Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 ноябрь–декабрь Том 59 № 6

УДК 511.42

М. В. ЛАМЧАНОВСКАЯ[1], *В. И. БЕРНИК*[2]

РЕГУЛЯНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ В КРУГАХ МАЛОГО РАДИУСА

(Представлено членом-корреспондентом В. В. Гороховиком)

[1]*Институт информационных технологий Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники, Минск, Беларусь*
lammv@mail.ru
[2]*Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь*
bernik@im.bas-net.by

Полученные в сообщении результаты связаны с распределением алгебраических чисел большой высоты $Q \in \mathbb{N}$ в кругах малых радиусов $r_i = Q^{-\gamma}, \gamma \geq 0.$ В работе доказано, что при любом $Q \geq Q_0(n)$ в $\mathbb{C}$ существуют круги K_1 и K_2 радиусов r_1 и r_2, $\max(r_1, r_2) < c_1(n)Q^{-\frac{1}{4}}, c_1 > c_{01}(n),$ в которых нет алгебраических чисел $\alpha \in K_1$, $\beta \in K_2$, $\max(H(\alpha), H(\beta)) \leq Q.$ Если же радиусы кругов удовлетворяют условию $\min(r_1, r_2) > c_2(n)Q^{-\frac{1}{4}}$, $c_2 > c_{02}(n),$ то количество алгебраических чисел в кругах K_1 и K_2 не менее, чем $c_3(n)Q^5 r_1^2 r_2^2.$

Ключевые слова: алгебраические числа, диофантовы приближения, мера Лебега, теорема Дирихле, теорема Минковского о выпуклом теле, теорема Лиувилля, дроби Фарея, равномерное распределение, регулярная система, распределение алгебраических чисел.

M. V. LAMCHANOVSKAYA[1], *V. I. BERNIK*[2]

REGULARITY OF DISTRIBUTHION OF COMPLEX ALGEBRAIC NUMBERS IN CIRCLES OF SMALL RADIUS

[1]*Institute of Information Technology of the Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics, Minsk, Belarus*
lammv@mail.ru
[2]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*
bernik@im.bas-net.by

For any sufficiently large positive integer $Q \geq Q_0(n)$ we prove that there exist complex circles K_1, $K_2 \subset \mathbb{C}$ of radii r_1 and r_2, $\max(r_1, r_2) < c_1(n)Q^{-\frac{1}{4}}, c_1 > c_{01}(n),$ containing no algebraic numbers $\alpha \in K_1$, $\beta \in K_2$ with heights bounded by Q, $\max(H(\alpha), H(\beta)) \leq Q.$ We also show that if the radii of the circles K_1 and K_2 obey the condition $\min(r_1, r_2) > c_2(n)Q^{-\frac{1}{4}}$, $c_2 > c_{02}(n),$ then the number of algebraic numbers lying in these circles is bounded from below by $c_3(n)Q^5 r_1^2 r_2^2.$

Keywords: algebraic numbers, diophantine approximations, Lebesgue measure, Dirichlet's theorem, Minkowski theorem on convex body, Liouville's theorem, Farey fractions, uniform distribution, regular system, distribution of algebraic numbers.

Пусть

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 \tag{1}$$

полином с целыми коэффициентами степени $\deg P = n$ и высоты $H = H(P) = \max\limits_{0 \leq j \leq n} |a_j|.$ Через $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ обозначим корни полинома, $H(\alpha)$ – высоту алгебраического числа, равную модулю максимального коэффициента минимального многочлена алгебраического числа $\alpha.$ Далее $Q \geq 1$ достаточно большое натуральное число, а величины $c_1 = c_1(n), c_2, \ldots$ зависят только от n и не зависят от H и Q, μB – мера Лебега измеримого множества $B \subset \mathbb{C}.$

Введем класс полиномов

$$\mathcal{P}_n(Q) = \{P(z) \in \mathbb{Z}[z] : \deg P = n \geq 2, H(P) \leq Q\}.$$

Нетрудно показать, что $\max\limits_{0\le j\le n}|\alpha_j| < Q+1$ и поэтому все корни полиномов $P(z)\in \mathcal{P}_n(Q)$ лежат в круге $\mathcal{L}$ радиуса $r \le Q+1$. Их распределение в $\mathcal{L}$ трудная задача ввиду сложной зависимости α_j от коэффициентов $P(z)$ в (1). Распределение корней имеет важное значение в теории диофантовых приближений и теории трансцендентных чисел [1–3]. Исследование распределения алгебраических чисел позволило В. Г. Спринджуку доказать известную гипотезу Малера [4].

Данное сообщение посвящено проблеме распределения корней полиномов четвертой степени в кругах малых радиусов. Результаты сообщения позволяют получить регулярность распределения комплексных алгебраических чисел в $\mathbb{C}$ с явной зависимостью радиусов кругов от Q [5].

Л е м м а 1 [6]. *Пусть* $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ – *корни многочлена* $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$, $\deg P=n$. *Тогда для любого набора различных корней,* $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\dots,\alpha_{i_k}$, $1\le i_1<i_2<\dots<i_k\le n, k\le n$, *справедливо неравенство* $|\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\dots\alpha_{i_n}| < c_1(n)\dfrac{H(P)}{|a_n|}$.

Пусть $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ корни многочлена (1). С каждым корнем будем связывать множество

$$S(\alpha_i)=\{z\in\mathbb{C}, |z-\alpha_i|=\min_{1\le j\le n}|z-\alpha_j|\}.$$

Везде далее полагаем, что $i=1$ и корни многочлена $P(z)$ упорядочены относительно $\alpha_1: |\alpha_1-\alpha_2|<|\alpha_1-\alpha_3|<\dots<|\alpha_1-\alpha_n|$.

Л е м м а 2 [1]. Пусть $z\in S(\alpha_1)$. Тогда $|z-\alpha_1|\le 2^{n-1}\dfrac{|P(z)|}{|P'(\alpha_1)|}$.

Обозначим через $K_i(u_i,r_i)$, $i=1,2$, круги с центром в точке u_i радиусами r_i.

Т е о р е м а 1. *Для любого* $Q\ge 1$ *существует шар* $S=K_1(u_1,r_1)\times K_2(u_2,r_2)$, *где* $|u_1-u_2|>\delta>0$, $r_i=Q^{-\mu_i}$, $i=1,2$, $\mu_i\ge 0$, *такой, что в шаре* $K=K_1(w_1,R_1)\times K_2(w_2,R_2)$, $K\subset S$, $u_1\notin K_1(w_1,R_1)$, $u_2\notin K_2(w_2,R_2)$, $R_1<c_2r_1$, $R_2<c_3r_2$, *нет алгебраических точек* $\overline{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2)$, $\deg P\ge 4$, $H(\overline{\alpha})=\max\{H(\alpha_1),H(\alpha_2)\}\le Q$ *при условии:*

а) $\mu_1+\mu_2>2$ *и* $Q>Q_0$;

б) $\mu_1+\mu_2=2$ *и* $0<c_2\le c_3$, *где* c_3 – *достаточно мала.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 1. Обозначим T шар, сопряженный шару K, т. е. $T=T_1(\overline{u}_1,r_1)\times T_2(\overline{u}_2,r_2)$, где T_i, $i=1,2$, круг, сопряженный кругу K_i. Рассмотрим многочлены

$$P_1(z)=z^2+z+1 \text{ с корнями } u_1=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \overline{u}_1=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$$

и

$$P_2(z)=z^2-z+2 \text{ с корнями } u_2=\frac{1+\sqrt{7}i}{2}, \overline{u}_2=\frac{1-\sqrt{7}i}{2}.$$

Образуем шары $K_1(u_1,r_1)\times K_2(u_2,r_2)$ и $T_1(\overline{u}_1,r_1)\times T_2(\overline{u}_2,r_2)$. Пусть α_1,α_2 корни минимального многочлена $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0$, $P(\alpha_1)=P(\alpha_2)=0$, $\deg P\ge 4$, $H(P)\le Q$. Предположим, что $\overline{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2)\in K$, тогда $\overline{\beta}=(\overline{\alpha}_1,\overline{\alpha}_2)\in T$. Обозначим $P_3(z)=P_1(z)P_2(z)=z^4+2z^2+z+1$. Найдем $R(P,P_3)$ – результант многочленов $P(z)$ и $P_3(z)$. Так как $P(z)$ и $P_3(z)$ не имеют общих корней, то

$$1\le |R(P,P_3)|=a_n^4|\alpha_1-u_1||\alpha_2-u_2||\alpha_3-u_3||\alpha_4-u_4|L(P,P_3)\le 16c_2^2c_3^2a_n^4Q^{-2(\mu_1+\mu_2)}L(P,P_3), \quad (2)$$

где $\alpha_3=\overline{\alpha}_1, \alpha_4=\overline{\alpha}_2, u_3=\overline{u}_1, u_4=\overline{u}_2$, $L(P,P_3)=\prod\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le 4}}|\alpha_i-u_j|$, $i\ne j$.

По лемме 1 $|L(P,P_3)|<c_4(Ha_n^{-1})^4<c_4Q^4a_n^{-4}$ и поэтому (2) можно оценить как

$$1\le |R(P,P_3)|\le 16c_2^2c_3^2c_4Q^{4-2(\mu_1+\mu_2)}. \quad (3)$$

Если $\mu_1+\mu_2>2$, то при достаточно большой величине Q неравенство (3) противоречиво.

Если $\mu_1+\mu_2=2$, то при $c_2c_3<\dfrac{1}{4}\sqrt{c_4^{-1}}$ неравенство (3) противоречиво. Следовательно, в шаре K нет алгебраических чисел $\overline{\alpha}, \deg\alpha\ge 4, H(\overline{\alpha})\le Q$.

Найдем в кругах каких радиусов обязательно будут алгебраические числа. Для упрощения дальнейших оценок будем считать, что $z, u \in K(0,1)$.

Т е о р е м а 2. *Если* $\max \mu_i \le \frac{1}{4}$, $i=1,2$, *то при достаточно большой величине* c_5 *в шаре* $K = K_1(z, r_1) \times K_2(u, r_2)$, $r_i > c_5 Q^{-\mu_i}$, $i=1,2$, $\mu_i \ge 0$, *существует не менее* $c_6 Q^{5-2(\mu_1+\mu_2)}$ *точек с алгебраическими координатами четвертой степени и высоты* $H(\overline{\alpha}) < c_7 Q$.

Теорема 2 может быть обобщена на алгебраические числа произвольной степени *n*. Для этого необходимо получить оценки решений системы неравенств (14) для многочленов степени $n-1$ и при малых значениях производной воспользоваться оценками величин $|z-\alpha|$ по второй производной как в [1].

Изложим схему доказательства теоремы 2. Пользуясь принципом ящиков Дирихле нетрудно доказать, что при любом $z \in K$ найдется полином $P(z) \in \mathcal{P}_4(Q)$, для которого верна система неравенств

$$\begin{cases} |P(z)| < c_6 Q^{-\frac{1}{4}} \\ |P(u)| < c_6 Q^{-\frac{1}{4}}. \end{cases} \tag{4}$$

Если к системе (4) добавить условие

$$\min(P'(z), P'(u)) > \delta_0 Q, \delta_0 > 0,$$

то из леммы 2 получим существование корней α_1, α_2 и полинома $P(z)$ таких, что

$$\begin{cases} |z-\alpha_1| < 4c_6\delta_0^{-1} Q^{-\frac{5}{4}} \\ |u-\alpha_2| < 4c_6\delta_0^{-1} Q^{-\frac{5}{4}} \end{cases}$$

и искомые алгебраические числа в кругах получены.

Осталось доказать, что система неравенств (4) с дополнительными условием

$$\min(P'(z), P'(u)) \le \delta_0 Q \tag{5}$$

разрешима только на множестве малой меры. Пусть далее

$$|u-z| > \delta. \tag{6}$$

Т е о р е м а 3. *Обозначим* $\mathcal{L}_4(Q)$ *множество* $z \in K_1(z_1, r_1)$, $u \in K_2(u_2, r_2)$, $|z| > \delta, |u| > \delta$, *для которых система неравенств (4), (5) имеет решение в полиномах* $P(z) \in \mathcal{P}_4(Q)$. *Тогда* $\mu\mathcal{L}_4(Q) < \frac{1}{4}\mu K_1 \mu K_2$.

Теорему 3 можно рассматривать как обобщение теоремы Малера–Спринджука на области малой меры.

Схема доказательства теоремы 3. Из условия (4), (6) и леммы 2 при $z \in S(\alpha_1)$, $u \in S(\alpha_2)$ следует, что

$$\begin{cases} |z-\alpha_1| < 2^{-3} c_6 Q^{-\frac{1}{4}} |P'(\alpha_1)|^{-1} \\ |u-\alpha_2| < 2^{-3} c_6 Q^{-\frac{1}{4}} |P'(\alpha_2)|^{-1}. \end{cases}$$

Оценим значение $|P'(\alpha_1)| = a_n \prod_{j=2}^{n} |\alpha_i - \alpha_j|$. Из неравенств $|z-\alpha_1| < \frac{\delta}{4}$, $|u-\alpha_2| < \frac{\delta}{4}$ и (6) имеем $c_7(\delta) a_4 < |P'(\alpha_1)| < c_8(\delta) a_4$. Отсюда

$$\begin{cases} |z-\alpha_1| < c_9 a_n^{-1} Q^{-\frac{1}{4}} \\ |u-\alpha_2| < c_9 a_n^{-1} Q^{-\frac{1}{4}}. \end{cases} \tag{7}$$

При фиксированном $P(z)$ из (7) следует, что мера $\mu\mathcal{L}_4(Q)$ тех (z, u), удовлетворяющих системе (4), (5), не превосходит

$$\mu\mathcal{L}_4(Q) < 2^4 c_{10}^4 a_n^{-4} Q^{-1}. \tag{8}$$

Оценим количество многочленов со старшими коэффициентом a_4 с условием $|a_j| \le a_4, 0 \le j \le 3$, для которых верна система неравенств (4), (5).

Пусть d_1 – центр круга K_1, а d_2 – центр круга K_2. Тогда любую точку (z, u) можно записать в виде

$$\begin{cases} z = d_1 + \theta_1 r_1 \\ z = d_2 + \theta_2 r_2, \end{cases} \tag{9}$$

где $|\theta_j| \le 1, j = 1,2$. Подставим z и u из (9) в систему (4). Получим

$$\begin{cases} |P(d_1)| < c_{11}\left(Q^{-\frac{1}{4}} + a_4 Q^{-\mu_1}\right) \\ |P(d_2)| < c_{12}\left(Q^{-\frac{1}{4}} + a_4 Q^{-\mu_2}\right). \end{cases} \tag{10}$$

Пусть $\mu_1 \ge \mu_2$. Поделим квадрат со стороной $2Q^{-\mu_2}$ на квадраты со стороной $2Q^{-\mu_1}$. Количество таких квадратов не превосходит

$$c_{13} Q^{2(\mu_1 - \mu_2)}. \tag{11}$$

Система неравенств (10) в квадратах со сторонами $2Q^{-\mu_1}$ примет вид

$$\begin{cases} |P(d_1)| < c_{14}\left(Q^{-\frac{1}{4}} + a_4 Q^{-\mu_1}\right) \\ |P(d_2)| < c_{15}\left(Q^{-\frac{1}{4}} + a_4 Q^{-\mu_1}\right). \end{cases} \tag{12}$$

Теперь, если $a_4 > Q^{\mu_1}, \mu_1 \le \dfrac{1}{4}$, то систему неравенств (12) можно переписать в виде

$$\begin{cases} |P(d_1)| < c_{16} a_4 Q^{-\mu_1} \\ |P(d_2)| < c_{17} a_4 Q^{-\mu_1}. \end{cases} \tag{13}$$

Зафиксируем a_4 и набор (a_0, a_1, a_2, a_3), для которого выполняется (13). Пусть (l_0, l_1, l_2, l_3) другой набор коэффициентов с условиями (13). Многочлен с коэффициентами a_j обозначим $P_1(z)$, а с коэффициентами l_j обозначим $P_2(z)$.

Для многочлена $R(z) = P_2(z) - P_1(z)$ выполняются неравенства

$$\begin{cases} |R(d_1)| < \left|(l_3 - a_3)d_1^3 + (l_2 - a_2)d_1^2 + (l_1 - a_1)d_1 + (l_0 - a_0)\right| < 2c_{16} a_4 Q^{-\mu_1} \\ |R(d_2)| < \left|(l_3 - a_3)d_2^3 + (l_2 - a_2)d_2^2 + (l_1 - a_1)d_2 + (l_0 - a_0)\right| < 2c_{17} a_4 Q^{-\mu_1}. \end{cases} \tag{14}$$

Запишем $d_1 = s_1 + it_1, d_2 = s_2 + it_2, s_i, t_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2,$ и перейдем от системы неравенств (14) к системе неравенств относительно s_i и t_i. Заменим получившуюся систему неравенств на линейную систему неравенств относительно целых чисел $b_3 = (l_3 - a_3)$, $b_2 = (l_2 - a_2)$, $b_1 = (l_1 - a_1)$, $b_0 = (l_0 - a_0)$. Определителем этой системы будет нулевой многочлен третьей степени $V(\overline{s}, \overline{t})$ от четырех переменных s_1, s_2, t_1, t_2. Исключим в комплексном пространстве $\mathbb{C}^2$ множество точек с условием $|V(\overline{s}, \overline{t})| \le \delta$ с мерой меньшей $c_{18}\delta_1$ ($\delta_1 \to 0$ при $\delta \to 0$).

Разрешим систему уравнений по правилу Крамера относительно переменных $b_k, 0 \le k \le 3$:

$$\left|b_k\right| = \frac{\left|\Delta_k\right|}{\left|V(\overline{s}, \overline{t})\right|} < c_{19} a_4 Q^{-\mu_1}. \tag{15}$$

Ясно, что количество целых b_k, удовлетворяющих (15), не превосходит $2c_{19}a_4Q^{-\mu_1}$, а количество векторов $\overline{b} = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ не превосходит $c_{20}a_4^4 Q^{-4\mu_1}$. Просуммируем меру $\mu\mathcal{L}_4(Q)$ из (8) по всем векторам $\overline{b}$. Получим

$$\sum_{\overline{b}} \mu\mathcal{L}_4(Q) < c_{21} Q^{-1-4\mu_1}. \tag{16}$$

Найдем сумму мер в (16) по всем кругам K_1 и K_2, воспользовавшись (11). Имеем

$$\sum_{\substack{K_i \\ i=1,2}} \sum_{\overline{b}.} \mu\mathcal{L}_4(Q) < c_{22} Q^{-1-2(\mu_1+\mu_2)} < c_{23} Q^{-1} \mu K_1 \mu K_2.$$

Так как $\left|a_4\right| < c_{24}\delta_0 Q$, то окончательно получим

$$\sum_{a_4} \sum_{\substack{K_i \\ i=1,2}} \sum_{\overline{b}.} \mu\mathcal{L}_4(Q) < c_{25}\delta_0 \mu K_1 \mu K_2.$$

Выберем $\delta_0 < \frac{1}{4} c_{25}^{-1}$. Теорема доказана.

Список использованной литературы

1. *Спринджук, В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск: Наука и техника, 1967. – 184 с.
2. *Гельфонд, А. О.* Трансцендентные и алгебраические числа / А. О. Гельфонд. – М., 1952.
3. *Бересневич, В. В.* Совместные приближения нуля целочисленным многочленом, его производной и малые значения дискриминантов / В. В. Бересневич, В. И. Берник, Ф. Гётце // Докл. НАН Беларуси. – 2010. – Т. 54, № 2. – С. 26–27.
4. *Mahler, K.* Über das Maß der Menge aller S-Zahlen / K. Mahler // Math. Ann. – 1932. – Vol. 106. – P. 131–139.
5. *Bugeaund, Y.* Approximation by Algebraic Numbers / Y. Bugeaund // Cambridge Tracts in Math. – 2004. – Vol. 160.
6. *Фельдман, Н. И.* Аппроксимация некоторых трансцендентных чисел / Н. И. Фельдман // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1951. – Т. 15, № 1. – С. 53–74.

Поступило в редакцию 22.06.2015