (\exp\{\theta_s{}'Y_t\})^{x_{s,t}} (1 + \exp\{\theta_s{}'Y_t\})^{-N}.$$

Вычислим логарифмическую функцию правдоподобия

$$l(\theta) = \ln L(\theta) = \ln \left(\prod_{s=1}^{n} \prod_{t=1}^{T} C_N^{x_{s,t}} (\exp\{\theta_s{}'Y_t\})^{x_{s,t}} (1 + \exp\{\theta_s{}'Y_t\})^{-N} \right) =$$

$$\sum_{s=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} \left(x_{s,t} (\theta_s{}'Y_t) - N \ln(1 + \exp\{\theta_s{}'Y_t\}) + \ln C_N^{x_{s,t}} \right) = \sum_{s=1}^{n} l_s(\theta_s),$$

что совпадает с (8). □

Для нахождения оценки максимального правдоподобия (ОМП) $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1{}', \ldots, \hat{\theta}_n{}')'$ параметров модели необходимо максимизировать логарифмическую функцию правдоподобия (8)

$$l(\theta) \to \max_{\theta}. \tag{9}$$

Из теоремы 2 следует, что задача (9) распадается на n экстремальных задач:

$$l_s(\theta_s) \to \max_{\theta_s}, \ s \in S. \tag{10}$$

Необходимое условие для нахождения локального максимума в задаче (10) имеет вид

$$\nabla_{\theta_s} l_s(\theta_s) = \mathrm{O}_{n(n+m)}, \tag{11}$$

где $\mathrm{O}_{n(n+m)}$ – вектор-столбец, все $n(n + m)$ элементов которого равны нулю.

Л е м м а 4. *Для модели (2), (3) вектор-столбец производных первого порядка и матрица производных второго порядка по параметру* θ_s *от функции* $l_s(\theta_s)$, $s \in S$, *имеют вид*

$$\nabla_{\theta_s} l_s(\theta_s) = \sum_{t=1}^{T}\left(x_{s,t} - N\frac{\exp\{\theta_s{}'Y_t\}}{1+\exp\{\theta_s{}'Y_t\}}\right)Y_t, \ \nabla^2_{\theta_s} l_s(\theta_s) = -N\sum_{t=1}^{T}\frac{\exp\{\theta_s{}'Y_t\}}{(1+\exp\{\theta_s{}'Y_t\})^2}Y_tY_t{}'.$$

При условии $\left|\sum_{t=1}^{T}\frac{\exp\{\theta_s{}'Y_t\}}{(1+\exp\{\theta_s{}'Y_t\})^2}Y_tY_t{}'\right| \neq 0$ *матрица* $\nabla^2_{\theta_s} l_s(\theta_s)$ *является отрицательно определенной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вектор-столбец первых производных по параметру θ_s от функции $l_s(\theta_s)$, $s \in S$, вычисляется из (8) следующим образом:

$$\nabla_{\theta_s} l_s(\theta_s) = \nabla_{\theta_s}\left(\sum_{t=1}^{T}(x_{s,t}(\theta_s{}'Y_t) - N\ln(1+\exp\{\theta_s{}'Y_t\})) + \ln C_N^{x_{s,t}}\right) =$$

$$\sum_{t=1}^{T}(x_{s,t}\nabla_{\theta_s}(\theta_s{}'Y_t) - N\nabla_{\theta_s}\ln(1+\exp\{\theta_s{}'Y_t\})) = \sum_{t=1}^{T}(x_{s,t}Y_t - N(1+\exp\{\theta_s{}'Y_t\})^{-1}\exp\{\theta_s{}'Y_t\}Y_t).$$

Имеем цепочку матричных равенств

$$\nabla^2_{\theta_s} l_s(\theta_s) = \nabla_{\theta_s}(\nabla_{\theta_s} l_s(\theta_s)) = \nabla_{\theta_s}\left(\sum_{t=1}^{T}(x_{s,t}Y_t - N(1+\exp\{\theta_s{}'Y_t\})^{-1}\exp\{\theta_s{}'Y_t\}Y_t)\right) =$$

$$\sum_{t=1}^{T}\nabla_{\theta_s}(-N(1+\exp\{\theta_s{}'Y_t\})^{-1}\exp\{\theta_s{}'Y_t\}Y_t) = -N\sum_{t=1}^{T}\frac{\exp\{\theta_s{}'Y_t\}}{(1+\exp\{\theta_s{}'Y_t\})^2}Y_tY_t{}'.$$

Оценим квадратичную форму $z'\nabla^2_{\theta_s} l_s(\theta_s)z$, где $z \in R^{n+m}$ – произвольный вектор-столбец

$$z'\nabla^2_{\theta_s} l_s(\theta_s)z = -z'\left(N\sum_{t=1}^{T}\frac{\exp\{\theta_s{}'Y_t\}}{(1+\exp\{\theta_s{}'Y_t\})^2}Y_tY_t{}'\right)z = -N\sum_{t=1}^{T}\frac{\exp\{\theta_s{}'Y_t\}}{(1+\exp\{\theta_s{}'Y_t\})^2}(z'Y_t)(z'Y_t)' \le 0. \tag{12}$$

Так как при условии $\left|\sum_{t=1}^{T}\frac{\exp\{\theta_s{}'Y_t\}}{(1+\exp\{\theta_s{}'Y_t\})^2}Y_tY_t{}'\right| \neq 0$ равенство в (12) достигается только при нулевом векторе z, то выполняется свойство отрицательной определенности

$$\nabla^2_{\theta_s} l_s(\theta_s) \prec 0. \ \square$$

Пусть θ_s^* – некоторое решение системы (11), тогда достаточным условием локального максимума (10) в точке θ_s^* является условие отрицательной определенности матрицы вторых производных в этой точке, которое выполняется в силу леммы 4.

Систему (11) будем решать численно, применяя итерационный метод Ньютона, который обладает квадратичной сходимостью. Для этого метода $(k + 1)$-я итерация имеет вид ($k = 0, 1, 2, \dots$):

$$\theta_s^{(k+1)} = \theta_s^{(k)} - (\nabla^2_{\theta_s} l_s(\theta_s^{(k)}))^{-1}\nabla_{\theta_s} l_s(\theta_s^{(k)}), \tag{13}$$

где $\theta_s^{(k)}$ – приближение к ОМП $\hat{\theta}_s$ на k-м шаге; $\nabla_{\theta_s} l_s(\theta_s^{(k)})$ – вектор-столбец производных первого порядка в точке $\theta_s^{(k)}$; $\nabla^2_{\theta_s} l_s(\theta_s^{(k)})$ – матрица производных второго порядка в точке $\theta_s^{(k)}$.

Итерационные вычисления заканчиваем, если норма $\| \nabla_{\theta_s} l_s(\theta_s^{(k)}) \| < \varepsilon,$ где $\varepsilon > 0$ – наперед заданная достаточно малая величина, определяющая точность вычисления ОМП; при этом в качестве ОМП принимаем статистику $\hat{\theta}_s = \theta_s^{(k+1)}$.

Логарифмическая функция правдоподобия в задаче (10) может иметь несколько локальных максимумов, поэтому для нахождения глобального максимума $l_s(\theta_s)$ будем применять итерационный алгоритм (13) несколько раз для различных начальных значений, а в качестве оценки $\hat{\theta}_s$ выберем то решение задачи (10), для которого функция правдоподобия принимает наибольшее значение.

Так как $\boldsymbol{E}\{x_{s,t} \mid X_{t-1}\} = Np_{s,t}$, то

$$\ln \frac{p_{s,t}}{1-p_{s,t}} = \ln \frac{\boldsymbol{E}\{x_{s,t} \mid X_{t-1}\}}{N - \boldsymbol{E}\{x_{s,t} \mid X_{t-1}\}} = I\{t>1\} \sum_{i=1}^{n} a_{s,i} x_{i,t-1} + \sum_{j=1}^{m} b_{s,j} z_{j,t}.$$

Тогда в качестве одного из возможных векторов начального приближения $\theta_s^{(0)}$ для итерационного алгоритма (13) примем

$$\theta_s^{(0)} = \left(\sum_{t=1}^{T} v_{s,t} Y_{s,t}{}' \right) \left(\sum_{t=1}^{T} Y_{s,t} Y_{s,t}{}' \right)^{-1},$$

где $v_{s,t} = \ln \dfrac{x_{s,t} + \gamma}{N - x_{s,t} + \gamma}$; $Y_t = (I\{t>1\} X_{t-1}{}', Z_t{}')' \in R^{n+m}, t \in \mathbb{N}$; $\gamma > 0$ – некоторая достаточно малая константа для регуляризации вычислений.

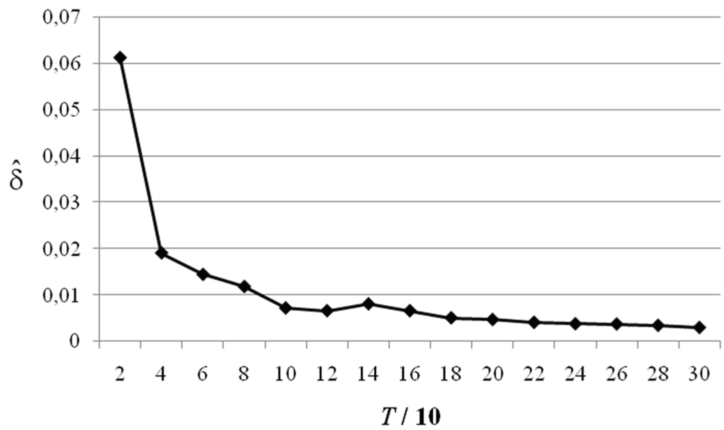
Результаты компьютерного моделирования. Компьютерные эксперименты проводились на модельных данных. Рассматривалась модель (1)–(3) при $N = 10, A = \{0, 1, ..., 10\}$, $n = 3$, $S = \{1, 2, 3\}$, $m = 0$, $\theta_1 = (-0{,}2, 0{,}08, -0{,}05)'$, $\theta_2 = (-0{,}06, 0{,}15, -0{,}08)'$, $\theta_3 = (0{,}01, -0{,}05, -0{,}2)'$. Статистические оценки параметров, полученные по $T = 50$ наблюдениям, имеют вид

$$\hat{\theta}_1 = (-0{,}17, 0{,}0007, 0{,}03)', \; \hat{\theta}_2 = (-0{,}08, 0{,}14, -0{,}05)', \; \hat{\theta}_3 = (0{,}03, -0{,}03, -0{,}29)'.$$

На рисунке представлен график зависимости выборочной среднеквадратической ошибки оценивания параметров в зависимости от длительности наблюдений T ($T \in [20, 300]$) по методу Монте-Карло:

$$\hat{\delta} = \widehat{\boldsymbol{E}} \left\{ \left\| \hat{\theta} - \theta \right\|^2 \right\} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} \| \hat{\theta}^{(k)} - \theta \|^2,$$

где $\hat{\theta}^{(k)}$ – оценка максимального правдоподобия параметров по k-й реализации пространственно-временных данных; θ – истинное значение параметров; $M = 1000$ – количество реализаций Монте-Карло. Рисунок иллюстрирует состоятельность построенной оценки параметров $\hat{\theta}$.



Среднеквадратическая погрешность ОМП модели (1)–(3)

Заключение. В сообщении разработана биномиальная условно авторегрессионная модель на основе пространственно-временных данных. Доказано, что данная модель является неоднородной векторной Марковской моделью. Исследованы вероятностные свойства модели и построены оценки максимального правдоподобия параметров модели. Проведены компьютерные эксперименты на модельных данных.

Список использованной литературы

1. Handbook of spatial statistics / A. E. Gelfand [et al.]. – Boca Raton, 2010.
2. *Zhuang, L.* Spatio-temporal modeling of sudden infant death syndrome data / L. Zhuang, N. Creesie // Stat. Methodol. – 2012. – Vol. 9, N 1–2.
3. *Rumisha, S. F.* Modelling heterogeneity in malaria transmission using large sparse spatio-temporal entomological data / S. F. Rumisha, T. Smith, S. Abdulla // Global Health Action. – 2014. – Vol. 7.
4. Spatio-temporal modeling of sparse geostatistical malaria sporozoite rate data using a zero inflated binomial model / N. Amek [et al.] // Spatial and Spatio-temporal J. of Epidemiology. – 2011. – Vol. 2, N 4.
5. Hierarchical Bayesian spatiotemporal analysis of revascularization odds using smoothing splines / G. L. Silva [et al.] // Stat. Med. – 2008. – Vol. 15, N 27(13).
6. *Kharin, Yu.* Statistical Analysis of Spatio-Temporal Data Based on Poisson Conditional Autoregressive Model / Yu. Kharin, M. Zhurak // Informatica. – 2015. – Vol. 26, N 1. – P. 67–87.
7. *Харин, Ю. С.* Пуассоновская условно авторегрессионная модель и ее оценивание на основе пространственно-временных данных / Ю. С. Харин, М. К. Журак // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2013. – № 3. – С. 22–30.
8. *Ширяев, А. Н.* Вероятность / А. Н. Ширяев. – М.: МГУ, 1957.

Поступило в редакцию 17.06.2015