

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

В. И. МУРАШКО

СВОЙСТВА КЛАССА КОНЕЧНЫХ ГРУПП С \mathbf{P} -СУБНОРМАЛЬНЫМИ
ЦИКЛИЧЕСКИМИ ПРИМАРНЫМИ ПОДГРУППАМИ

(Представлено академиком Н. А. Изобовым)

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

Поступило 11.11.2013

Рассматриваются только конечные группы. Напомним [1], что подгруппа H группы G называется \mathbf{P} -субнормальной, если либо $H = G$, либо существует цепь подгрупп $H = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_n = G$ такая, что $|H_i : H_{i-1}|$ является простым числом для $i = 1, \dots, n$. Из известной теоремы Хупперта следует, что группа сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая ее подгруппа \mathbf{P} -субнормальна. В [1–4] исследовались группы с различными системами \mathbf{P} -субнормальных подгрупп. В частности, в [1] изучался класс $w\mathbf{U}$ всех групп, у которых каждая силовская подгруппа \mathbf{P} -субнормальна. Было установлено, что $w\mathbf{U}$ является разрешимой насыщенной наследственной формацией, отличной от формации \mathbf{U} всех сверхразрешимых групп. Группы из класса $w\mathbf{U}$ называются w -сверхразрешимыми. В работе [3] изучался класс \mathbf{X} всех групп, у которых каждая циклическая примарная подгруппа \mathbf{P} -субнормальна и была доказана

Т е о р е м а 1 [3]. *Справедливы следующие утверждения:*

- (1) *Класс \mathbf{X} является насыщенной наследственной формацией;*
- (2) *Группа G принадлежит \mathbf{X} тогда и только тогда, когда она обладает силовской башней сверхразрешимого типа (дисперсивна по Оре) и каждая бипримарная подгруппа G с циклической силовской подгруппой сверхразрешима;*
- (3) *Всякая минимальная не \mathbf{X} -группа является минимальной несверхразрешимой бипримарной группой, у которой все силовские подгруппы, не являющиеся нормальными, циклические.*

Как показано [1; 3], $\mathbf{U} \subset w\mathbf{U} \subset \mathbf{X}$.

Так как \mathbf{X} является насыщенной формацией, то из теоремы Гашюца, Любезедер, Шмида [5, с. 368] следует, что \mathbf{X} – локальна. Напомним определение локальной формации. Пусть \mathbf{P} – множество всех простых чисел. Функция $f : \mathbf{P} \rightarrow \{\text{формации}\}$ называется локальным экраном. Формация \mathbf{F} называется локальной, если ее можно задать следующим образом: $\mathbf{F} = \langle f \rangle = (G \mid \text{если } H/K \text{ является главным фактором группы } G, \text{ то } G/C_G(H/K) \in f(p) \text{ для любого простого } p, \text{ делящего } |H/K|)$, где f – локальный экран. В этом случае говорят, что f является локальным экраном формации \mathbf{F} .

В [1] был найден локальный экран формации $w\mathbf{U}$. Однако вопрос о нахождении локального экрана формации \mathbf{X} оставался открытым. Ответ на этот вопрос дает

Т е о р е м а 2. *Формация \mathbf{X} имеет локальный экран f такой, что $f(p)$ состоит из всех тех разрешимых групп, у которых все циклические примарные подгруппы имеют экспоненту, делящую $p - 1$.*

Согласно [1], обобщенным коммутантом группы G называется наименьшая нормальная подгруппа N группы G такая, что факторгруппа G/N имеет абелевы силовские подгруппы. В [1] было показано, что всякая w -сверхразрешимая группа имеет нильпотентный обобщенный коммутант.

С л е д с т в и е 1. *Группа G w -сверхразрешима тогда и только тогда, когда G имеет нильпотентный обобщенный коммутант и всякая ее циклическая примарная подгруппа \mathbf{P} -субнормальна.*

С л е д с т в и е 2. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда G имеет нильпотентный коммутант и всякая ее циклическая примарная подгруппа \mathbf{P} -субнормальна.*

Полученный в теореме 2 локальный экран f формации \mathbf{X} не является внутренним, так как существует такое простое число p , что $f(p)$ не содержится в \mathbf{X} . Действительно, пусть A_4 – знакопеременная группа степени 4 и $p = 73$. Заметим, что $A_4 \in f(73)$. Так как любая циклическая 3-подгруппа из A_4 не является \mathbf{P} -субнормальной в ней, то $A_4 \notin \mathbf{X}$.

Если \mathbf{N}_p – формация всех p -групп, то по предложению 3.8 [5, с. 360] формация \mathbf{X} имеет единственный максимальный внутренний локальный экран F такой, что $F(p) = \mathbf{N}_p(f(p) \cap \mathbf{X})$ для любого простого числа p .

Пусть F – максимальный внутренний локальный экран формации \mathbf{H} и N – нормальная подгруппа группы G . Говорят, что N – \mathbf{H} -гиперцентральная подгруппа в G , если для любого главного фактора H/K группы G , содержащегося в N , выполняется $G/C_G(H/K) \in F(p)$ для любого простого p , делящего $|H/K|$.

Следующая теорема аналогична результату Бэра [7, с. 39] о строении \mathbf{U} -гиперцентральной (сверхразрешимо вложенной в терминологию Бэра) подгруппе.

Т е о р е м а 3. *Пусть N – нормальная подгруппа группы G и $R_q = N_G(Q)/C_G(Q)$, где Q – силовская q -подгруппа N . Следующие условия эквивалентны:*

1) N – \mathbf{X} -гиперцентральная подгруппа G ;

2) N обладает силовской баишей сверхразрешимого типа, все циклические примарные подгруппы группы $R_q/O_q(R_q)$ имеют экспоненту, делящую $q-1$, и \mathbf{P} -субнормальны в $R_q/O_q(R_q)$ для любого простого q , делящего $|N|$.

С л е д с т в и е 3. *Группа G принадлежит \mathbf{X} тогда и только тогда, когда G обладает силовской баишей сверхразрешимого типа, все циклические примарные подгруппы группы $R_q/O_q(R_q)$ имеют экспоненту, делящую $q-1$, и \mathbf{P} -субнормальны в $R_q/O_q(R_q)$ для любого простого q , делящего $|G|$, где $R_q = N_G(Q)/C_G(Q)$ и Q – силовская q -подгруппа G .*

Формация \mathbf{X} не является радикальной. Пусть F – максимальный внутренний локальный экран формации \mathbf{X} и $p = 3$. Рассмотрим $G = \langle (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3) \rangle$. Заметим, что $G \notin F(3)$, но G содержит нормальные подгруппы $A = \langle (1\ 3)(2\ 4), (1\ 3) \rangle$ и $B = \langle (1\ 3)(2\ 4), (1\ 2)(3\ 4) \rangle$, которые принадлежат $F(3)$. Заметим, что $G = AB$. Следовательно, формация $F(3)$ не радикальна. Тогда по предложению 4.10 [6, с. 43] формация \mathbf{X} не радикальна.

Т е о р е м а 4. *Пусть группа $G = AB$ есть произведение своих \mathbf{P} -субнормальных \mathbf{X} -подгрупп A и B . Если $(|G:A|, |G:B|) = 1$, то группа G принадлежит \mathbf{X} .*

В работе используются стандартные определения и обозначения из [5; 6]. Напомним, некоторые из них. Через $F_p(G)$ обозначается пересечение централизаторов всех главных факторов группы G , порядки которых делятся на p . Известно [6, с. 34], что $F_p(G)$ является p -нильпотентным радикалом группы G . Пусть $\mathbf{F} = \langle f \rangle$. Тогда группа G принадлежит \mathbf{F} тогда и только тогда, когда $G/F_p(G) \in f(p)$ для любого простого p , делящего $|G|$ (см. лемма 4.5 [6, с. 38]). Если \mathbf{F} – класс групп, то группа G называется минимальной не \mathbf{F} -группой, если G не принадлежит \mathbf{F} , а всякая собственная подгруппа G принадлежит \mathbf{F} .

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Вначале установим, что класс $f(p)$ – формация для любого простого p . Пусть p – простое число, группа $G \in f(p)$ и $N \triangleleft G$. Покажем, что $G/N \in f(p)$. Так как G разрешима, то и G/N разрешима. Пусть $A/N = \langle xN \rangle$ – циклическая q -подгруппа в G/N для некоторого простого числа q и Q – силовская q -подгруппа $\langle x \rangle$. Очевидно, что Q – циклическая подгруппа и $A = QN$. По условию Q имеет экспоненту, делящую $p-1$. Откуда $QN/N = A/N$ имеет экспоненту, делящую $p-1$. Следовательно, класс $f(p)$ замкнут относительно взятия гомоморфных образов.

Покажем, что класс $f(p)$ замкнут относительно подпрямых произведений. Достаточно показать, что если в группе G найдутся нормальные подгруппы N_1 и N_2 такие, что $G/N_i \in f(p)$ для $i = 1, 2$ и $N_1 \cap N_2 = 1$, то $G \in f(p)$. Очевидно, что в этом случае группа G разрешима. Пусть A – циклическая примарная подгруппа группы G . Заметим, что в A имеется единственная мини-

мальная нормальная подгруппа. Из $N_1 \cap N_2 = 1$ следует, что хотя бы одна из подгрупп N_1 или N_2 имеет с A единичное пересечение. Без ограничения общности предположим, что $N_2 \cap A = 1$. Тогда $AN_2 / N_2 \cong A$ имеет экспоненту, делящую $p - 1$. Значит, $G \in f(p)$. Следовательно, класс $f(p)$ является формацией.

Пусть $\mathbf{F} = \langle f \rangle$. Так как $f(p)$ – наследственная формация для любого простого p , то по предположению 3.14 [5, с. 364] \mathbf{F} – наследственная формация. Пусть h – локальный экран такой, что $h(p)$ есть формация всех абелевых групп экспоненты, делящей $p - 1$, для любого простого числа p . Хорошо известно, что h – локальный экран формации \mathbf{U} всех сверхразрешимых групп. Так как $h(p) \subseteq f(p)$ для любого простого p , то $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{F}$.

Докажем, что $\mathbf{F} = \mathbf{X}$. Предположим, что \mathbf{X} не содержится в \mathbf{F} . Выберем группу G наименьшего порядка из класса $\mathbf{X} \setminus \mathbf{F}$. Заметим, что G разрешима. Так как обе формации \mathbf{X} и \mathbf{F} насыщены, то $\Phi(G) = 1$. Из наследственности формации \mathbf{X} следует, что G является минимальной не \mathbf{F} -группой. Так как \mathbf{F} – формация, то G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N . В этом случае N – абелева p -подгруппа и $N = C_G(N)$. Пусть M – максимальная подгруппа G , не содержащая N . Тогда $G = NM$. В силу абелевости N , имеем $N \cap M = 1$. Так как группа G обладает силовской башней сверхразрешимого типа по утверждению (2) теоремы 1, то p является наибольшим простым делителем $|G|$ и $(p, |M|) = 1$. Пусть H – собственная подгруппа в M . Заметим, что $O_p(NH) = 1$, так как $N = C_G(N)$. Следовательно, $F_p(NH) = N$. Так как по условию $NH \in \mathbf{F}$, то $H \cong NH / F_p(NH) \in f(p)$. Значит, M – минимальная не $f(p)$ -группа. Если M не является циклической примарной группой, то $M \in f(p)$, что противоречит тому, что M – не $f(p)$ -группа. Следовательно, M – циклическая примарная подгруппа. Но тогда по утверждению (2) теоремы 1 группа G сверхразрешима. Получили противоречие. Значит, $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{F}$.

Предположим, что \mathbf{F} не содержится в \mathbf{X} . Выберем группу G наименьшего порядка из $\mathbf{F} \setminus \mathbf{X}$. Так как обе формации \mathbf{X} и \mathbf{F} насыщены, то $\Phi(G) = 1$. Из наследственности формации \mathbf{F} следует, что G является минимальной не \mathbf{X} -группой. Из утверждения (3) теоремы 1 следует, что в этом случае G является минимальной несверхразрешимой бипримарной группой, у которой единственная минимальная нормальная подгруппа N совпадает со сверхразрешимым корадикалом группы G и является силовской p -подгруппой, а силовская q -подгруппа Q группы G является циклической. Заметим, что $N = C_G(N)$. Так как $G \in \mathbf{F}$, то $G/C_G(N) \cong Q \in f(p)$. Так как $Q \in f(p)$ и циклическая, то Q – абелева группа экспоненты, делящей $p - 1$, и $Q \in h(p)$. Следовательно, G сверхразрешима. Но тогда $G \in \mathbf{X}$. Противоречие. Значит, $\mathbf{F} \subseteq \mathbf{X}$. Следовательно, $\mathbf{F} = \mathbf{X}$. Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о с л е д с т в и я 1. Обозначим через \mathbf{NA} класс групп с нильпотентным обобщенным коммутантом. Заметим, что следствие 1 эквивалентно утверждению, что $w\mathbf{U} = \mathbf{NA} \cap \mathbf{X}$. Согласно 10 [6, с. 36], класс групп с обобщенным нильпотентным коммутантом является локальной формацией с локальным экраном h таким, что $h(p)$ – формация всех групп с абелевыми силовскими подгруппами для любого простого p . Как было показано в теореме 2, формация \mathbf{X} имеет локальный экран f , где $f(p)$ – класс разрешимых групп с циклическими примарными подгруппами экспоненты, делящей $p - 1$. Очевидно, что $\mathbf{NA} \cap \mathbf{X}$ – локальная формация, имеющая локальный экран t такой, что $t(p) = f(p) \cap h(p)$ для любого простого p . Из строения формаций $f(p)$ и $h(p)$ следует, что $t(p)$ есть формация всех групп с абелевыми силовскими подгруппами экспоненты, делящей $p - 1$. Как было показано в [1], t – локальный экран формации $w\mathbf{U}$.

Следствие 2 доказывается аналогично следствию 1.

Л е м м а. Пусть P – p -подгруппа группы G и R – нормальная r -подгруппа G , где $r \neq p$ – простые числа. Тогда справедливы равенства $N_G(P)R / R = N_{G/R}(PR / R)$ и $C_G(P)R / R = C_{G/R}(PR / R)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Равенство $N_G(P)R / R = N_{G/R}(PR / R)$ следует из леммы 1.68 [8, с. 56]. Докажем, что $C_G(P)R / R = C_{G/R}(PR / R)$. Очевидно, что $C_{G/R}(PR / R) \leq N_{G/R}(PR / R) = N_G(P)R / R$. Пусть $C / R = C_{G/R}(PR / R)$. Тогда каждый элемент $c \in C$ представим в виде xy , где $x \in N_G(P)$ и $y \in R$, и для любого $p \in P$ выполняется $[p, c] \in R$. Если предположить, что $C_G(P)R / R \neq C_{G/R}(PR / R)$, то найдутся элементы $x \in N_G(P) \setminus C_G(P)$ и $y \in R$ такие, что $c = xy \in C$. Заметим, что существует элемент $p \in P$ такой, что $p^x = p_1 \neq p$ и $p_1 \in P$. Тогда $[p, c] = p^{-1}p_1^y = p^{-1}p_1[p_1, y] \in R$. Так как $R \triangleleft G$, то $[p_1, y] \in R$. Значит $1 \neq p^{-1}p_1 \in R$. Но $p^{-1}p_1 \in P$ и $P \cap R = 1$. Значит, $p_1 = p$. Полученное противоречие доказывает равенство $C_G(P)R / R = C_{G/R}(PR / R)$.

Доказательство теоремы 3. Покажем, что из 1) следует 2). Пусть F – максимальный внутренний локальный экран формации \mathbf{X} и N – \mathbf{X} -гиперцентральная нормальная подгруппа группы G . Ввиду наследственности формации $F(p)$ для всех простых p , получаем $N \in \mathbf{X}$. Из утверждения (2) теоремы 1 следует, что N обладает силовской башней сверхразрешимого типа. Значит, в N имеется нормальная силовская q -подгруппа Q . Заметим, что $Q \triangleleft G$. Значит, подгруппа Q является \mathbf{X} -гиперцентральной в G . Пусть $1 = Q_0 \leq Q_1 \leq \dots \leq Q_n = Q$ – участок главного ряда группы G от 1 до Q . Тогда из \mathbf{X} -гиперцентральности Q следует, что $G / C_G(Q_i / Q_{i-1}) \in F(q)$ для $i = 1, \dots, n$. Пусть $L = \bigcap C_G(Q_i / Q_{i-1})$, где $i = 1, \dots, n$. Тогда $G / L \in F(q)$ и $C_G(Q) \leq L$. Предположим, что $L / C_G(Q)$ не является q -группой. Пусть порядок $x C_G(Q)$ из $L / C_G(Q)$ взаимно прост с q и α – автоморфизм Q , индуцированный x . Тогда по лемме 3.10 [6, с. 27] следует, что α – тождественный автоморфизм. Противоречие. Значит $L / C_G(Q)$ – q -группа. Так как формация $F(q) = \mathbf{N}_q F(q)$, то $N_G(Q) / C_G(Q) \in F(q)$. Если $Q = N$, то утверждение 2 доказано.

Пусть $Q < N$. Заметим, что N / Q \mathbf{X} -гиперцентральна в G / Q . Используя индукцию по порядку G , можно считать, ввиду строения $F(q)$, что $N_{G/Q}(PQ / Q) / C_{G/Q}(PQ / Q) \in F(p)$ для любой силовской p -подгруппы P группы N , где $p \neq q$. По лемме 1 имеем $N_{G/Q}(PQ / Q) / C_{G/Q}(PQ / Q) \cong N_G(P)Q / C_G(P)Q = N_G(P)(C_G(P)Q) / C_G(P)Q \cong N_G(P) / (N_G(P) \cap C_G(P)Q)$. Так как порядки P и Q взаимно просты и $Q \triangleleft G$, то $C_G(P)Q \cap N_G(P) = C_G(P)$. Следовательно, $N_{G/Q}(PQ / Q) / C_{G/Q}(PQ / Q) \cong N_G(P) / C_G(P) \in F(p)$. Из свойств $F(p)$ следует утверждение 2).

Докажем, что из 2) следует 1). Заметим, что условия 2) теоремы сохраняются при гомоморфизмах. Пусть G – группа наименьшего порядка, имеющая нормальную не \mathbf{X} -гиперцентральную подгруппу N , удовлетворяющую 2), и пусть p – наибольший простой делитель порядка N . Тогда силовская p -подгруппа P группы N нормальна в G . Пусть H / K – главный фактор G и $H \leq P$. Так как $C_G(P) \leq C_G(H / K)$ и $G / C_G(P) = N_G(P) / C_G(P) \in F(p)$, то $G / C_G(H / K) \in F(p)$ и P – \mathbf{X} -гиперцентральная подгруппа G . Согласно предположению, N / P \mathbf{X} -гиперцентральна в G / P . Так как подгруппа P является \mathbf{X} -гиперцентральной в G , то подгруппа N является \mathbf{X} -гиперцентральной в G . Полученное противоречие показывает, что из 2) следует 1). Теорема доказана.

Доказательство теоремы 4. Пусть Z – произвольная циклическая примарная подгруппа G . Достаточно показать, что подгруппа Z^x является \mathbf{P} -субнормальной в G для некоторого элемента $x \in G$. Так как Z примарна, то найдется силовская подгруппа P в G такая, что $Z \leq P$. Ввиду $(|G : A|, |G : B|) = 1$ существует элемент $x \in G$ такой, что $P^x \leq A$ или $P^x \leq B$. Пусть $P^x \leq A$. Так как $A \in \mathbf{X}$, то подгруппа Z^x является \mathbf{P} -субнормальной в A . По условию подгруппа A является \mathbf{P} -субнормальной в G . Следовательно, Z^x – \mathbf{P} -субнормальная подгруппа в G . Теорема доказана.

Литература

1. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1270–1281.
2. Васильев А. Ф., Васильева Т. И., Тютянов В. Н. // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 59–67.
3. Monakhov V. S., Kniashina V. N. // Ricerche di Matematica. 2013. Vol. 62. P. 307–322.
4. Kniashina V. N., Monakhov V. S. // IGJT. 2013. Vol. 2, N 4. P. 21–29.
5. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin, 1992.
6. Шеметков Л. А. Формации конечных групп. М., 1978.
7. Between nilpotent and solvable / ed. by M. Weinstein. Passaic, 1982.
8. Монахов В. С. Введение в теорию конечных групп и их классов. Минск, 2006.

V. I. MURASHKA

mvimath@yandex.by

PROPERTIES OF THE CLASS OF FINITE GROUPS WITH \mathbf{P} -SUBNORMAL CYCLIC PRIMARY SUBGROUPS

Summary

The canonical local definition of the hereditary saturated formation \mathbf{X} of all finite groups with \mathbf{P} -subnormal cyclic primary subgroups was found in the article. The new criterion of the normal subgroup to be \mathbf{X} -hypercentral was obtained using this definition. It was shown that the class \mathbf{X} is closed under taking the products of \mathbf{P} -subnormal subgroups with coprime indices.