

УДК 517.933

М. В. МИЛОВАНОВ, О. Г. МЕДВЕДЕВА

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА
К ИЗУЧЕНИЮ ОБОБЩЕННЫХ ЦЕПОЧЕК ТОДЫ С ДВУМЯ ЭКСПОНЕНТАМИ**

(Представлено членом-корреспондентом В. И. Янчевским)

Белорусский государственный педагогический университет, Минск

Поступило 30.09.2013

1. Если $H = H(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$ – произвольная гладкая функция $2n$ переменных, то система дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

называется уравнениями Гамильтона. Система эта полностью зависит от выбора функции H , которая называется ее гамильтонианом.

Обобщенная цепочка Тоды с двумя экспонентами – это гамильтонова система с гамильтонианом вида

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + \dots + p_n^2) + c_1^2 e^{\alpha_1 q_1 + \dots + \alpha_n q_n} + c_2^2 e^{\beta_1 q_1 + \dots + \beta_n q_n}. \quad (1)$$

Стандартная цепочка Тоды с двумя экспонентами задается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + c^2 (e^{2(q_1 - q_2)} + e^{2(q_2 - q_3)}). \quad (2)$$

Обобщенные цепочки Тоды возникают при решении многих физических задач [1; 2].

В работе [3] показано, что любая обобщенная цепочка Тоды с двумя экспонентами либо интегрируется в квадратурах, либо сводится к решению нелинейного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' = \left(\lambda - \frac{1}{k} y'^2 \right) \left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1 - x^2 - y^2} \right) \quad (3)$$

в полукруге $1 - x^2 - y^2 > 0$, $y > 0$, с ненулевыми коэффициентами k и λ одного знака.

Для стандартной цепочки Тоды (2) $k = -1$, $\lambda = -\frac{1}{27}$.

Скорее всего, уравнение (3) в общем случае не интегрируется. Тем не менее, с его помощью можно получать важную информацию о решениях цепочек Тоды с двумя экспонентами.

2. Пусть цепочка Тоды с гамильтонианом (1) приводится к уравнению (3). Как показано в [3], каждое частное решение (3) позволяет найти решение исходной гамильтоновой системы, зависящее от $2n - 2$ произвольных постоянных.

Очевидно, уравнение (3) имеет следующие два однопараметрических семейства линейных решений

$$y = \pm \sqrt{k\lambda} x + C. \quad (4)$$

Это позволяет указать два $(2n - 1)$ -параметрических семейства решений системы с гамильтонианом (1), которые, в отличие от (4), невозможно угадать. Объем статьи не позволяет выписать эти решения явно.

Таким образом, исходная обобщенная цепочка Тоды с двумя экспонентами имеет два $(2n - 1)$ -параметрических семейства ее точных решений в элементарных функциях.

3. Уравнение (3) не поддается изучению с помощью элементарных методов. Возникла идея применить к (3) методы группового анализа дифференциальных уравнений. Эти методы были разработаны Софусом Ли во второй половине XIX в. и явились исходным пунктом его теории непрерывных групп, т. е. групп Ли. Изложение всей нужной нам теории содержится в книге Ли и Шеффера [4].

Групповой анализ дифференциального уравнения основан на вычислении его группы симметрии. Если она содержит разрешимую подгруппу той же размерности, что и порядок уравнения, то его можно проинтегрировать в квадратурах. В частности, если группа симметрии уравнения второго порядка имеет размерность два, то это уравнение интегрируется. Если же его группа симметрии одномерна, то уравнение можно свести к дифференциальному уравнению первого порядка.

Алгебра Ли группы Ли, допускаемой уравнением (3), состоит из операторов

$$\chi = \xi(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

удовлетворяющих следующему условию инвариантности [4, теорема 35]:

$$\begin{aligned} \eta_{xx} + y_1(2\eta_{xy} - \xi_{xx}) + y_1^2(\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) - y_1^3\xi_{yy} + (\eta_y - 2\xi_x - 3y_1\xi_y)f = \\ \xi f_x + \eta f_y + (\eta_x + y_1(\eta_y - \xi_x) - y_1^2\xi_y)f_{y_1}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$f = f(x, y, y_1) = \left(\lambda - \frac{1}{k} y_1^2 \right) \left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1-x^2-y^2} \right),$$

а $\xi_x, \eta_y, \xi_{xy}, \dots$ обозначают соответствующие частные производные.

Записывая функции f, f_x, f_y, f_{y_1} по степеням y_1 и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях y_1 в равенстве (5), получим расщепление условия (5) по параметру y_1 на следующие 4 условия:

$$\begin{cases} \eta_{xx} + (\eta_y - 2\xi_x) \lambda \left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1-x^2-y^2} \right) = \frac{4\lambda xy}{(1-x^2-y^2)^2} \xi + \lambda \left(-\frac{k}{y^2} + \frac{2(1-x^2+y^2)}{(1-x^2-y^2)^2} \right) \eta, \\ (2\eta_{xy} - \xi_{xx}) - \lambda \left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1-x^2-y^2} \right) 3\xi_y = -\frac{2}{k} \left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1-x^2-y^2} \right) \eta_x, \\ (\eta_{yy} - 2\xi_{xy}) + \frac{1}{k} \left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1-x^2-y^2} \right) \eta_y = -\frac{1}{k} \frac{4xy}{(1-x^2-y^2)^2} \xi - \frac{1}{k} \left(-\frac{k}{y^2} + \frac{2(1-x^2+y^2)}{(1-x^2-y^2)^2} \right) \eta, \\ -\xi_{yy} + \frac{1}{k} \left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1-x^2-y^2} \right) \xi_y = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Таким образом, оператор χ зависит от функций $\xi(x, y), \eta(x, y)$, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений в частных производных (6). Требуется найти общее решение этой системы.

4. Интегрирование системы (6) – весьма громоздкая и технически сложная задача. Наиболее удобные для вычислений случаи, когда $k = -\frac{1}{n}$, где n – произвольное натуральное число. Оказалось, что при таких k и любых $\lambda < 0$ группа симметрии уравнения (3) нульмерна, т. е. групповой анализ ничего не дает.

Было замечено однако, что система (6) существенно упрощается, если в ней положить $\lambda = 0$. Возникла мысль заменить уравнение (3) более простым уравнением

$$y'' = -\frac{1}{k} \left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1-x^2-y^2} \right) y'^2, \quad (7)$$

которое получается из (3) при $\lambda = 0$. Можно надеяться, что решения уравнения (7) сохраняют существенные особенности решений уравнения (3) при достаточно малом λ . И в то же время группа симметрии уравнения (7) может оказаться нетривиальной.

Действительно, вычисления показали, что при $k = -\frac{1}{n}$ группа симметрии уравнения (7) одномерна и порождается оператором

$$\chi = x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^2 - 1}{y} \frac{\partial}{\partial y}, \quad (8)$$

который не зависит от выбора параметра n . Непосредственная проверка убеждает, что оператор (8) удовлетворяет системе (6) при $\lambda = 0$ и любом ненулевом $k \in R$. Это означает, что уравнение (7) всегда имеет нетривиальную группу симметрии и, следовательно, допускает более глубокое изучение по сравнению с уравнением (3).

Более поздние независимые вычисления в Maple показали, что уравнение (3) при любых ненулевых k и λ одного знака имеет нульмерную группу симметрии, а уравнение (7) при любом ненулевом k имеет одномерную группу симметрии.

5. Поскольку уравнение (7) имеет одномерную группу симметрии, оно сводится к уравнению первого порядка. Соответствующая теория изложена в [4, гл. 16, § 5].

Запишем оператор (8) в виде

$$\chi = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y},$$

так что

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y^2 - 1}{y}.$$

Согласно теории, сначала находим дважды продолженный оператор χ'' :

$$\chi'' \equiv \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \eta' \frac{\partial}{\partial y'} + \eta'' \frac{\partial}{\partial y''},$$

где

$$\eta' \equiv \frac{d\eta}{dx} - y' \frac{d\xi}{dx}, \quad \eta'' \equiv \frac{d\eta'}{dx} - y'' \frac{d\xi}{dx},$$

причем переменная y считается функцией переменной x .

Имеем

$$\chi'' \equiv x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y^2 - 1}{y} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{y^2} y' \frac{\partial}{\partial y'} + \left(\frac{1 - y^2}{y^2} y'' - \frac{2}{y^3} y'^2 \right) \frac{\partial}{\partial y''}.$$

Функция

$$u = \frac{x^2}{1 - y^2} \quad (9)$$

является решением уравнения

$$\chi f \equiv x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y^2 - 1}{y} \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

а функция

$$v = \frac{1 - y^2}{y^2 y'^2} \quad (10)$$

есть независимое от u решение уравнения

$$\chi' f \equiv x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{y^2 - 1}{y} \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{y^2} y' \frac{\partial f}{\partial y'} = 0.$$

Очевидно, функции u и v удовлетворяют уравнению $\chi'' f = 0$.

Формула для третьего решения уравнения $\chi'' f = 0$, независимого от u и v , указана в [4]:

$$w = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} y' + \frac{\partial v}{\partial y'} y''}{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} y'}. \quad (11)$$

Согласно этой формуле,

$$w = -\frac{(1-y^2)^2[y'^2 + (1-y^2)yy'']}{xy^3(1-y^2+xy'y')y'^3}. \quad (12)$$

Выразим y через x и u с помощью (9):

$$y^2 = \frac{u-x^2}{u}, \quad y = \sqrt{\frac{u-x^2}{u}}, \quad (13)$$

так как $y > 0$.

Выразим y' через x , u , v с помощью (10) и (13):

$$y'^2 = \frac{x^2}{(u-x^2)v}, \quad y' = \pm \sqrt{\frac{x^2}{(u-x^2)v}}. \quad (14)$$

Выразим y'' через x , u , v , w с помощью (12), (13) и (14).

В случае $y' > 0$

$$y'' = -\frac{w \frac{u}{x} \left(1 + \frac{u}{x} \sqrt{\frac{x^2}{uv}}\right) + \frac{u}{u-x^2} \sqrt{\frac{uv}{x^2}}}{v \sqrt{\frac{(u-x^2)v}{x^2}}}. \quad (15)$$

В случае $y' < 0$

$$y'' = \frac{w \frac{u}{x} \left(1 - \frac{u}{x} \sqrt{\frac{x^2}{uv}}\right) - \frac{u}{u-x^2} \sqrt{\frac{uv}{x^2}}}{v \sqrt{\frac{(u-x^2)v}{x^2}}}. \quad (16)$$

Так как по условию $1-x^2-y^2 > 0$, то $1-y^2 > 0$; а поскольку $y > 0$ и предполагается, что $x \neq 0$, то $u > 0$, $v > 0$ и формулы (13)–(16) имеют смысл в рассматриваемой ситуации. Если подставить функции y , y' и y'' , определенные этими формулами, в уравнение (7), то, согласно теории Ли, должно получиться равенство, содержащее u , v , w и не содержащее x . Поскольку из формулы (11) видно, что $w = \frac{dv}{du}$, полученное равенство можно рассматривать как дифференциальное уравнение первого порядка относительно неизвестной функции $v = v(u)$.

В случае $y' > 0$ получается равенство

$$w \frac{u}{x} \left(1 + \frac{u}{x} \sqrt{\frac{x^2}{uv}}\right) = \frac{2-k(1-u)}{k(1-u)} \sqrt{\frac{uv}{x^2}},$$

которое при $x > 0$ принимает вид

$$\frac{dv}{du} = \frac{(u+a)v}{(1-u)(u+\sqrt{uv})}, \quad (17)$$

а при $x < 0$

$$\frac{dv}{du} = \frac{(u+a)v}{(1-u)(u-\sqrt{uv})}, \quad (18)$$

где $a = \frac{2-k}{k}$.

Параметр a , в зависимости от выбора k , может принимать любые действительные значения, кроме -1 .

В случае $y' < 0$ получается равенство

$$w \frac{u}{x} \left(1 - \frac{u}{x} \sqrt{\frac{x^2}{uv}} \right) = - \frac{2 - k(1-u)}{k(1-u)} \sqrt{\frac{uv}{x^2}},$$

которое при $x > 0$ принимает вид (18), а при $x < 0$ – вид (17).

6. Приведем уравнения (17) и (18) к более удобному виду.

Мы знаем, что $u > 0$, $v > 0$. Рассмотрим новую функцию

$$h(u) = \sqrt{v(u)}, \quad v(u) = h^2(u). \quad (19)$$

Так как $v'(u) = 2h(u)h'(u)$ и в то же время, согласно (17),

$$v'(u) = \frac{(u+a)h^2(u)}{(1-u)(u+\sqrt{u}h(u))},$$

то

$$h'(u) = \frac{(u+a)h(u)}{2(1-u)\sqrt{u}(\sqrt{u}+h(u))}.$$

Рассмотрим вместо u новую независимую переменную t :

$$t = \sqrt{u}, \quad u = t^2. \quad (20)$$

Ясно, что $t > 0$. Функция $h(u)$ превращается при этом в функцию

$$z(t) = h(t^2). \quad (21)$$

Имеем

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(t^2+a)z}{(1-t^2)(t+z)}. \quad (22)$$

Таким образом, уравнение (17) привелось к уравнению (22).

Та же замена переменных (19), (20) и (21) приводит уравнение (18) к уравнению

$$\frac{dz}{dt} = \frac{(t^2+a)z}{(1-t^2)(t-z)}. \quad (23)$$

Так как $t = \sqrt{u}$ и $u = \frac{x^2}{1-y^2}$, где $x \neq 0$ и $1-x^2-y^2 > 0$, то $1-y^2 > x^2$ и, следовательно, $0 < t < 1$.

В то же время $z = h(t^2) = h(u) = \sqrt{v(u)} > 0$. Это означает, что уравнения (22) и (23) следует рассматривать при $0 < t < 1$, $z > 0$.

Если каждой точке $M(x, y)$ круга $1-x^2-y^2 > 0$ поставить в соответствие число $t = \sqrt{u} = \sqrt{\frac{x^2}{1-y^2}}$, то $t \rightarrow 1$ тогда и только тогда, когда $M(x, y)$ неограниченно приближается к окружности $1-x^2-y^2 = 0$.

7. Уравнения (22) и (23) являются уравнениями Абеля второго рода. Такие уравнения иногда интегрируются, иногда – нет. Вполне возможно, что уравнения (22), (23) не интегрируются в квадратурах. Тем не менее, с их помощью можно получить сколь угодно точное описание общего решения уравнения (7) вблизи границы полукруга $1-x^2-y^2 > 0$, $y > 0$. А это, в свою очередь, приводит к описанию поведения интегральных кривых обобщенных цепочек Тоды (1) «на бесконечности», если только в соответствующем уравнении (3) параметр λ достаточно мал.

Перепишем уравнения (22) и (23) в виде

$$\frac{dt}{dz} = \frac{(1-t^2)(t \pm z)}{(t^2+a)z},$$

или

$$\frac{dt}{dz} = \frac{(1-t^2)t}{(t^2+a)z} \pm \frac{1-t^2}{t^2+a}. \quad (24)$$

Так как $\alpha \neq -1$, то при $t \rightarrow 1$ дробь $\frac{1-t^2}{t^2+a} \rightarrow 0$. Поэтому при значениях t , близких к 1, уравнения (24) можно заменить одним более простым уравнением

$$\frac{dt}{dz} = \frac{(1-t^2)t}{(t^2+a)z}$$

с разделяющимися переменными, которое без труда интегрируется:

$$z = C \frac{1}{t} \left(\frac{t^2}{1-t^2} \right)^{\frac{1}{k}}, \quad (25)$$

где $C > 0$ – произвольная постоянная.

При $k = -1$ имеем

$$z = C \frac{1-t^2}{t^3}, \quad C > 0.$$

Все это означает, что при значениях t , близких к 1, общие решения уравнений (22) и (23) приближенно описываются формулой (25). В этом легко убедиться и непосредственно, подставляя функции (25) в эти уравнения.

Если переменные z и t связаны равенством (25), то в силу формул (19), (20) и (21) переменные v и u связаны соотношением

$$v = \frac{C^2}{u} \left(\frac{u}{1-u} \right)^{\frac{2}{k}},$$

которое с учетом формул (9) и (10) можно рассматривать как дифференциальное уравнение первого порядка относительно функции $y = y(x)$. Согласно [4, гл. 13, § 5], такое уравнение допускает оператор (8), а потому по теореме 8 из [4] интегрируется в квадратурах. В результате мы получаем приближенное описание интегральных кривых уравнения (7) вблизи окружности $1-x^2-y^2=0$.

8. Поскольку уравнение (7) рассматривается в полукруге $1-x^2-y^2 > 0$, $y > 0$, то это описание следовало бы дополнить изучением его интегральных кривых вблизи оси Ox , т. е. при малых значениях y . Оказалось, что подобное исследование допускает даже исходное уравнение (3). Перепишем его в виде

$$y'' = \frac{1-x^2+ay^2}{y(1-x^2-y^2)}(k\lambda - y'^2), \quad a = \frac{2-k}{k}. \quad (26)$$

Можно считать, что $y < \varepsilon < 1-x^2$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$. Так как y^2 очень мало, то в уравнении (26) его можно опустить, и мы получаем уравнение, не содержащее переменной x :

$$yy'' + y'^2 - k\lambda = 0,$$

где $k\lambda > 0$. В [5, № 6.107] указано его общее решение

$$y^2 = k\lambda x^2 + C_1 x + C_2, \quad y = \pm \sqrt{k\lambda} x + C,$$

где C_1, C_2, C – произвольные постоянные. Поэтому с любой точностью можно утверждать, что интегральные кривые уравнения (3) пересекают достаточно узкую полосу полукруга, примыкающую к оси Ox , по кусочкам гипербол или прямых, которые при $\lambda \rightarrow 0$ превращаются в кусочки парабол или прямых, параллельных оси Ox .

Литература

1. *Тода М.* Теория нелинейных решеток. М., 1984.
2. *Козлов В. В.* Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск, 1995.
3. *Милованов М. В., Медведева О. Г.* // Докл. НАН Беларуси. 2013. Т. 57, № 3. С. 37–42.
4. *Ли С.* Симметрии дифференциальных уравнений. М.; Ижевск, 2011. Т. 1.
5. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М., 1971.

M. V. MILOVANOV, O. G. MEDVEDEVA

mvmil@mail.ru; olga_medvedeva@tut.by

AN APPLICATION OF GROUP ANALYSIS METHODS TO THE STUDY OF GENERALIZED TODA LATTICES WITH TWO EXPONENTS

Summary

In the article, we consider the equation $y'' = \left(\lambda - \frac{1}{k} y'^2 \right) \left(\frac{k}{y} + \frac{2y}{1-x^2-y^2} \right)$ in the semicircle $1-x^2-y^2 > 0$, $y = y(x) > 0$, $k\lambda > 0$, to which the generalized Toda lattices with a Hamiltonian containing two exponents reduce.

For sufficiently small in absolute value λ , this equation can be replaced by a simpler equation setting $\lambda = 0$. It is proved that the latter has one-dimensional symmetry group and reduces to a differential first-order equation, by means of which one can get an arbitrarily accurate description of the general solution of the simplified second-order equation near the boundary of the semicircle.