Доклады Национальной академии наук Беларуси

2015 **ноябрь–декабрь** **Том 59 № 6**

ФИЗИКА

УДК 530.12, 535

Е. А. ТОЛКАЧЕВ

КАЛИБРОВОЧНАЯ СВОБОДА УРАВНЕНИЙ МАКРОСКОПИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ: ДВУХПОТЕНЦИАЛЬНЫЙ ПОДХОД

(Представлено членом-корреспондентом Л. М. Томильчиком)

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси, Минск, Беларусь
tea@dragon.bas-net.by

В рамках преметрической электродинамики показано, что макроскопические полевые уравнения инвариантны относительно обобщенных калибровочных преобразований типа Кабиббо–Феррари, частным случаем которых являются «преобразования Сердюкова–Федорова». Однако инвариантность полной системы уравнений, включающей линейные уравнения связи общего вида и потенциалы, имеет место только при выполнении дополнительного условия, которое найдено в наиболее общей форме.

Ключевые слова: калибровочные преобразования, уравнения макроскопической электродинамики, потенциалы, дифференциальные формы.

E. A. TOLKACHEV

GAUGE FREEDOM OF THE MACROSCOPIC ELECTRODYNAMICS EQUATIONS: THE TWO-POTENTIAL APPROACH

B. I. Stepanov Institute of Physics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus
tea@dragon.bas-net.by

Within the framework of premetric electrodynamics, it is shown that the macroscopic field equations are invariant under generalized gauge transformations of Cabibbo–Ferrari type, the special case of which are the "Serdyukov–Fedorov transformations". However, the invariance of the complete system of equations, including the linear equations of general form and potentials, takes place only under the additional condition that has been found in most general form.

Keywords: gauge transformations, macroscopic electrodynamics equations, potentials, differential forms.

Введение. В последние полтора десятка лет возобновился интерес [1–5] к проблеме выбора наиболее адекватного вида материальных уравнений макроскопической электродинамики. При этом адекватность понимается в двух смыслах. В работах [1; 2], развивающих так называемый преметрический подход, требуется адекватность математическому аппарату теории при сохранении максимальной общности. В других статьях, например, в [3], во главу угла ставится адекватность уравнений связи физическим свойствам сред. Работы [4; 5] продолжают давнюю дискуссию [6] о возможности обоснования феноменологического вывода наиболее общих линейных уравнений связи на основе использования известной недоопределенности полевых уравнений макроскопической электродинамики, которая демонстрируется с помощью подстановок [6–8], которые автор именует «преобразования Сердюкова–Федорова». При этом физический смысл этих преобразований по-прежнему остается невыясненным.

В настоящей работе в рамках преметрического формализма показано, что согласованная система уравнений макроскопической электродинамики с линейными уравнениями связи общего вида инвариантна относительно обобщенных калибровочных преобразований типа Кабиббо и Феррари [9], частным случаем которых являются «преобразования Сердюкова–Федорова». Указанная инвариантность возможна только при выполнении условия нулевого поля, которое найдено в наиболее общей форме, в микроскопическом пределе воспроизводящей известные выражения [9; 10].

Основная часть. Известно, что система уравнений макроскопической электродинамики состоит из 8 динамических уравнений относительно 12 неизвестных функций – индукций и средних полей, которые связаны 6 материальными уравнениями. В большинстве работ по макроскопике, включая и процитированные [4–8], не уделяется должного внимания переопределенности этой системы. Стандартное решение проблемы двух лишних уравнений достигается добавлением еще 6 уравнений и 4 неизвестных – определением полей через скалярный и векторный потенциалы, что обращает 4 полевых уравнения в тождества и уравнивает число уравнений и неизвестных функций – 16 на 16. Только это делает систему формально согласованной и открывает возможность для построения ее лагранжиана и исследования стандартными методами, включая нахождение сохраняющихся величин.

Поскольку отличительной чертой методов Ф. И. Федорова была ковариантность и максимальная общность, то уместно представить описанную конструкцию в преметрическом формализме [3], использующем язык дифференциальных форм. При этом фарадеевская пара уравнений для полей B, E записывается через внешнюю производную обычной 2-формы, а максвелловская – для H и D, как внешняя производная твистированной 2-формы. Напомним, что законы преобразования тензорных коэффициентов твистированных форм при замене координат включают дополнительное умножение на знак детерминанта якобиана, что позволяет сохранить инвариантность теории относительно отражений пространственных координат. Тогда полная система уравнений макроскопической электродинамики с линейными уравнениями связи общего вида выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered} dF = d(E \wedge dt + B) = 0, \quad (\partial_{[k} F_{lm]} = 0), \\ dH = d(-H \wedge dt + D) = J, \quad (\partial_{[k} H_{lm]} = J_{klm}), \\ H = \kappa[F], \quad (H_{ij} = \kappa_{ij}{}^{lm} F_{lm}), \\ F = dA, \quad (F_{lm} = \partial_l A_m - \partial_m A_l), \end{gathered} \tag{1}$$

где все индексы пробегают значения от 1 до 4; $F = F_{lm} dx^l \wedge dx^m / 2$ – 2-форма напряженностей; $A = A_l \wedge dx^l$ – 1-форма потенциала; $H = H_{lm} dx^l \wedge dx^m / 2$ – твистированная 2-форма индукций; $J = J_{klm} dx^k \wedge dx^l \wedge dx^m / 6$ – твистированная 3-форма тока. Наконец, κ – $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$-форма материальных параметров, коэффициентами которой является антисимметричный по раздельным перестановкам верхних и нижних индексов материальный тензор $\kappa_{ij}{}^{lm}$. Очевидно, что предполагается локальное (1 + 3) расщепление четырехмерного дифференцируемого многообразия. Соответственно, E и H – пространственные 1-формы, а B и D – пространственные 2-формы, сопоставляемые полям и индукциям. Тензорная запись уравнений дана в круглых скобках.

Буква d в уравнениях обозначает операцию внешнего дифференцирования, обладающую замечательным свойством – $d^2 = 0$. В силу этого система (1) не изменяется, например, при стандартных калибровочных преобразованиях потенциала $A \to A + d\lambda$, где λ – 0-форма, т. е. скалярная дифференцируемая функция пространственных координат и времени. Не ограничивая общности можно подчинить потенциал, по крайней мере, одному калибровочному условию, например, потребовать $A_0 = 0$. Также нетрудно видеть, что два первых уравнения в (1) остаются неизменными при преобразованиях вида

$$F \to F' = F - dP, \quad H \to H' = H - dQ. \tag{2}$$

Расписывая (2) по компонентам в пространстве Минковского имеем лоренц-ковариантное обобщение «преобразований Сердюкова–Федорова»

$$\begin{gathered} \underline{E}' = \underline{E} + \dot{\underline{P}} + \mathrm{grad} P_0, \quad \underline{B}' = \underline{B} - \mathrm{rot} \underline{P}, \\ \underline{H}' = \underline{H} + \dot{\underline{Q}} + \mathrm{grad} Q_0, \quad \underline{D}' = \underline{D} + \mathrm{rot} \underline{Q}, \end{gathered} \tag{3}$$

которое в точности переходит в них в калибровке $P_0 = Q_0 = 0$. Слово «калибровка» здесь употреблено не случайно, поскольку из (1) следует стандартное определение полей

$$\underline{E} = -\dot{\underline{A}} - \mathrm{grad} A_0, \quad \underline{B} = \mathrm{rot}\underline{A},$$

и очевидно, что первая строка (3) представляет собой сдвиг 4-потенциала на 4-вектор $(-P_0, -\underline{P})$. Легко видеть, что уже только одно это преобразование не может быть произвольным. Продемонстрируем это на простейшем случае. Пусть в калибровке $A_0 = 0$ калибровочные функции $\underline{P} = \pm\underline{A}$, что соответствует «преобразованиям Сердюкова–Федорова» – $\underline{E}' = \begin{matrix}0\\2\underline{E}\end{matrix}$, $\underline{B}' = \begin{matrix}0\\2\underline{B}\end{matrix}$. Преобразование, соответствующее верхнему знаку, бессмысленно тривиализует систему (1), поскольку из $F' = d(E' \wedge dt + B') = 0$ вытекает, что $H' = \kappa[F'] = -dQ$ является точной формой и, следовательно, замкнутой, тогда $J' = 0$. Нижний знак порождает двусмысленность. Подстановка $F' = d(E' \wedge dt + B') = 2F$ в (1) влечет за собой либо $H' = \kappa[F'] = 2H - dQ$ и переопределение внешних токов $J' = 2J$, либо $J' = J$ и тогда надо переопределять материальные параметры

$$H' = \kappa'[F'] \equiv \frac{1}{2}\kappa[2F] - dQ = H - dQ.$$

Никакой регулярной процедуры переопределения внешних токов и/или материальных тензоров не существует. Поскольку преобразования Сердюкова–Федорова являются подклассом преобразований потенциалов, то использование 8 независимых P- и Q-функций означает физически недопустимое увеличение числа степеней свободы электромагнитного поля, которое определяется как число независимых компонент потенциала. Радикальный выход состоит в ограничении класса функций градиентными преобразованиями $P = d\alpha, Q = d\gamma$, не порождающими преобразований полей и индукций. Однако необходимого эффекта можно достигнуть и с помощью более слабых ограничений, подчинив P- и Q-функции дополнительным связям, которые, как и в двухпотенциальном подходе [9; 10] к микроскопическим уравнениям Максвелла, будем называть условиями нулевого поля.

Для того чтобы найти их достаточно переписать (1) в виде четырех уравнений относительно 4-потенциала, которые собственно и описывают все явления макроскопической электродинамики

$$d\{\kappa[dA]\} = J. \tag{4}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (4) инвариантно относительно обобщенных калибровочных преобразований (2) $d\{\kappa[d(A-P)] + dQ\} = J$, только при условии

$$\kappa[dP] - dQ = 0. \tag{5}$$

Это и есть искомое условие нулевого поля в макроскопической электродинамике с линейными уравнениями связи общего вида. Уравнение (5) имеет не только упомянутые выше тривиальные решения $P = d\alpha$, $Q = d\gamma$. Действуя на него операцией внешнего дифференцирования, имеем $d\{\kappa[dP]\} = 0$, т. е. среди векторных функций $\underline{P}$ в пространстве Минковского нет, например, подчиняющихся условию $\underline{P} = \underline{A}$, если потенциал $\underline{A}$ является решением уравнения (4) с неравной нулю правой частью. Впрочем, в работах [4–8] отсутствуют внешние источники. Тогда система (1) принимает вид

$$dF = d(E \wedge dt + B) = 0, \; dH = d(-H \wedge dt + D) = 0, \;\; H = \kappa[F]. \tag{6}$$

Ее можно согласовать, требуя либо $F = dA$, либо $-H = dC$. Требование независимости описания от способа выбора потенциала опять приводит к условию нулевого поля

$$dC = \kappa[dA]. \tag{7}$$

Соответственно, преобразования (3) есть сдвиги потенциалов A и C на $(-P)$ и $(-Q)$. Различным средам соответствуют разные классы решений уравнения (7). Именно они могут рассматриваться в качестве аргумента в дискуссии о несводимости одних материальных уравнений к другим.

Соображения на эту тему, высказанные в [4; 5], основаны на некорректном сравнении симметрийных свойств полевых уравнений Ландау–Лифшица, в которые частично подставлены уравнения связи ($\underline{B} = \underline{H}$), с полевыми уравнениями без подстановки в них уравнений связи Федорова.

Вариант двухпотенциального подхода (6), (7) имеет хорошо изученный микроскопический предел [10]. В пространстве Минковского с координатами $(it, \underline{x})$ свободные уравнения Максвелла (6) в тензорной форме имеют вид $(\varepsilon_0 = \mu_0 = 1)$

$$\partial_l \tilde{F}_{lm} = 0, \ \ \partial_l \tilde{H}_{lm} = 0, \ \ H_{lm} = -\frac{1}{2}\varepsilon_{lmij}\tilde{F}_{ij},$$

где ε_{lmij} – абсолютно антисимметричный тензор; $\tilde{F}_{lm} = \frac{1}{2}\varepsilon_{lmij}F_{ij}$, $\tilde{\tilde{F}}_{lm} = -F_{lm}$. Первые два уравнения, очевидно, не изменяют своего вида при преобразованиях (3), однако третье уравнение – уравнение связи, имеющее в векторных обозначениях вид $\underline{B} = \underline{H}$, $\underline{E} = \underline{D}$, оставляет только функции, подчиняющиеся условию нулевого поля $\underline{B}(\underline{P}) = \underline{H}(\underline{Q})$, $\underline{E}(\underline{P}) = \underline{D}(\underline{Q})$. Вводя поочередно два потенциала – $F_{lm} = \partial_l A_m - \partial_m A_l$ или $H_{lm} = \partial_l C_m - \partial_m C_l$, вместо (7) имеем условие нулевого поля [10]

$$\partial_l C_m - \partial_m C_l = -\varepsilon_{lmij}\partial_i A_j. \tag{8}$$

Как известно [10], оно связывает две плоские электромагнитные волны. Следовательно, в силу линейности уравнений, ему удовлетворяет и две суперпозиции плоских волн.

Рассмотрим теперь бесконечную изотропную среду с отличными от нуля проницаемостями ε, μ. Как было впервые показано И. Е. Таммом [11], стандартные уравнения связи в покоящейся системе отсчета $\underline{B} = \mu\underline{H}$, $\underline{D} = \varepsilon\underline{E}$ переписываются в ней в ковариантном виде с помощью замены «$\kappa_{1212} = \mu$ (все остальные $\kappa_{12lm} = 0$) и $\kappa_{1414} = -\varepsilon^{-1}$ (все остальные $\kappa_{14lm} = 0$ и т. д.)». С помощью замены

$$\underline{B}' = \mu^{-1/2}\underline{B}, \ \ \underline{E} = \varepsilon^{1/2}\underline{E}, \ \ \underline{H}' = \mu^{1/2}\underline{H}, \ \ \underline{D}' = \varepsilon^{-1/2}\underline{D} \tag{9}$$

уравнения связи опять становятся тривиальными – $\kappa'_{1212} = 1$, $\kappa'_{1414} = -1$, а штрихованные поля удовлетворяют свободным уравнениям Максвелла, в которых скорость света равна $(\sqrt{\varepsilon\mu})^{-1}$. При этом условие нулевого поля формально будет иметь тот же вид (8) и те же решения – плоские волны, но распространяющиеся со скоростью $(\sqrt{\varepsilon\mu})^{-1}$.

Поскольку замена (9) не принадлежит к классу преобразований (3), то с помощью последних без ограничения калибровочных функций условием нулевого поля нельзя провести различие даже между двумя изотропными средами.

Для полноты отметим, что полная аналогия с подходом Каббибо и Феррари достигается при использовании максимально общего представления 2-формы при наличии метрики

$$F = f + dA + \delta\tilde{C},$$

где f – гармоническая 2-форма $(\square f = 2^{-1}(d\delta + \delta d)f = 0)$; δ – понижающий дифференциальный оператор, 1-форма A соответствует стандартному потенциалу; 3-форма $\tilde{C}$ – дуальна второму потенциалу. Этот случай будет рассмотрен отдельно.

Заключение. Во-первых, надо констатировать, что небрежение потенциалами – характерная черта подавляющего числа книг и учебников по макроскопической электродинамике. Как показано выше, это контрпродуктивно даже в чисто классической области. Во-вторых, нельзя не отметить, что эта работа в существенной мере могла быть выполнена еще на стадии подготовки материала для монографий [8] и [10]. Наконец, в контексте вышесказанного, апостериорное присвоение имени Ф. И. Федорова уже поименованным калибровочным преобразованиям выглядит сомнительным. Удручает также, что в методических заметках в УФН [4], заканчивающихся благодарностью ученику, как и в [5], трижды искажены фамилия и инициалы его учителя – Бориса Васильевича Бокутя.

Выражаю благодарность Л. М. Томильчику и Ю. А. Курочкину за полезные комментарии. Работа выполнена при частичной поддержке БРФФИ (грант № Ф14АРМ-029).

Список использованной литературы

1. *Hehl, F. W.* Spacetime metric from local and linear electrodynamics: a new axiomatic scheme / F. W. Hehl, Y. N. Obukhov // arXiv: gr-qc. 2005. – 0508024 v1. – P. 1–27.

2. *Itin, Y.* Backwards on Minkowski's road. From 4D to 3D Maxwellian electromagnetism / Y. Itin, Y. Friedman // arXiv: gr-qc. 2008. – 0807.2625 v1. – P. 1–19.

3. *Starke, R.* Functional Approach to Electrodynamics of Media / R. Starke, G. A. H. Schober // arXiv: cond-mat. mtrl-sci. 2015. – 1401.6800 v5. – P. 1–80.

4. *Виноградов, А. П.* К вопросу о форме материальных уравнений в электродинамике / А. П. Виноградов // УФН 2002. – Т. 172. – № 3. – С. 373–370.

5. *Виноградов, А. П.* Электродинамика композитных материалов / А. П. Виноградов // УРСС: Москва, 2001. – 205 с.

6. *Федоров, Ф. И.* Теория оптической активности кристаллов / Ф. И. Федоров // УФН. – 1972. – Т. 108, вып. 4. – С. 762–764.

7. *Бокуть, Б. В.* О феноменологической теории оптической активности / Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков // ЖЭТФ. – 1971. – Т. 61. – С. 1808–1813.

8. *Федоров, Ф. И.* Теория гиротропии / Ф. И. Федоров. – Минск: Наука и техника, 1974. – 456 с.

9. *Cabibbo, N.* Quantum electrodynamics with Dirac monopoles / N. Cabibbo, E. Ferrari // Nuovo Cimento. – 1962. – Vol. 23, N 6. – P. 1147–1154.

10. *Стражев, В. И.* Электродинамика с магнитным зарядом / В. И. Стражев, Л. М. Томильчик. – Минск: Наука и техника, 1975. – 333 с.

11. *Тамм, И. Е.* Собрание научных трудов / И. Е. Тамм. – Москва: Наука, 1975. – Т. I. – С. 19–67.

Поступило в редакцию 28.09.2015