Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **ноябрь–декабрь** **Том 59 № 6**

УДК 511.42

А. С. КУДИН

ОБ ОЦЕНКЕ СВЕРХУ КОЛИЧЕСТВА МНОГОЧЛЕНОВ С ОГРАНИЧЕННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В КОРНЕ

(Представлено академиком И. В. Гайшуном)

Институт математики НАН Беларуси, Минск, Беларусь
kunixd@gmail.com

Получена оценка сверху количества многочленов ограниченной степени и высоты из специального класса, имеющих на заданном интервале корень, в котором производная многочлена мала. Данная оценка улучшает известные к настоящему времени и получена с использованием методов метрической теории чисел.

Ключевые слова: диофантовы приближения, размерность Хаусдорфа, приближения нуля значениями полиномов, малая производная в корне.

A. S. KUDIN

ON THE UPPER BOUND OF THE AMOUNT OF POLYNOMIALS WITH BOUNDED DERIVATIVE AT A ROOT

Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus
kunixd@gmail.com

In the article we obtain an upper bound of the amount of integral polynomials from a special class of bounded degree and height with small value of derivative at a root of the polynomial on a given interval.

Keywords: diophantine approximation, hausdorff dimension, approximations of zero by values of polynomials, small derivative at a root.

Многие задачи в теории трансцендентных чисел и теории диофантовых приближений связаны с исследованием свойств множеств действительных, комплексных, и p-адических чисел, которые для бесконечного числа полиномов из некоторого класса $\mathcal{P} \subset \mathbb{Z}[x]$ удовлетворяют неравенствам

$$|P(x)| < H(P)^{-w_1}, |P(z)| < H(P)^{-w_2}, |P(\omega)| < H(P)^{-w_3}, \tag{1}$$

где $w_i > 0, x \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}, \omega \in \mathbb{Q}_p$. Эти множества имеют сложную структуру и поэтому их аппроксимируют более простыми множествами: действительными интервалами, комплексными кругами, p-адическими цилиндрами [1; 2].

Пусть $I \subset (-1/2, 1/2)$ – интервал, $x \in I$. Пусть $P(x) = a_n x^n + ... + a_0$ – целочисленный полином степени n и $H(P)$ – его высота, $H(P) = \max_{0 \le i \le n} |a_i|$. Упорядочим корни $\alpha_1, ..., \alpha_n$ полинома P так, чтобы $|x - \alpha_1| \le ... \le |x - \alpha_n|$. Пусть $Q > Q_0$, где Q_0 достаточно велико, и $c_1, c_2, ...$ – величины, которые зависят только от n. Для обозначения асимптотических соотношений между величинами будем использовать символ Виноградова: $f \ll g$ означает, что $f \le c_0 g$ для некоторой величины c_0, которая зависит только от n. Также запись $f \asymp g$ означает асимптотическую эквивалентность f и g, т. е. $f \ll g \ll f$. В дальнейшем мы будем рассматривать полиномы из множества $\mathcal{P}_n(Q) = \{P \in \mathbb{Z}[x] : \deg P \le n, H(P) \le Q\}$.

Решения первого неравенства (1) лежат [1] в интервалах вида $|x-\alpha_1| < 2^{n-1}|P(x)||P'(\alpha_1)|^{-1}$, которые могут быть велики при малых значениях $|P'(\alpha_1)|$. Решение этой проблемы было предложено Р. Бейкером [3]. Для $v \ge 0$ введем обозначение $\tilde{\mathcal{P}}_n(Q,v) = \{P \in \mathcal{P}_n(Q) : \exists\, x \in I, |P'(\alpha_1)| < Q^{1-v}\}$. Бейкер доказал, что $\tilde{\mathcal{P}}_n(Q,v) \ll Q^{n+1-\min(v,1)}$, и это позволило ему найти при больших значениях $w_1 > n$ точную оценку сверху размерности Хаусдорфа множества действительных чисел, которые удовлетворяют первому неравенству (1) для бесконечного числа полиномов $P \in \mathbb{Z}[x]$, $\deg P = n$.

В данной работе мы получаем обобщение результата Бейкера для специального класса полиномов и любых значений *v*. Центральным моментом доказательства Спринджуком проблемы Малера и ее обобщений является рассмотрение неравенства (1) для полиномов *P*(*x*), у которых $|P'(\alpha_1)| \asymp |a_n||\alpha_1 - \alpha_2|$. Обозначим как $\mathcal{P}_n(Q,v)$ множество ненулевых полиномов $P \in \mathcal{P}_n(Q)$, которые имеют корень $\alpha_1 \in I$ с условием $|P'(\alpha_1)| < Q^{1-v}$ и при этом $|P'(\alpha_1)| \asymp |a_n||\alpha_1 - \alpha_2|$. Очевидно, что $\mathcal{P}_n(Q,v) \subset \tilde{\mathcal{P}}_n(Q,v)$. В работе будет доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 1. *Существует положительная константа* $c_1 = c_1(n)$ *такая, что при* $1 < v \le \dfrac{n}{2}$ *и* $Q > Q_0(n,v,I)$ *выполняется* $\#\mathcal{P}_n(Q,v) < c_1 Q^{n+1-v}$.

В доказательстве теоремы 1 будут использоваться следующие утверждения.

Л е м м а 1. *Пусть* $\delta > 0$ *– некоторое действительное число, n – натуральное,* $Q > Q_0(n,\delta)$ *– достаточно большое действительное число. Далее пусть* $P_1(x), P_2(x) \in \mathcal{P}_n(Q^{\mu})$, $\mu > 0$, *– полиномы без общих корней. Тогда, если для всех x из некоторого интервала* $I \subset (-n,n)$, $|I| = Q^{-\eta}$, $\eta > 0$, *выполняются неравенства* $\max(|P_1(x)|, |P_2(x)|) < Q^{-\tau}$, $\tau > 0$, *то*

$$\tau + \mu + 2\max(\tau + \mu - \eta, 0) < 2\mu n + \delta.$$

Л е м м а 2. *Пусть* $\delta > 0$ *– некоторое действительное число,* n_1, n_2 *– натуральные числа,* $Q > Q_0(n,\delta)$ *– достаточно большое действительное число. Далее пусть* $P_1(x) \in \mathcal{P}_{n_1}(Q^{\mu_1})$, $P_2(x) \in \mathcal{P}_{n_2}(Q^{\mu_2})$, $\mu_1, \mu_2 > 0$, *– полиномы без общих корней. Тогда, если для некоторого трансцендентного* α *выполняются неравенства* $|P_1(\alpha)| < Q^{-\tau_1}$, $|P_2(\alpha)| < Q^{-\tau_2}$, *то*

$$\min(\tau_1, \tau_2) < n_1\mu_2 + n_2\mu_1 + \delta.$$

Л е м м а 3. *Пусть* $t_1(x), \ldots, t_N(x)$, $N \gg Q^{\tau}$, $\tau > 0$, *– целочисленные полиномы степени не более n, среди которых нет двух без общих корней. Тогда из них можно выбрать полиномы* $s_1(x), \ldots, s_M(x)$, $M \gg Q^{\tau}$, *которые представимы в виде* $s_i(x) = k_i(x)d(x)$, *где все* $k_i(x)$ *не имеют общих корней с* $d(x)$, *а также среди* $k_i(x)$ *найдутся хотя бы два без общих корней.*

Леммы 1 и 3 доказаны в [4], лемма 2 доказана в [5].

Л е м м а 4. *Пусть* $\theta_1, \theta_2, s_0, t_0$ *– действительные числа,* $s_0, t_0 > 0$. *Тогда система неравенств*

$$\begin{cases} (s_0 - s)(t_0 - t) \ge \theta_1, \\ (s_0 - s)t + s(t_0 - t) \ge \theta_2 \end{cases}$$

не имеет решений $0 \le s \le s_0$, $0 \le t \le t_0$, *если*

$$\begin{cases} 2\theta_2 > s_0 t_0, \\ \theta_1 + \theta_2 > s_0 t_0. \end{cases} \tag{2}$$

Л е м м а 5. *Пусть* s_0, t_0 *– действительные числа,* $s_0 \ge 2$, $t_0 > 0$. *Тогда*

$$\max_{\substack{1 \le s \le s_0 - 1 \\ 0 \le t \le t_0}} \min(t(s+1), (t_0 - t)(s_0 - s + 1)) \le \frac{1}{4}\left(1 + \frac{2}{s_0}\right) t_0 s_0.$$

Доказательства лемм 4 и 5 не сложны.

Опишем схему доказательства теоремы 1. Предположим, что верно противное, т. е. $\#\mathcal{P}_n(Q,v) \ge c_1 Q^{n+1-v}$. Разобъем интервал I на интервалы I_i, $|I_i| = Q^{-v}$, и будем говорить, что полином $P \in \mathcal{P}_n(Q,v)$ принадлежит интервалу I_i, если у него найдется корень $\alpha_1 \in I_i$, для которого $|P'(\alpha_1)| < Q^{1-v}$ и $|P'(\alpha_1)| \asymp |a_n||\alpha_1 - \alpha_2|$. Если P принадлежит нескольким интервалам I_i, будем считать, что он принадлежит лишь одному их них. Обозначим множество полиномов, которые принадлежат данному интервалу I_i, как $\mathcal{P}_n(Q,v,I_i)$. Используя ряд Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, оценим $|P(x)|$ и $|P'(x)|$ на интервале I_i:

$$|P(x)| \le |P'(\alpha_1)||x-\alpha_1| + \frac{1}{2}|P''(\xi_1)||x-\alpha_1|^2 \le Q^{1-v}Q^{-v} + n^3 Q^1 Q^{-2v} \ll Q^{1-2v}, \qquad (3)$$

$$|P'(x)| \le |P'(\alpha_1)| + |P''(\xi_2)||x-\alpha_1| \le Q^{1-v} + n^3 Q^1 Q^{-v} \ll Q^{1-v}, \qquad (4)$$

где $x \in I_i$, $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha_1, x)$.

Пусть $\rho = \rho(l) = lT^{-1}$, где $0 \le l \le l_0$ – целое число, и $l_0 = l_0(n)$, $T = T(n)$ – достаточно большие целые числа. Нетрудно доказать, что существует $0 \le \rho \le v - T^{-1}$ такое, что среди интервалов I_i найдется не менее $c_2 Q^{v-\rho-T^{-1}}$ интервалов J_i таких, что $\#\mathcal{P}_n(Q,v,J_i) \ge c_3 Q^{n+1-2v+\rho}$, где $c_2 = c_2(n) = 2^{-1} l_0(n)^{-1}$ и $c_3 = c_3(n) = 2^{-1} c_1(n)$. Рассмотрим каждый интервал J_i. Представим $n + 1 - 2v + \rho$ в виде $n + 1 - 2v + \rho = k + \eta_1 + \eta_2$, где $0 \le k \le n - 2v$ – целое число и $\eta_1, \eta_2 > 0$ – действительные числа. С помощью принципа ящиков Дирихле получим из $c_3 Q^{n+1-2v+\rho}$ полиномов P степени не более n, принадлежащих J_i, полиномы R степени не более $m = n - k$, количество которых не менее $c_4 Q^{\eta_2}$, а также используем η_1 для уменьшения их высоты. Очевидно, что мы можем брать любое натуральное $m \in [2v, n]$. Также, очевидно, что $m \ge 3$ и $m + 1 + \rho = 2v + \eta_1 + \eta_2$, откуда вытекает $\eta_1 + \eta_2 \ge 1$. Возьмем $\eta_2 = 2^{-5} n^{-1}$. Коэффициенты $a_2, \ldots, a_n$ полиномов P принимают значения из интервалов $L_e = [-Q, Q]$, $e = 2, \ldots, n$, которые мы покроем интервалами Δ_{e,f_e}. Пусть $|\Delta_{e,f_e}| = Q^{1-\sigma}$ для $e = 2, \ldots, m$ и $|\Delta_{e,f_e}| = 1$ для $e = m+1, \ldots, n$, где $\sigma = \eta_1 (m-1)^{-1}$. Ясно, что количество Δ_{e,f_e} в покрытии не превосходит $\lceil |L_e| / |\Delta_{e,f_e}| \rceil$, откуда следует $\#\{\Delta_{e,f_e}\} \le \lceil 2Q^{\sigma} \rceil \le 4Q^{\sigma}$ для $e = 2, \ldots, m$ и $\#\{\Delta_{e,f_e}\} \le 2Q$ для $e = m+1, \ldots, n$. Таким образом, множество параллелепипедов $\Delta_{2,f_2} \times \ldots \times \Delta_{n,f_n}$ образует покрытие параллелепипеда $L_2 \times \ldots \times L_n$ с количеством элементов $\#\{\Delta_{2,f_2} \times \ldots \times \Delta_{n,f_n}\} \le 2^{2(n-1)} Q^{k+\eta_1}$. Пусть $c_3 \ge 2^{2(n-1)+1} c_4$, тогда

$$\#\mathrm{P}_n(Q,v,J_i) \ge \#\{\Delta_{2,f_2} \times \ldots \times \Delta_{n,f_n}\} 2c_4 Q^{\eta_2},$$

откуда следует, что существует параллелепипед $\Delta_{2,f_2} \times \ldots \times \Delta_{n,f_n}$, в который попало не менее $2c_4 Q^{\eta_2}$ различных полиномов P_j. Получим не менее $c_4 Q^{\eta_2}$ различных ненулевых полиномов $R_j(x) = P_j(x) - P_0(x)$, для которых с учетом (3) и (4) справедливо

$$\begin{cases} \deg R_j \le m, \\ \max(|a_m|, \ldots, |a_2|) \le Q^{1-\sigma}, \\ |R(x)| \ll Q^{1-2v}, \forall x \in J_i, \\ |R'(x)| \ll Q^{1-v}, \forall x \in J_i. \end{cases} \qquad (5)$$

Если $1 - \sigma < 0$, то $\deg R_j(x) \le 1$. Так как $|a_1| = |R'(x)| \ll Q^{1-v}$, то $a_1 = 0$ при $Q > Q_0$. Аналогично, $a_0 = 0$. Получаем противоречие. Следовательно, $1 - \sigma \ge 0 > 1 - v$, откуда с учетом $Q^{1-v} \gg |R'(x)| = |ma_m x^{m-1} + \ldots + 2a_2 x + a_1|$, получаем $|a_1| \ll Q^{1-\sigma} + Q^{1-v} \ll Q^{1-\sigma}$. Аналогично, $|a_0| \ll Q^{1-\sigma}$. Таким образом, $H(R_j) \ll Q^{1-\sigma}$. Из оценок для $H(R_j)$ и $|R(x)|$ следует, что для $\varepsilon_1 = 2^{-6} n^{-2}$ при $Q > Q_0(n)$ справедливо

$$\begin{cases} H(R_j) \le c_5 Q^{1-\sigma} \le Q^{\varepsilon_1} Q^{1-\sigma}, \\ |R(x)| \le c_6 Q^{1-2v} \le Q^{\varepsilon_1} Q^{1-2v}. \end{cases} \qquad (6)$$

Предположим, что среди полиномов R_j найдутся два полинома без общих корней. Применяя для них лемму 1 и используя равенство $1-2v=-m-\rho+\eta_1+\eta_2$, получим при $\delta_1=2^{-6}n^{-2}$ и $Q>Q_0(n)$ неравенство

$$3((m+\rho-\eta_1-\eta_2-\varepsilon_1)+(1-\sigma+\varepsilon_1))-2v<2m(1-\sigma+\varepsilon_1)+\delta_1,$$

которое с помощью эквивалентных преобразований приведем к виду

$$\rho(2m-3)+(m-3)+2v<\delta_1(m-1)+\eta_2(2m-3)+\varepsilon_1(2m^2-2m). \quad (7)$$

Так как $\rho(2m-3)+(m-3)+2v>2$ и $2\geq\delta_1(m-1)+\eta_2(2m-3)+\varepsilon_1(2m^2-2m)$, неравенство (7) противоречиво.

В случае, когда среди полиномов R_j не существует двух полиномов без общих корней, из леммы 3 следует, что среди R_j найдется не менее $c_5Q^{\eta_2}$ полиномов, представимых в виде $R_j(x)=k_j(x)d(x)$, где $k_j(x)$ не имеют общих корней с $d(x)$, и найдутся $k_1(x), k_2(x)$ без общих корней. Введем обозначения $t_0=1-\sigma+\varepsilon_1$ и $s_0=m$. Пусть $\deg d(x)=s$ и $H(d(x))=Q^t$. Тогда из (5) и (6) вытекает $\deg k_j(x)\leq s_0-s$ и $H(k_j(x))\leq Q^{t_0-t}$. Из определения $\mathrm{P}_n(Q,v)$ следует, что полиномы $k_1(x)$, $k_2(x)$, и $d(x)$ имеют корни на интервале J_i. Раскладывая их в ряд Тейлора в окрестности этих корней, для $\delta_2=2^{-6}n^{-2}$ получим при $Q>Q_0(n)$ оценки

$$\begin{cases}|k_j(x)|\leq c_6(n)Q^{t_0-t}Q^{-v}\leq Q^{t_0-t-v+\delta_2}, \forall x\in J_i, j=1,2,\\ |d(x)|\leq c_7(n)Q^tQ^{-v}\leq Q^{t-v+\delta_2}, \forall x\in J_i.\end{cases}$$

Применим лемму 2 к полиномам $k_1(x)$ и $d(x)$ в некоторой трансцендентной точке интервала J_i. Заметим, что $t_0+\delta_2=1-\sigma+\varepsilon_1+\delta_2\leq 1$, откуда и из $-\tau_1=t_0-t-v+\delta_2$ и $-\tau_2=t-v+\delta_2$ получаем

$$v-1\leq\min(\tau_1,\tau_2)<(s_0-s)t+s(t_0-t)+\delta_2. \quad (8)$$

Далее применим лемму 1 к полиномам $k_1(x), k_2(x)$ на интервале J_i и получим неравенство

$$v-\delta_2<2(s_0-s)(t_0-t)+\delta_2. \quad (9)$$

Неравенства (8) и (9) дают систему неравенств

$$\begin{cases}\theta_1=\dfrac{v}{2}-\delta_2<(s_0-s)(t_0-t),\\ \theta_2=v-1-\delta_2<(s_0-s)t+s(t_0-t).\end{cases} \quad (10)$$

Пусть $\rho=\xi v$. Докажем, что при $\xi\geq 1/2$ система неравенств (10) противоречива. Применим лемму 4. Если $\theta_1\leq\theta_2$, что эквивалентно $v\geq 2$, то из второго неравенства системы (2) следует первое. Запишем второе неравенство системы (2):

$$m(1-\sigma+\varepsilon_1)=m\left(\frac{2v-\rho-2+\eta_2}{m-1}+\varepsilon_1\right)<\frac{3}{2}v-1-2\delta_2,$$

которое тождественно

$$v(1/2m-\xi m+3/2)<m+1-\delta_2(2m-2)-\eta_2m-\varepsilon_1(m^2-m).$$

Так как $\xi\geq 1/2$ и $v\geq 0$, достаточно, чтобы выполнялось

$$\frac{3}{2}v<m+1-\delta_2(2m-2)-\eta_2m-\varepsilon_1(m^2-m).$$

Последнее неравенство истинно, так как $2v\leq m$ и $1>\delta_2(2m-2)+\eta_2m+\varepsilon_1(m^2-m)$.

Если $\theta_1>\theta_2$, что эквивалентно $v<2$, то из первого неравенства системы (2) следует второе. Запишем первое неравенство системы (2):

$$m(1-\sigma+\varepsilon_1)=m\left(\frac{2v-\rho-2+\eta_2}{m-1}+\varepsilon_1\right)<2v-2-2\delta_2,$$

что эквивалентно

$$v(2-\xi m)<2-\delta_2(2m-2)-\eta_2 m-\varepsilon_1(m^2-m).$$

Далее, $\xi\geq 1/2$, $m\geq 3$, и $v\geq 0$, поэтому достаточно, чтобы выполнялось

$$\frac{1}{2}v<2-\delta_2(2m-2)-\eta_2 m-\varepsilon_1(m^2-m).$$

Последнее неравенство истинно, так как $v<2$ и $1>\delta_2(2m-2)+\eta_2 m+\varepsilon_1(m^2-m)$.

Докажем, что при $\xi\leq 2/3$ также получаем противоречие. Определим множество полиномов

$$\tilde{\mathcal{P}}=\left\{P\in\mathcal{P}_n(Q):\deg P=s,\, H(P)\leq Q^t,\,(s+1)t\leq\frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{s_0}\right)s_0t_0\right\}$$

и получим оценку его мощности

$$\#\tilde{\mathcal{P}}\leq\sum_{s=0}^{n}c_8(n)Q^{(s+1)t}\leq c_9(n)Q^{\frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{s_0}\right)s_0t_0}.$$

Согласно лемме 5, хотя бы один полином из $k_1(x)$ и $d(x)$ принадлежит множеству $\tilde{\mathcal{P}}$, а так как $k_1(x)$ и $d(x)$ имеют корни на интервале J_i, то количество интервалов J_i не превосходит $n(\#\tilde{\mathcal{P}})$. Таким образом, получаем неравенство

$$c_2(n)Q^{v-\rho-T^{-1}}\leq\#\{J_i\}\leq nc_9(n)Q^{\frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{s_0}\right)s_0t_0},$$

откуда при $\delta_3=2^{-6}n^{-2}$ и $Q>Q_0(n)$ следует $v-\rho-T^{-1}\leq\frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{s_0}\right)t_0s_0+\delta_3$. Запишем противоположное неравенство

$$v-\rho-T^{-1}>\frac{1}{4}\left(1+\frac{2}{m}\right)m(1-\sigma+\varepsilon_1)+\delta_3,$$

и с помощью эквивалентных преобразований получим

$$m\left(v-\frac{3}{2}\rho+1\right)>4v-3\rho-2+2\delta_4,$$

где $\delta_4=(T^{-1}+\delta_3)(m-1)+\frac{1}{4}(m+2)(\eta_2+\varepsilon_1(m-1))$. Так как $\rho\leq 2/3v$ и $2v\leq m$, то достаточно, чтобы выполнялось

$$2v\left(v-\frac{3}{2}\rho+1\right)>4v-3\rho-2+2\delta_4,$$

что эквивалентно $2v^2-2v+2>2\delta_4+\rho(3v-3)$. Далее, $v>1$ и $\rho\leq 2/3v$, поэтому достаточно доказать неравенство $2v^2-2v+2>2\delta_4+2/3v(3v-3)$, которое тождественно

$$1>\delta_4=(T^{-1}+\delta_3)(m-1)+\frac{1}{4}(m+2)(\eta_2+\varepsilon_1(m-1)).$$

Последнее неравенство истинно при $T(n)=2^5n$.

Список использованной литературы

1. *Спринджук, В. Г.* Проблема Малера в метрической теории чисел / В. Г. Спринджук. – Минск, 1967.
2. *Bernik, V.* A divergent Khintchine theorem in the real, complex, and p-adic fields / V. Bernik, N. Budarina, D. Dickinson // Lithuanian Mathematical J. – 2008. – Vol. 48, N 2. – P. 158–173.
3. *Baker, R*. Sprindzuk's theorem and hausdorff dimension / R. Baker // Mathematika. – 1976. – Vol. 23, N 2. – P. 184–197.
4. *Bernik, V.* Application of Hausdorff Dimension in the theory of Diophantine Approximation / V. Bernik // Acta Arithmetica. – 1983. – Vol. 42, N 3. – P. 219–253.
5. *Гельфонд, А. О.* Трансцендентные и алгебраические числа / А. О. Гельфонд. – М., 1952.

Поступило в редакцию 25.05.2015